

2024

Modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: um olhar para o uso estratégico de desenhos

Hora, Talita Dutra

Universidade Estadual do Norte do Paraná

<https://repositorio.uenp.edu.br/handle/123456789/959>

Baixado de Repositório Institucional UENP



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE
DO PARANÁ**

Campus Cornélio Procópio

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO**

TALITA DUTRA DA HORA

**MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO
ENSINO FUNDAMENTAL:
UM OLHAR PARA O USO ESTRATÉGICO DE DESENHOS**

TALITA DUTRA DA HORA

**MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO
ENSINO FUNDAMENTAL: UM OLHAR PARA O USO
ESTRATÉGICO DE DESENHOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná – *Campus* Cornélio Procópio, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Lourdes Maria Werle de Almeida

Cornélio Procópio – PR
2024

Ficha catalográfica elaborada por Juliana Jacob de Andrade - Bibliotecária, CRB9/1669, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UENP

H811m HORA, Talita Dutra da
Modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: um olhar para o uso estratégico de desenhos. / Talita Dutra da Hora; orientadora Lourdes Maria Werle de Almeida. - Cornélio Procopio, 2024.

91 p. :il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino) - Universidade Estadual do Norte do Paraná, Centro de Ciências Humanas e da Educação, Programa de Pós Graduação em Ensino, 2024.

1. Modelagem Matemática. 2. Desenho Estratégico. 3. Tecnologia Digital. 4. Anos Iniciais. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de, orient. II. Título.

CDD: 372.7

TALITA DUTRA DA HORA

**MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO
FUNDAMENTAL: UM OLHAR PARA O USO ESTRATÉGICO DE
DESENHOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná – *Campus* Cornélio Procópio, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Lourdes Maria Werle de Almeida

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof.^a Dr.^a Magna Natalia Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof.^a Dr.^a Bianca de Oliveira Martins
Universidade Estadual do Norte do Paraná – UENP

Cornélio Procópio, 21 de maio de 2024.

AGRADECIMENTOS

À Deus, que foi e tem sido minha fortaleza e minha coragem.

À minha orientadora, Prof.^a Dr.^a Lourdes Maria Werle de Almeida, por todo apoio, paciência, pelas horas de orientação, pelo carinho, pela dedicação, pelos ensinamentos, pelo companheirismo e pela realização dessa pesquisa. Não há palavras para agradecer a confiança em mim depositada. Foi um privilégio ser sua orientada.

À Prof.^a Dr.^a Magna Natalia Marin Pires por todas as contribuições que aprimoraram esse relatório de pesquisa.

À Prof.^a Dr.^a Bianca de Oliveira Martins pela leitura sensível e cuidadosa do trabalho, pelas sugestões e reflexões proporcionadas que contribuíram para o aprimoramento desse estudo, por todo o apoio e por acreditar em mim, mesmo quando eu mesma não acreditava.

À minha família, minha mãe Maristela, Minha irmã Thaís, meu irmão Thiago e minha cunhada Vitória, pelas orações constantes, pelo carinho, pelo apoio, pelos sorrisos e pelo incentivo.

Aos amigos do GRUPEMMAT, Aline, Bárbara, Bianca, Caio, Flávio Lima, Flávio Fernandes, Joice, Jeferson, Lucas, Kassiana, Élide, Rosângela, Robson, Thainara e Thiago, pelo apoio, conversas e discussões, com cada um de vocês aprendi algo. Em particular ao Jeferson por todo apoio desde a graduação, por me acolher em sua casa, pelas caronas, por acreditar em mim quando nem eu acreditava, você é um exemplo de ser humano e professor, sou eternamente grata por tudo que fez por mim.

Ao Willian pela amizade, pelas alegrias, dificuldades e risadas compartilhadas.

Aos estudantes, participantes dessa pesquisa, pela dedicação, pelo apoio, pelo carinho e por todos os momentos de aprendizado.

À equipe da escola e da Secretária de Educação, pelo acolhimento, pelo carinho, pela confiança, por me auxiliarem sempre.

A todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para realização dessa pesquisa.

Clame a mim, e responder-te-ei, e anunciar-te-ei coisas grandes e firmes que não sabes.
(Jeremias 33:3)

HORA, Talita Dutra. **Modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: um olhar para o uso estratégico de desenhos**. 2024. 90 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino) – Universidade Estadual do Norte do Paraná, Cornélio Procopio, 2024.

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo investigar o uso estratégico do desenho, visando caracterizar o seu potencial para fomentar as ações dos estudantes em atividades de modelagem matemática. Para compor os dados empíricos da pesquisa, atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas por estudantes de um 5º ano do Ensino Fundamental. Os dados foram coletados mediante registros escritos, gravações em áudio e vídeo, notas de campo e entrevistas. A análise dos dados foi inspirada nos procedimentos da análise qualitativa de conteúdo. O relatório da pesquisa segue o formato *multipaper* de modo que seus desdobramentos são apresentados em dois artigos. No primeiro artigo, investigamos como o uso do desenho colabora para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Os resultados desse artigo evidenciam que o uso do desenho no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática influenciou os encaminhamentos dos estudantes nas diferentes etapas das atividades de modelagem matemática, colaborando para a compreensão do problema numa visão holística, para a tomada de decisões e matematização da situação, para a construção do modelo matemático, para a retomada de etapas necessárias, para interpretação e comunicação de resultados. No segundo artigo, buscamos indícios de como se dá a interlocução entre o desenho feito à mão e o uso de um *software* para construir desenhos e, em que aspectos esses recursos podem favorecer ou incrementar as ações dos estudantes em atividades de modelagem matemática. Os resultados sinalizam que a interlocução entre desenhos traçados a mão e o uso de um *software* para construir desenhos, incrementa as ações dos estudantes em diferentes momentos do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, proporcionando meios para a visualização e compreensão do problema, para a matematização e construção do modelo matemático, para a interpretação e comunicação dos resultados. Por fim, os resultados obtidos nos dois artigos nos permitem delinear que o uso estratégico do desenho, seja com lápis e papel ou mediado pela tecnologia digital, incrementaram as ações dos estudantes no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, permitindo com que eles encontrem meios de resolver o problema. Além disso, a pesquisa possibilitou ampliar a classificação de desenhos discutida na literatura e inferir acerca de procedimentos cognitivos subjacentes à construção de um desenho e da mobilização do conhecimento estratégico no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Desenho Estratégico. Tecnologia Digital. Anos Iniciais.

HORA, Talita Dutra. **Mathematical modeling in the early years of Elementary School: a look at the strategic use of drawings.** 2024. 90 f. Dissertation (Professional Master's Degree in Teaching) – State University of Northern Paraná, Cornélio Procopio, 2024.

ABSTRACT

This research aims to investigate the strategic use of drawing, aiming to characterize its potential to encourage student actions in mathematical modeling activities. To compose the empirical data for the research, mathematical modeling activities were developed by students in the 5th year of Elementary School. Data were collected through written records, audio and video recordings, field notes and interviews. Data analysis was inspired by qualitative content analysis procedures. The research report follows the *multipaper* format so that its developments are presented in two articles. In the first article, we investigated how the use of drawing contributes to the development of mathematical modeling activities. The results of this article show that the use of drawing in the development of mathematical modeling activities influenced the students' directions in the different stages of mathematical modeling activities, contributing to the understanding of the problem in a holistic view, for decision making and mathematization of the situation, for the construction of the mathematical model, for the retaking of necessary steps, for interpretation and communication of results. In the second article, we look for evidence of how the dialogue between hand-made drawings and the use of software to create drawings takes place, and to what extent these resources can favor or increase students' actions in mathematical modeling activities. The results indicate that the dialogue between hand-drawn drawings and the use of software to construct drawings, increases students' actions at different moments in the development of a mathematical modeling activity, providing means for visualizing and understanding the problem, for mathematization and construction of the mathematical model, for the interpretation and communication of results. Finally, the results obtained in the two articles allow us to outline that the strategic use of drawing, whether with pencil and paper or mediated by digital technology, increased students' actions in the development of mathematical modeling activities, allowing them to find ways to solve the problem. Furthermore, the research made it possible to expand the classification of drawings discussed in the literature and infer about the cognitive procedures underlying the construction of a drawing and the mobilization of strategic knowledge in the development of mathematical modeling activities.

Keywords: Mathematical Modeling. Strategic Drawing. Digital Technology. Early Years.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ciclo de Modelagem Matemática.....	26
Figura 2 – Coleta de dados realizada pelos estudantes.....	34
Figura 3 – Estudantes realizando o traçado de desenhos para a atividade Arborização da Escola.....	35
Figura 4 – Resolução elaborada pelo grupo G3.....	35
Figura 5 – Resolução apresentada pelo grupo G5.....	37
Figura 6 – Construção de desenho e revisão de procedimentos pelo grupo G5.....	38
Figura 7 – Comunicação dos resultados e validação.....	39
Figura 8 – Estudantes no laboratório de informática.....	40
Figura 9 – Resolução apresentada pelo grupo G4.....	42
Figura 10 – Ajustes na matematização do grupo G4.....	43
Figura 11 – Processo de produção de desenhos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.....	46
Figura 12 – Colaboração do desenho para a atividade de modelagem matemática.....	48
Figura 13 – Exemplo de desenho realizado no GeoGebra.....	56
Figura 14 – Resolução do grupo G1.....	66
Figura 15 – Resolução do grupo G1.....	67
Figura 16 - Resolução do grupo G2.....	68
Figura 17 – Usando software GeoGebra.....	69
Figura 18 – Resolução apresentada pelo grupo G3.....	72
Figura 19 – Resolução do grupo G3.....	72
Figura 20 – Resolução do grupo G4.....	73
Figura 21 – Resolução do grupo G4.....	74
Figura 22 – Impactos dos diferentes tipos de desenho para ações dos estudantes no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.....	76

LISTA DE QUADROS E TABELA

Quadro 1 – Atividades analisadas na pesquisa.....	12
Quadro 2 – Situação-problema da atividade Arborização da Escola.....	32
Quadro 3 – Situação-problema Climatização da Sala de Aula.....	40
Quadro 4 – Elementos relativos as influências do uso de desenhos no desenvolvimento das atividades.....	44
Quadro 5 – Síntese da atividade <i>Reciclagem de Garrafas PET</i>	63
Quadro 6 – Síntese da atividade <i>Beleza das Flores</i>	64
Quadro 7 – Interlocução entre os diferentes tipos de desenhos.....	67
Quadro 8: Interlocução entre os diferentes tipos de desenhos.....	76
Tabela 1: Tipos de desenhos e possíveis colaboração para a Modelagem Matemática.....	83

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	11
1.1 Introdução ao Tema	9
1.2 Objetivo da Pesquisa	13
1.3 Aspectos Metodológicos da Pesquisa.....	14
1.3.1 Organização da Dissertação em Formato <i>Multipaper</i>	14
1.3.2 Contexto e Participantes da Pesquisa.....	14
1.3.3 Metodologia de Coleta e de Análise de Dados.....	15
Referências.....	19
 2 O USO ESTRATÉGICO DE DESENHOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA.....	 23
2.1 Introdução.....	24
2.2 Modelagem Matemática e a Sala de Aula	25
2.3 A Estratégia de Construir um Desenho	28
2.4 Aspectos Metodológicos	31
2.5 Os Desenhos dos Estudantes nas Atividades de Modelagem Matemática.....	31
2.5.1 Atividade 1: Arborização da Escola.....	31
2.5.2 Atividade 2: Climatização da Sala de Aula.....	38
2.6 Discussão e Resultados.....	42
2.7 Considerações Finais.....	46
Referências.....	48
 3 MODELAGEM MATEMÁTICA COM TECNOLOGIA DIGITAL NO ENSINO FUNDAMENTAL: UM OLHAR PARA O USO ESTRATÉGICO DE DESENHOS.....	 52
3.1 Introdução.....	53
3.2 Modelagem Matemática e Tecnologia Digital.....	54
3.3 Sobre o uso de Desenho	57
3.4 Sobre a Visualização.....	59
3.5 Encaminhamentos Metodológicos.....	60
3.6 As Atividades de Modelagem Matemática.....	61
3.7 O uso do Desenho nas Atividades de Modelagem Matemática.....	64
3.8 Discussão.....	73
3.9 Considerações.....	76
Referências.....	77
 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	 81
Referências	84
 ANEXO A – MODELO DO TERMO DE AUTORIZAÇÃO	 87
 ANEXO B - DESENHOS PRODUZIDOS PELOS ESTUDANTES.....	 88

1 INTRODUÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO AO TEMA

A pesquisa em modelagem matemática, no âmbito nacional e internacional, data de mais de quarenta anos e inclui diferentes propósitos (Borromeo Ferri, 2018). Ainda que difundida por meio de diferentes entendimentos e perspectivas, a modelagem matemática traz em sua gênese como característica elementar, a investigação de uma situação da realidade¹ por meio da matemática, de modo a apresentar uma solução para um problema identificado nessa situação (Ramos; Almeida, 2021).

No contexto da sala de aula, a modelagem matemática se caracteriza como uma alternativa pedagógica que visa relacionar a matemática escolar com a investigação de problemas que emergem de um contexto real ou de interesse dos estudantes (Almeida; Brito, 2005). Assim, atividades dessa natureza servem de subsídios para que conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam acionados e/ou produzidos e integrados, mediante um conjunto de ações que articulam a definição de um problema, a seleção de hipóteses e variáveis, a definição de estratégias, a busca por uma solução por meio da construção de modelos matemáticos e a interpretação e comunicação dos resultados, configurando etapas ou fases relativas à modelagem matemática (Almeida; Silva; Vertuan, 2013).

A relevância da inclusão de atividades de modelagem matemática na sala de aula é mencionada em documentos oficiais que guiam a Educação Básica no Brasil, os quais sugerem que os procedimentos suscitados nessas atividades “são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação)” (Brasil, 2018, p. 266). Além disso, Bliss e Libertini (2016) consideram que resolver um problema em atividades de modelagem matemática fornece espaço para que os estudantes o interpretem e realizem escolhas no processo de resolução, de modo que essas escolhas podem estar subsidiadas em estratégias que apoiem o processo de modelagem matemática. Burkhardt (2018) menciona que este aspecto corrobora para uma imagem adequada da Matemática, afastando a ideia de que é uma disciplina destinada a poucos, composta por um conjunto de conceitos e regras isoladas a serem ensinadas e aprendidas.

¹ Neste trabalho, o termo realidade é entendido como como situações extramatemáticas, incluindo a natureza, a sociedade, outras áreas do conhecimento ou fatos do cotidiano (BLUM, 2011).

Nesta perspectiva, quando essa dinâmica caracterizada como modelagem matemática é incorporada às aulas desde o início da escolarização, os estudantes passam a ser corresponsáveis pela investigação de um problema, podendo favorecer a participação ativa, o desenvolvimento da criatividade e da autonomia (Almeida; Brito, 2005). No que se refere aos anos iniciais do Ensino Fundamental, já existem evidências de um aumento no número de pesquisas que versam sobre a modelagem matemática neste nível de escolaridade (Tortola, 2016; Palma, 2019; Tortola; Almeida, 2022; Rocha; Pelaquim; Almeida, 2023).

O que se pode perceber é que a introdução de atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental pode ter diferentes finalidades para estudantes e para professores, é feita em concordância com o conhecimento matemático dos sujeitos e deve-se considerar algumas especificidades concernentes aos modelos matemáticos produzidos. Almeida, Tortola e Merli (2012), consideram que o modelo matemático é o que “dá forma” à solução do problema e a modelagem matemática é a *atividade* de busca por essa solução. Nesse sentido, essa *forma* é entendida como um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por uma linguagem ou estrutura matemática, cuja finalidade é prover meios para descrever, explicar ou prever o comportamento do fenômeno investigado (Almeida; Silva; Vertuan, 2013).

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, Tortola (2016), enfatiza que o modelo matemático faz referência a diversas estruturas matemáticas, podendo ser expresso por meio de um texto explicativo, diagramas, tabelas, colagens, operações matemáticas ou desenhos que, de certa forma, explicam matematicamente o que está sendo investigado. Zogaib e Wagner (2015), consideram que o uso de desenhos nos anos iniciais do Ensino Fundamental, constitui uma forma de linguagem em que a criança os utiliza para expressar sentimentos, ideias, pensamentos e, até mesmo, como uma estratégia² para compreender e subsidiar a resolução de um problema.

Na resolução de um problema, o desenho corresponde a uma exteriorização de uma de imagem esboçada na mente, transformando uma imagem mental em uma representação visual externa, seja com auxílio de lápis e papel ou, em alguns casos, com um computador, a fim de apoiar a busca por uma solução (Johnson Laird, 1980). Nesse sentido, Csíkos, Szitánvi e Kelemen (2012), consideram que construir um desenho possibilita ao estudante imaginar, representar, interpretar as representações e estabelecer semelhanças entre

² O termo estratégia pode ser caracterizado como uma operação consciente e planejada e que, embora possa ser aprendida e aplicada conscientemente, seu uso também pode se dar de forma inconsciente (Hartman, 2001).

o desenho e a situação de estudo, de modo que esse movimento pode apoiar a seleção, organização e sistematização de informações que auxiliam o estudante na busca de uma solução para um problema.

De acordo com Zúñiga (2013), ao se deparar com uma situação-problema, o estudante se envolve em um contexto real e, algumas vezes, próximo a ele, para então criar uma representação pictórica que permite visualizar a forma de proceder na resolução. Considerando essa representação pictórica, Baldin (2018), vem indicando uma abordagem conhecida como Concreto-Pictórico-Abstrato, denominada método para o ensino da Matemática em Singapura³ em que os desenhos, que constituem as representações pictóricas, se configuram como caminho para a matemática formal, subsidiando a aprendizagem nos primeiros anos escolares.

Embora poucas pesquisas tenham sido empreendidas articulando o uso de desenhos a problemas vinculados à realidade do estudante, Rellensmann (2019) propõe uma discussão relativamente ao uso de esboços e desenhos como meio de favorecer o entendimento de aspectos úteis e relevantes para os estudantes ao desenvolverem uma atividade de modelagem matemática. Segundo essa autora, esse uso pode se dar espontaneamente ou ser mediado por uma intervenção do professor.

Os estudantes fazem uso espontâneo de um desenho se o construírem proativamente, ou seja, sem a mediação do professor. Por outro lado, a construção de um desenho pode ser motivada por uma intervenção estratégica do professor em que ele solicita aos estudantes que façam um desenho. Eventualmente, é possível que o pedido para desenhar não seja suficiente e o professor pode fornecer *feedbacks* aos estudantes, sinalizando a ausência de objetos relevantes e suas representações no desenho, a fim de que a estratégia se torne mais útil para a resolução de um problema (Rellensmann, 2019). Neste caso, a intervenção do professor se destina a contribuir com a efetividade do uso de desenhos e auxiliar os estudantes a superar possíveis dificuldades no processo de resolução.

Tanto o desenho construído espontaneamente, quanto o desenho construído a partir de uma intervenção do professor, são considerados estratégicos pois envolvem métodos cognitivos que podem incrementar a resolução de um problema que emerge na modelagem matemática (Rellensmann; Schukajlow; Leopold, 2016). No entanto, não é qualquer tipo de desenho que proporciona ao estudante entender a situação-problema e servir

³ O método é usado no ensino para crianças em Singapura e tem trazido resultados muito positivos (Sprovieri, 2021).

como meio de avançar no desenvolvimento da atividade. Para Leenaars, Joolingen e Bollen (2012), recursos manuais, como régua, papel e lápis, por exemplo, podem limitar a construção de um desenho e dificultar a representação de propriedades importantes.

Nesse sentido, Krawitz e Schukajlow (2020), relatam uma pesquisa em que grupos de estudantes no Ensino Médio, orientados a fazer desenhos para resolver problemas geométricos, envolvendo a relação entre a ampliação de comprimentos e a área e volume de figuras⁴, apresentaram um desempenho inferior que aqueles que não desenharam. Neste caso, os desenhos construídos com lápis e papel, sem a intervenção do professor, levaram os estudantes a uma *ilusão de proporcionalidade*. Os autores realçam a necessidade de investigar fatores que possam complementar e propiciar o uso benéfico de desenhos construídos com lápis e papel em algumas situações.

Uma alternativa interessante que pode ampliar as possibilidades de ações e manipulações de estudantes, conforme sugerem Galbraith e Fisher (2021), é o uso de tecnologias digitais. De acordo com os autores, a tecnologia digital em sala de aula pode se situar como serva do processo de ensino e aprendizagem, podendo fornecer opções estratégicas de resolução aos estudantes, ampliar e aprimorar os métodos de resolução manuais, contribuir para um avanço no desenvolvimento de modelos, além de favorecer a otimização de tempo.

Seki, Martins e Almeida (2018), apontam que o uso das tecnologias digitais na sala de aula pode ampliar o repertório matemático dos estudantes, pois permite abordar uma situação-problema de múltiplas formas em que muitas das possibilidades oferecidas pelas ferramentas digitais podem ser exploradas por meio de *softwares* de geometria dinâmica. Os autores destacam que o GeoGebra, por exemplo, pode favorecer a construção de representações virtuais, permitindo aos estudantes a visualização e manipulação direta de objetos na tela do computador, possibilitando que ideias abstratas se tornem mais tangíveis e concretas. Nesse sentido, as representações dinâmicas viabilizadas por meio de *softwares* podem ampliar e aprimorar os efeitos de construções estáticas realizadas com lápis e papel, promovendo a visualização de conceitos, propriedades e relações relevantes descritas na situação de estudo (Greefrath; Hertleif; Siller, 2018).

Assim, o uso de desenhos, seja feito com lápis e papel ou com tecnologia digital, passa a integrar o conhecimento estratégico dos estudantes, pois se configura uma

⁴ Por exemplo, a mudança na área de um quadrado quando um lado do quadrado é ampliado: “O lado do quadrado C é 12 vezes maior que o quadrado D. Se a área do quadrado C é 1.440 cm^2 qual é a área do quadrado D?” (Krawitz; Schukajlow, 2020, p.7).

possibilidade que os estudantes podem utilizar para compreender o problema, organizar dados e informações e apoiar a resolução (Anderson, *et al.*, 2001). Particularmente, Corrêa (2021), caracteriza o conhecimento estratégico como um tipo de conhecimento metacognitivo⁵ que inclui o repertório de conhecimentos do estudante em relação a sua própria aprendizagem e das estratégias que usa quando vai resolver problemas.

Neste contexto, Borkowski, Chan e Muthukrishna (2000) sugerem que a resolução de um problema é orientada pelo conhecimento estratégico, pois requer a identificação da estratégia mais adequada para as demandas e contextos da tarefa e quais processos devem ser envolvidos em sua realização. Assim, Rellensmann *et al.* (2022, p.6) defendem que o conhecimento estratégico sobre desenho pode ser caracterizado como um conhecimento estratégico específico, que “compõe parte do conhecimento metacognitivo e inclui o conhecimento sobre as características de um desenho que representa adequadamente a estrutura de um problema de modelagem e pode ajudar a resolvê-lo”. Como conhecimento metacognitivo, o desenho é estratégico, pois o estudante utiliza o desenho como um recurso que pode de apoiar a resolução do problema.

Na presente pesquisa relativa ao uso do desenho em atividades de modelagem matemática, por um lado, dirigimos nossa atenção à produção de desenhos construídos com o apoio de lápis e papel. Por outro lado, consideramos a articulação entre desenhos traçados com lápis e papel e aqueles amparados no uso da tecnologia digital, visando investigar uma possível complementação dos desenhos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

1.2 OBJETIVO DA PESQUISA

A investigação do uso de desenhos em atividades de modelagem matemática, é orientada pela questão: como estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental usam o desenho em atividades de modelagem matemática?

Assim, o objetivo consiste em investigar o uso estratégico do desenho, (considerando que esse uso pode ser realizado com lápis e papel ou pode ser mediado pela tecnologia digital), visando caracterizar o seu potencial para fomentar as ações dos estudantes em atividades de modelagem matemática.

⁵ O conhecimento metacognitivo inclui o conhecimento sobre as demandas de uma tarefa, o conhecimento sobre suas próprias capacidades para dominar uma tarefa e o conhecimento sobre as estratégias disponíveis (Flavel, 1979).

1.3 ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

1.3.1 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO EM FORMATO *MULTIPAPER*

A pesquisa está organizada no formato *multipaper*, o qual, segundo Mutti e Klüber (2018, p. 3), “[...] refere-se à apresentação de uma dissertação ou tese como uma coletânea de artigos publicáveis, acompanhados, ou não, de um capítulo introdutório e de considerações finais”.

A dissertação inclui dois artigos que, embora tenha um objetivo particular, para cada artigo, a discussão final visa apresentar e reunir resultados relativos ao objetivo geral da pesquisa.

A estrutura do relatório de pesquisa compreende quatro capítulos e um apêndice. O capítulo 1, se refere à Introdução ao tema e características gerais da pesquisa. O capítulo 2 é o artigo 1, com título “O uso estratégico do desenho em atividades de modelagem matemática”. O objetivo desse artigo consiste em investigar como o uso do desenho colabora para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. O capítulo 3, relativo ao artigo 2, intitulado “Modelagem matemática com tecnologia digital no Ensino Fundamental: um olhar para o uso estratégico de desenhos”. Tem como objetivo investigar como se dá a interlocução entre o desenho feito à mão e o uso de um *software* para construir desenhos e, em que aspectos esses recursos podem favorecer ou incrementar as ações dos estudantes em atividades de modelagem matemática. O capítulo 4 contém as Considerações Finais em que são articulados os resultados de cada artigo, visando apresentar elementos concernentes ao objetivo geral da pesquisa. Assim, o capítulo apresenta resultados relativos ao uso e potencial de desenhos estratégicos em atividades de modelagem matemática desenvolvidas por estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Por fim, são incluídos alguns apêndices.

1.3.2 CONTEXTO E PARTICIPANTES DA PESQUISA

A pesquisa empírica foi desenvolvida com vinte e cinco estudantes de um 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do norte do Paraná, no ano de 2023. Os estudantes contavam com cinco aulas semanais, de uma hora cada, de Matemática e estavam familiarizados com o uso do *software* GeoGebra. As aulas foram ministradas pela autora desse relatório de pesquisa, que atuou como professora da turma. Neste contexto, quatro atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas, conforme indica o Quadro 1.

No desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, os estudantes foram organizados em grupos, sendo Grupo 1 (G1) (A2, A3, A8, A13, A17), Grupo 2 (G2) (A6, A7, A9, A16, A19), Grupo 3 (G3) (A10, A18, A21, A22, A23), Grupo 4 (G4) (A12, A14, A15, A20, A24) e Grupo 5 (G5) (A1, A4, A5, A11, A25).

Quadro 1- Atividades de modelagem matemática

Temática da Atividade	Escolha do Tema	Grupos Analisados	Incluso no Artigo
Arborização da escola	Professora	G3 e G5	Artigo 1
Climatização da Sala de Aula	Estudantes	G4	Artigo 1
Reciclagem de Garrafas PET	Estudantes	G1 e G2	Artigo 2
A Beleza das Flores	Estudantes	G3 e G4	Artigo 2

Fonte: autora

A atividade com o tema *Arborização da escola* foi proposta pela professora e desenvolvida por todos os vinte e cinco estudantes da turma durante cinco aulas de uma hora cada. Foi a segunda atividade de modelagem matemática realizada com os estudantes.

Proposta pelos estudantes, a atividade com tema *Climatização da sala de aula* foi desenvolvida com toda a turma durante sete aulas de uma hora cada. O tema foi sugerido a partir de uma queixa constante dos estudantes: a sensação térmica da sala de aula.

A atividade de temática *Reciclagem de Garrafas PET* é apresentada e analisada no segundo artigo. O tema foi proposto pelos estudantes e a atividade foi desenvolvida por todos os vinte e cinco estudantes da turma durante doze aulas de uma hora cada.

O tema *Beleza das Flores* foi proposto pelos estudantes e a atividade foi desenvolvida por toda a turma durante quatro aulas de uma hora cada.

Os dados coletados a partir dessas atividades foram submetidos a uma abordagem qualitativa em que a metodologia de análise é descrita na seção a seguir, sendo as especificidades tratadas em cada um dos artigos.

1.3.3 METODOLOGIA DE COLETA E DE ANÁLISE DOS DADOS

Para a estrutura *multipaper*, em cada artigo foram incluídas duas atividades, sendo *Arborização da Escola* e *Climatização da sala de Aula* descritas e analisadas no artigo 1. Já no artigo 2 as atividades *Reciclagem de Garrafas PET* e *Beleza das Flores* são incluídas e analisadas.

A coleta de dados em todas as atividades foi realizada por meio de registros escritos produzidos pelos estudantes durante as atividades, anotações feitas em diário de campo e gravações de áudio e de vídeo, das ações dos estudantes no decorrer do desenvolvimento das atividades. Para elucidar questões que não ficaram suficientemente claras ou mesmo para auxiliar na transcrição dos dados, foram realizadas entrevistas que se aproximaram de uma conversa informal.

A pesquisa caracteriza-se como uma abordagem metodológica de natureza qualitativa, visto que tal abordagem enfatiza mais o processo do que o produto e tem como característica essencial a compreensão e interpretação dos fenômenos investigados (Moraes, 2003). Segundo Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa pode ser caracterizada como uma investigação em que a fonte de dados é o ambiente natural, tendo o investigador como instrumento principal; sua natureza é descritiva; o interesse reside mais no processo de análise do que nos resultados; os dados são analisados de forma indutiva; o significado é de importância vital.

Flick (2013), considera que em uma investigação qualitativa a preocupação está em captar o subjetivo de uma realidade complexa, em que o pesquisador buscará explicações para as evidências, fazendo uma articulação dos conhecimentos teóricos com os dados obtidos, havendo, portanto, o uso de argumentos interpretativos. Assumir uma abordagem qualitativa significa, portanto, efetuar um esforço de explicitação e compreensão do fenômeno investigado. Nesse sentido, a análise dos dados foi inspirada nos procedimentos da análise qualitativa de conteúdo, proposta por Mayring (2014).

A análise qualitativa de conteúdo pode ser compreendida, segundo Mayring (2014), como um processo auto-organizado constituído por um conjunto de etapas as quais podem ser adaptadas em conformidade com os objetivos de pesquisa. Esse processo pode ser utilizado para analisar todo tipo de comunicação registrada na intenção de buscar compreensões sobre o fenômeno investigado.

De acordo com Mayring (2014), o primeiro passo da análise qualitativa de conteúdo consiste na definição do material a ser submetido à análise, em que o pesquisador faz uma seleção dos dados que se pretende analisar. Em seguida, deve ser feita a análise da situação em que os dados foram produzidos, que constitui na descrição de como o material foi originado. O próximo passo é a caracterização formal do material, que consiste em transformar em texto de tudo aquilo que não está em registro escrito, como falas presente em gravações de áudio e vídeo, por meio de transcrições. A próxima etapa compreende a

contextualização da análise, em que se determina a direção da análise (o que realmente se quer interpretar do material). O próximo passo consiste nas unidades de análise, em que se realiza a fragmentação dos dados em unidades de análise, a fim de estabelecer possíveis relações. Nesse momento, cada trecho é fragmentado de forma que continue sendo um retrato do contexto geral da situação. Por fim, é feita a definição da técnica de análise de acordo com o objetivo da pesquisa, neste momento é possível fazer o uso de diferentes técnicas e realizar a formação de categorias. Nos dois artigos, utilizou-se a técnica de análise explicativa, que consiste em usar a literatura para acrescentar material adicional a fim de aumentar a compreensão, esclarecer, explicar e interpretar o que foi explorado e observado no material de análise.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de modelagem matemática: que sentido os estudantes podem lhe atribuir? **Ciência & Educação**, Bauru, v. 11, n. 3, p. 483 – 497, dez. 2005.
- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Editora Contexto, 2013.
- ALMEIDA, L.M.W; TORTOLA, E.; MERLI, R.F. Modelagem matemática – com o que estamos lidando: modelos diferentes ou linguagens diferentes?. **Acta Scientiae**, Canoas, v.14, n.2, p. 215-239, maio/ago. 2012.
- Anderson, L. W.; Krathwohl, D. R.; Airasian, P. W.; Cruikshank, K. A.; Mayer, R. E.; Pintrich, P. R.; Raths, J.; Wittrock, Merlin C. (Eds). **A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives**. New York, NY: Longman, 2001.
- BALDIN, Y. Y. Desenvolvimento do pensamento algébrico no currículo de escola básica: caso de modelagem pictórica da Matemática de Singapura. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, San José, v. 17, p. 31-44, 2018.
- BLISS, K.; LIBERTINI, J. What is mathematical modeling? In: Garfunkel S.; Montgomery M. (Eds.). **Guidelines for assessment and instruction in mathematical modelling education. Bedford**. Consortium for Mathematics and its Applications (COMAP) and Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2016.
- BLUM, W. Can Modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In KAISER, G. et al. (Eds.), **Trends in teaching and learning of mathematical modelling – Proceedings of (ICTMA14)**. Springer, p. 15-30, 2011.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação Matemática: uma introdução à teoria e aos métodos**. Lisboa: Porto Editora, 1994.

BORKOWSKI, J. G.; CHAN, L. K.; MUTHUKRISHNA, N. A process-oriented model of metacognition: Links between motivation and executive functioning. In G. Schraw & J. C. Impara (Eds.), **Issues in the measurement of metacognition**. University of Nebraska Press, 2000.

BORRAMEO FERRI, R. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education**. Springer, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BURKHARDT, H. Ways to teach modelling - a 50-year study. **ZDM**, v. 50, n. 1, p. 61-75, 2018.

CSÍKOS, C.; SZITÁNYI, J.; KELEMEN, R. The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. **Educational Studies in Mathematics**, v. 81, p. 47-64, 2012.

CORRÊA, N. N. G. **Mapeamento da percepção do sistema metacognitivo na aprendizagem em Física**: um estudo dos relatos de estudantes do Ensino Médio. 191fls. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2021.

FLAVELL, J. H. Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive developmental inquiry. **American Psychologist**, v. 34, p. 906-911, 1979.

FLICK, U. **Introdução à metodologia de pesquisa**: um guia para iniciantes. Porto Alegre: Penso, 2013.

GALBRAITH, P.; FISHER, D. M. Technology and mathematical modelling: addressing challenges, opening doors. **Quadrante**, v. 30 n.1, p. 98-218, 2021.

GREEFRATH, G.; HERTLEIF, C.; SILLER, H-S. Mathematical modelling with digital tools – a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. **ZDM**, 1-12, 2018.

HARTMAN, H. J. Developing students' metacognitive knowledge and skills. In: HARTMAN H. J. (Ed.). **Metacognition in learning and instruction**. Dordrecht: Springer Neuropsychology and Cognition, 2001, p. 33-68.

JOHNSON-LAIRD, P. N. Mental models in cognitive science. **Cognitive Science**, v. 4, n. 1, p. 71-115, 1980.

LEENAARS, F. A. J.; VAN JOOLINGEN, W.R.; BOLLEN, L. Using self-made drawings to support modelling in science education. **British Journal of Educational Technology**, v. 44, n. 1, p. 82-94, 2012.

KRAWITZ, J.; SCHUKAJLOW, S. When can making a drawing hinder problem solving? Effect of the drawing strategy on linear overgeneralizations and problem solving. **Frontiers in Psychology**, v. 11, n. 506, p. 1-12, 2020.

MAYRING, P. **Qualitative content analysis: theoretical foundation basic procedures and software solution**. Klagenfurt, p. 6-136, 2014.

MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 9, n. 2, p. 191-211, 2003.

MUTTI, G. de S. L.; KLÜBER, T. E. Formato multipaper nos programas de pós-graduação stricto sensu brasileiros das áreas de educação e ensino: um panorama. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA E ESTUDOS QUALITATIVOS, SIPEQ, 5, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais...** Foz do Iguaçu: SEPQ; UNIOESTE, 2018.

PALMA, R. M. **Manifestações da criatividade em modelagem matemática nos anos iniciais**. 2019. 117 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2019.

RAMOS, D. C.; ALMEIDA, L. M. W. A. Interpretação aemiótica em atividades de modelagem matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 35, n. 71, p. 1391-1415, dez. 2021

ROCHA, R. A. R.; PELAQUIM, S. C. P.; ALMEIDA, L. M. W. A. Pode uma atividade de modelagem matemática promover raciocínio abdutivo? In: – Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, Porto Alegre – RS, 2023. **Anais [...]** Porto Alegre, 2023.

RELLENSMANN, J. Selbst erstellte Skizzen beim mathematischen Modellieren: Ergebnisse einer empirischen Untersuchung. **Springer Spektrum**, 2019.

RELLENSMANN, J.; SCHUKAJLOW, S.; LEOPOLD, C. Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. **ZDM**, 2016.

SEKI, J. T. P.; MARTINS, B. O.; ALMEIDA, L. M. W. A. Uso do GeoGebra no estudo de equações diferenciais ordinárias. In: Encontro Paranaense de Tecnologia na Educação Matemática – EPTM, 2018, Apucarana. **Anais [...]** Arapongas, p. 1-14, 2018.

SPROVIERI, L. H. **Utilização do modelo pictórico da matemática de Singapura em resoluções de problemas para os 5º e 6º anos do Ensino fundamental, dentro da proposta curricular do estado de São Paulo**. 2021. 55f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Fundação Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2021.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

TORTOLA, E. ALMEIDA, L. M. W. A. Configuraciones de actividades de modelación matemática en la Educación Primaria: una construcción apoyada en el Análisis de Contenido. **Revista Paradigma**, v. XLIII, p. 329-355, maio 2022.

ZOGAIB, S. D.; WAGNER, V. M. P. S. Crianças, desenhos e resolução de problemas na educação infantil. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, v. 05, N. 02, p. 150-170, 2015.

ZÚÑIGA, P. G. **Metodología Singapur**: el caso del Método del Modelo de Barras. Una mirada Socioepistemológica. Dissertação (Mestrado em Educação) — Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, 2013.

2 O USO ESTRATÉGICO DO DESENHO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Resumo

Este artigo investiga como o uso do desenho colabora para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. O quadro teórico considera aspectos da modelagem matemática e seu uso em sala de aula, bem como elementos relativos ao desenho como conhecimento estratégico. A investigação, de cunho qualitativo, considera dados obtidos em uma pesquisa empírica realizada com estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. O processo analítico relativo as atividades desenvolvidas nos permitem inferir que os desenhos produzidos influenciaram os encaminhamentos dos estudantes nas diferentes etapas das atividades de modelagem matemática, colaborando para a compreensão do problema numa visão holística, para a tomada de decisões e matematização da situação, para a construção do modelo matemático, para a interpretação de resultados e retomada de etapas necessárias e para comunicação de resultados. Além disso, foram evidenciadas ações cognitivas subjacentes à construção de um desenho e a mobilização do conhecimento estratégico no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Anos Iniciais. Desenho Estratégico.

2.1 INTRODUÇÃO

Discussões relativas à inclusão da modelagem matemática nas aulas de matemática têm crescido nas últimas décadas. A modelagem matemática tem sido apontada como uma possibilidade de usar a matemática para lidar com situações, fenômenos ou questões que vão além da própria matemática (Almeida; Silva; Vertuan, 2013; Blum, 2015; Borromeo ferri, 2018). Documentos curriculares que guiam a Educação Básica no país (por exemplo, BNCC⁶, 2018), destacam argumentos favoráveis quanto ao uso da modelagem matemática na sala de aula. Estes argumentos relacionam-se ao fato de a modelagem matemática possibilitar que os estudantes investiguem problemas originados em situações cotidianas ou situações que possam lhes despertar a curiosidade, proporcionando-lhes assim, uma melhor compreensão do mundo em que vivem e da utilidade da matemática.

Resolver problemas em atividades de modelagem matemática tem sido considerada uma habilidade importante para os estudantes em diferentes níveis de escolaridade, pois envolve a problematização, interpretação, investigação e, até mesmo, uma mudança de comportamento (Galbraith, 2015). No entanto, pesquisas apontam que discussões envolvendo a modelagem matemática no contexto dos anos iniciais do Ensino Fundamental têm ocorrido com mais rigor nos últimos anos, indicando a necessidade de mais investigações acerca da modelagem matemática neste nível de escolaridade (Silva; Klüber, 2012, Tortola; Almeida, 2022). Por meio da modelagem matemática há a “possibilidade de ensinar e aprender Matemática e perceber suas aplicações para a resolução de problemas que vão além do ambiente escolar” (Almeida; Silva; Vertuan, 2013, p. 29).

Na literatura, o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática faz parte de um processo de resolução que, muitas vezes, pode ser descrito como um ciclo. O processo cíclico do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática envolve a formulação de um problema, a definição de hipóteses e variáveis, a seleção de estratégias para sua resolução, a busca por uma solução por meio da construção de modelos matemáticos e a interpretação e comunicação dos resultados (Almeida; Silva; Vertuan, 2013). Neste encaminhamento, a realização de um processo de modelagem matemática pode se configurar um desafio para os estudantes, pois requer não apenas competências⁷ matemáticas, mas

⁶ Base Nacional Comum Curricular. Para maiores informações, consultar: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>

⁷ O termo competência se refere à mobilização de conceitos, habilidades práticas, cognitivas e socioemocionais, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana [...] (Brasil, 2018).

envolve um conjunto de habilidades⁸ necessárias para que o estudante seja capaz de quantificar características não matemáticas e construir um modelo matemático da situação (Blum, 2015; Almeida, 2018).

Como meio de enfrentamento dos desafios que atividades de modelagem matemática podem propor aos estudantes, pesquisas têm apontado a importância de mobilizar estratégias cognitivas e metacognitivas para amparar os encaminhamentos dos estudantes (Blum, 2015; Almeida; Castro, 2023; Castro; Almeida, 2023). Particularmente, Corrêa (2021), caracteriza o conhecimento estratégico como um tipo de conhecimento metacognitivo⁹ que inclui o repertório de conhecimentos do estudante em relação a sua própria aprendizagem e das estratégias que usa quando vai resolver problemas. Rellensmann, Schukajlow e Leopold (2019) sugerem o uso de desenhos como um tipo de conhecimento estratégico que, em atividades de modelagem matemática compõe um conhecimento estratégico específico que pode ser um suporte para o estudante na resolução do problema em uma atividade de modelagem matemática.

O uso de desenhos em atividades de modelagem matemática, entretanto, pode não se dar de modo espontâneo pelos estudantes (Rellensmann *et al.*, 2022). Além disso, não é qualquer tipo de desenho que proporciona ao estudante entender a situação-problema e servir como meio de avançar no desenvolvimento da atividade (Van Meter; Firetto, 2013).

Levando em consideração essas discussões já identificadas na literatura, a presente pesquisa se propõe a olhar para a produção de desenhos pelos estudantes e investigar como esses desenhos colaboram para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA E A SALA DE AULA

Em termos gerais, a modelagem matemática pode ser entendida como uma atividade que possibilita a investigação de um problema da realidade por meio da matemática. Seu uso na sala de aula pode “apoiar a compreensão de métodos e conteúdos da matemática escolar, contribuindo para a construção de conhecimentos bem como pode servir para mostrar aplicações da matemática em outras áreas do conhecimento” (Almeida, Silva, Vertuan, 2013,

⁸ O termo habilidades refere-se aos conhecimentos necessários para o pleno desenvolvimento das competências (Brasil, 2018).

⁹ O conhecimento metacognitivo inclui o conhecimento sobre as demandas de uma tarefa, o conhecimento sobre suas próprias capacidades para dominar uma tarefa e o conhecimento sobre as estratégias disponíveis (Flavel, 1979).

p.30). Além disso, sua inserção desde os primeiros anos escolares, tem como pressuposto oportunizar a aprendizagem matemática e facilitar a investigação, análise e reflexão de fenômenos da realidade e que podem ser de interesse dos estudantes (Tortola; Almeida, 2022).

No âmbito da sala de aula, a modelagem matemática se caracteriza como uma alternativa pedagógica em que à atividade se associa a aprendizagem dos estudantes por meio de um conjunto de ações que articulam a investigação de um problema, normalmente associado ao cotidiano dos estudantes ou a situações que possam lhes interessar, mediada pela construção de modelos matemáticos (Almeida; Silva; Vertuan, 2013). Os modelos matemáticos, neste contexto, são sistemas conceituais dotados de uma linguagem ou estrutura matemática cuja finalidade é prover meios para descrever, explicar ou prever o comportamento do fenômeno investigado.

Considerando os anos iniciais do Ensino Fundamental, um modelo matemático pode ser representado por meio de esquemas, operações, desenhos, materiais manipuláveis, colagens e língua natural que, de certa forma, incluem características essenciais do fenômeno investigado, indicando uma possível solução para o problema (Tortola; Almeida, 2022). Diante de uma multiplicidade de modelos matemáticos, English (2016), destaca que, os estudantes, independentemente de seu nível de desempenho matemático, podem produzir um modelo que represente sua própria solução para um determinado problema.

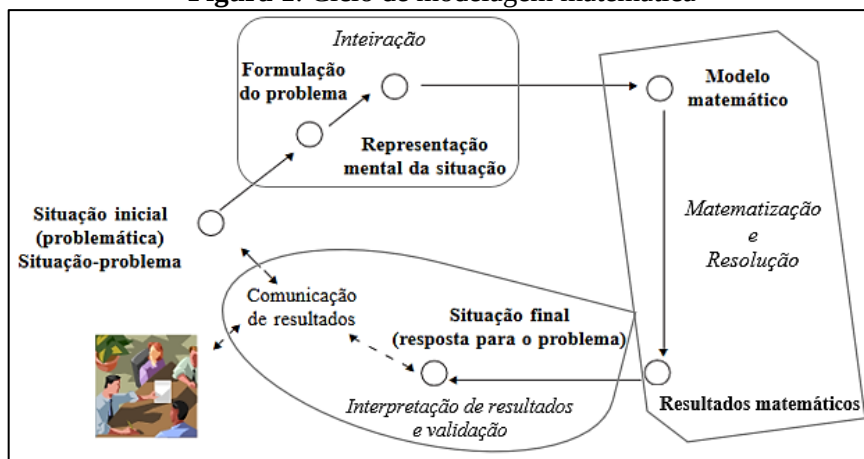
Nesse sentido, Tortola (2016) considera que com o uso da modelagem matemática deixa-se de priorizar modelos prontos e passa-se a enfatizar o processo de construção de modelos, no qual diferentes conhecimentos matemáticos podem ser utilizados, exigindo um maior envolvimento com a situação investigada. De acordo com English (2003), a atividade de desenvolver modelos matemáticos proporcionada pela modelagem matemática, configura-se como uma ferramenta poderosa, pois permite que os estudantes construam, expliquem, interpretem e representem sistemas estruturalmente complexos, contribuindo para o seu desenvolvimento matemático.

Almeida (2018) considera que o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática tem origem em uma situação inicial em que se identifica um problema, e tem como ponto de chegada uma situação final em que a solução para o problema é apresentada, geralmente expressa na forma de um modelo matemático. À busca da solução mediada pelo modelo associa-se um conjunto de procedimentos realizados pelos estudantes,

caracterizando as denominadas fases da modelagem matemática: inteiração, matematização, resolução, interpretação dos resultados e validação (Almeida; Silva; Vertuan, 2013).

A inteiração refere-se à familiarização do estudante com a situação que se pretende estudar. Nessa fase, ocorre a escolha de um tema e a busca de informações a seu respeito de modo a se formular um problema a ser investigado. Na matematização ocorre a transição da linguagem natural para a linguagem matemática. Assim, seleciona-se variáveis, faz-se simplificações e define-se hipóteses para escrever matematicamente o problema. Estes encaminhamentos conduzem os envolvidos à fase da resolução, que consiste na elaboração de um modelo matemático para apresentar uma solução para o problema. Na fase de interpretação de resultados e validação, os estudantes analisam se o modelo matemático produzido é coerente, tanto em relação à situação inicial, quanto em relação à matemática utilizada. Por fim, ocorre a comunicação dos resultados obtidos pelos estudantes ao professor e demais colegas. A Figura 1 ilustra as fases de uma atividade de modelagem matemática e ações suscitadas em cada etapa. A dinâmica da atividade é incorporada pela estrutura cíclica, favorecendo a retomada de fases sempre que adequado.

Figura 1: Ciclo de modelagem matemática



Fonte: Adaptado de Almeida e Silva (2012)

A transição entre as diferentes fases de uma atividade de modelagem matemática pode se configurar um desafio e, além do uso de conceitos e métodos, oferece demandas cognitivas ao estudante (Almeida; Silva, 2012; Blum, 2015). Neste contexto, estudos apontam que estratégias cognitivas são fundamentais para os encaminhamentos dos estudantes, auxiliando-os na superação de desafios e possíveis dificuldades enfrentadas no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática (Blum, 2015; Castro; Almeida, 2023). Relativamente às diferentes possibilidades de ativação e uso de estratégias de

resoluções, Rellensmann (2019), salienta o traçado de desenhos como possível suporte à resolução de um problema definido em uma situação da realidade. Considerando este aspecto, no presente artigo o interesse está em investigar a influência da estratégia de construir um desenho na realização de atividades de modelagem matemática.

2.3 A ESTRATÉGIA DE CONSTRUIR UM DESENHO

O desenho é uma estratégia que compõe um arsenal de possibilidades de que o indivíduo pode se valer para alcançar os objetivos de uma tarefa cognitiva (Flavel, 1976). A este arsenal de possibilidades, a literatura costuma se referir como conhecimento estratégico.

O conhecimento estratégico é um tipo de conhecimento metacognitivo que inclui o repertório de conhecimentos do estudante em relação a sua própria aprendizagem e das estratégias que usa quando vai resolver problemas. Segundo Corrêa (2021, p.44) o conhecimento estratégico diz respeito ao conjunto de “táticas de resolução, aplicabilidade e eficácia referente às demandas da tarefa e do contexto para atingir os resultados pretendidos”.

Caracterizando, o conhecimento estratégico orienta o estudante na seleção da estratégia mais adequada e dos procedimentos que podem tornar eficiente a realização de uma atividade. Neste contexto, Borkowski, Chan e Muthukrishna (2000) propõem o conhecimento de estratégias específicas como meio de identificar em que circunstâncias uma determinada estratégia pode ser utilizada, como ela pode ser executada e quais características podem promover seu uso eficiente. Assim, se uma estratégia for eficaz em uma determinada atividade o conhecimento específico da estratégia é fortalecido, favorecendo seu uso em atividades semelhantes, ampliando e enriquecendo o repertório estratégico do estudante.

Particularmente, a estratégia de construir um desenho é apontada como uma ação que pode subsidiar a aprendizagem e a resolução de problemas, pois se caracteriza como uma ferramenta que pode apoiar a compreensão de uma situação, a organização de dados e informações e a sua resolução (Van Meter; Firetto, 2013; Rellensmann, 2019). Neste sentido, Rellensmann, Schukajlow e Leopold (2019) propõe o desenvolvimento do conhecimento estratégico sobre desenho como meio de promover o uso eficiente dessa estratégia em atividades de modelagem matemática.

Conforme sugerem Rellensmann *et al.* (2022), o conhecimento estratégico sobre desenho inclui conhecer as características de um desenho que representa

adequadamente a estrutura de uma atividade de modelagem matemática (por exemplo, a representação correta de objetos e relações relevantes e a indicação de informações numéricas pertinentes), podendo apoiar a compreensão da situação, a organização de informações e a obtenção do modelo matemático. Assim, o conhecimento estratégico sobre desenho é fortalecido e o estudante desenvolve, gradualmente, a capacidade de selecionar e usar a estratégia de maneira apropriada.

Van Meter e Firetto (2013) propõem um modelo sugerindo uma estrutura para explicar processos cognitivos subjacentes à construção de um desenho associado a alguma tarefa ou a alguma situação que se pretende entender. Segundo esses autores, a construção de um desenho associado à resolução de um problema não é algo simples e requer do estudante constantes idas e vindas entre representações internas (mentais) e representações externas (as características, os símbolos usados no desenho).

De acordo com Van Meter e Firetto (2013), o processo de construir um desenho inicia-se com *representação superficial* buscando por elementos essenciais da situação ou tarefa. Em seguida, os estudantes estabelecem conexões entre os elementos selecionados, formando uma *representação proposicional* da situação. Esse movimento refere-se a um processo de organização dos elementos selecionados buscando por relações estruturais. A partir da representação proposicional, os estudantes tentam compreender a situação fazendo algumas idealizações com base em seu conhecimento prévio, caracterizando um modelo preliminar (mental) da situação. Esse modelo mental é traduzido em uma imagem perceptiva da situação, que é externalizada pela construção de um desenho.

Esse modelo pressupõe processos recursivos entre as etapas descritas em que o estudante pode voltar a processos anteriores para esclarecer relações entre as informações. Além disso, segundo Van Meter e Firetto (2013) é possível que aspectos das representações superficial e proposicional sejam traduzidos diretamente em uma imagem perceptiva, caso em que os estudantes aceleram a construção do desenho.

Assim, a ação de construir um desenho envolve processos cognitivos de seleção, organização, integração e compreensão de informações descritas na situação de estudo, que segundo Rellensmann (2019), favorece a visualização de um problema.

Zúñiga (2013) considera que ao se deparar com um problema, o estudante se envolve em um contexto real e, algumas vezes, próximo a ele, para então criar uma representação pictórica que permite visualizar a forma de proceder na resolução. Considerando essa representação pictórica, Baldin (2018), vem indicando uma abordagem

conhecida como Concreto-Pictórico-Abstrato, denominado método para o ensino da Matemática em Singapura, em que os desenhos se configuram como uma ferramenta estratégica que desempenha um papel de suporte na resolução de problemas, possibilitando ao estudante representar e visualizar relações descritas em uma situação.

Diferentes tipos de desenhos podem ser construídos pelos estudantes para apoiar o processo de resolução de um problema, sendo sua variação de acordo com suas características específicas, podendo ser classificados como desenhos situacionais, esboços ou desenhos matemáticos (Rellensmann; Schukajlow; Leopold, 2019).

Os desenhos situacionais retratam com detalhes a situação de estudo em que todos os objetos, ou pelo menos a maioria, são representados de acordo com sua aparência física. Esse tipo de desenho pode apoiar o estudante na compreensão e estruturação do problema, de modo que informações implícitas podem tornar-se aparentes no desenho, favorecendo a visualização de conceitos matemáticos. No entanto, um desenho situacional também pode *atrapalhar* o processo de resolução de um problema, particularmente nos casos em que a riqueza de detalhes irrelevante para a resolução (Rellensmann *et al.*, 2022).

O desenho como um esboço se refere a um traçado inicial e simplificado de um assunto, geralmente expresso por meio de linhas e traços grosseiros que podem evoluir para um desenho mais elaborado. Neste tipo de desenho, não há a preocupação de representar a situação com riqueza de detalhes ou exatidão, visto que representa uma visão geral de um assunto em que o foco não está na estética (Rellensmann, 2019). Segundo Bräuer, Leiss e Schukajlow (2021), ao resolver um problema, os estudantes podem utilizar um esboço como estratégia para entender os objetos e suas relações, servindo de apoio para a matematização da situação, na medida em que os objetos matemáticos implícitos no problema podem se tornar evidentes quando esboçados, favorecendo assim, a construção de um modelo matemático.

O desenho matemático, por sua vez, caracteriza-se como uma representação dos elementos e informações matemáticas essenciais da situação em estudo. Nele são sistematizadas características pertinentes em que as informações que estão implícitas na descrição do problema podem tornar-se aparentes no desenho, contribuindo para que os estudantes façam inferências para a sua resolução. Um desenho matemático pode auxiliar os estudantes na observação de conceitos e métodos matemáticos que até então estavam despercebidos. Os objetos e as suas conexões podem ser indicados nos desenhos por meio de números, variáveis, setas indicando distância, diagramas, gráficos, tabelas, entre outros. (Rellensmann; Schukajlow; Leopold, 2019).

Em sala de aula, os diferentes tipos de desenhos construídos pelos estudantes, podem incluir características mistas, de modo que um mesmo desenho pode apresentar objetos representados situacionalmente, matematicamente e/ou esboçados. A este respeito, Rellensmann, Schukajlow e Leopold (2016), consideram que um desenho pode ser classificado de acordo com a predominância dos objetos representados, em que um desenho pode ser identificado como situacional se o número de objetos representados situacionalmente for maior do que os objetos esboçados ou representados matematicamente. No entanto, Rellensmann (2019), salienta que o desenho matemático exige um nível de abstração mais elevado, pois deve se concentrar na estrutura matemática do problema.

Além disso, o uso de desenhos como estratégia para resolver problemas pode se dar espontaneamente ou por uma intervenção estratégica do professor. O uso espontâneo diz respeito a uma construção intuitiva do estudante, ou seja, sem a mediação do professor. Em contrapartida, a construção de um desenho pode ser motivada por uma intervenção estratégica do professor, em que os estudantes são instigados a construir um desenho para resolver um problema, podendo ainda receber *feedbacks* do professor quanto à ausência de objetos relevantes e suas representações no desenho (Rellensmann; Schukajlow; Leopold, 2019). De acordo com Rellensmann (2019), a intervenção estratégica do professor visa contribuir com a efetividade do uso de desenhos, de modo a estimular uma abordagem estratégica da tarefa e auxiliar os estudantes a superar uma possível dificuldade no processo de resolução, preservando sua autonomia. Tanto os desenhos espontâneos, quanto os desenhos instruídos são considerados estratégicos, pois envolvem processos cognitivos que descrevem informações visuais ou espaciais da situação de estudo, configurando-se a exteriorização de uma forma de imagem esboçada na mente (Van Meter; Garner, 2005).

No presente artigo, o que se visa investigar é como o uso do desenho colabora para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

2.4 ASPECTOS METODOLÓGICOS

O presente artigo é fundamentado na metodologia de pesquisa qualitativa, que segue uma abordagem descritiva e interpretativa e tem como característica essencial a compreensão do fenômeno investigado (Moraes, 2003). Nesse sentido, a análise dos dados foi inspirada nos procedimentos da análise qualitativa de conteúdo, proposta por Mayring (2014).

A análise qualitativa de conteúdo pode ser entendida como uma técnica de análise de dados guiada por um conjunto de etapas as quais podem ser adaptadas em conformidade com os objetivos de pesquisa, na intenção de buscar a compreensão do fenômeno investigado (Mayring, 2014). Primeiramente, realizou-se a transcrição dos dados (áudios, vídeos, entrevistas, etc.). Em seguida, delimitou-se a direção da análise em relação ao objetivo pretendido e a partir da transcrição, foram identificadas as unidades de análise. Por fim, utilizou-se a técnica explicativa para análise dos dados, que consiste em usar a literatura para descrever e interpretar o que foi explorado e observado no material de análise em que a descrição e interpretação desses elementos oferece indicativos para a discussão.

Os dados que subsidiam nossas discussões consistem em registros escritos de estudantes, anotações em diário de campo, gravações de áudio, vídeo e entrevistas provenientes de duas atividades de modelagem matemática. Estas atividades foram desenvolvidas em aulas regulares de Matemática com vinte e cinco estudantes organizados em cinco grupos, com idades entre dez e treze anos de uma turma de um 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do Estado do Paraná, sendo as aulas ministradas por uma das autoras do presente artigo.

2.5 OS DESENHOS DOS ESTUDANTES NAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

2.5.1 ATIVIDADE 1: ARBORIZAÇÃO DA ESCOLA

O tema *Arborização da Escola* foi proposto pela professora a partir de um projeto envolvendo a temática Educação Ambiental na Escola. Para esta atividade foram apresentados aos estudantes dados relativos à arborização urbana. A atividade teve início com uma discussão orientada pela professora incluindo questões como: As árvores são importantes? Quantas árvores têm na escola? A arborização da escola está adequada? Quais são possíveis benefícios dessas árvores para a comunidade escolar? Os estudantes manifestaram então interesse em investigar como se daria essa arborização e se propuseram a responder duas questões: Quantas árvores são necessárias para arborizar as áreas verdes da escola? Quanto custará essa arborização? O Quadro 2 mostra as informações fornecidas aos estudantes para mediar essa discussão inicial.

Quadro 2 – Situação-problema da atividade *Arborização da Escola*

Arborização da Escola

O prédio encontra-se em processo de ajustes e finalizações, e ainda não possui arborização em suas áreas. Dentre vários aspectos positivos da arborização, destaca-se o conforto térmico associado à umidade do ar, a redução dos níveis de poluição e a melhoria da infiltração da água no solo. Uma maneira de maximizar os diversos benefícios proporcionados pelas árvores é plantá-las onde não ultrapassem o espaço disponível para elas. Vale destacar, que o espaçamento entre uma árvore e outra deve respeitar a distância mínima de 3 metros. A arborização implantada de forma mal planejada pode proporcionar danos à rede elétrica, calçadas, muros e telhados. Desta forma, é essencial a escolha de espécies adequadas. É possível ver detalhes de espécies de árvores indicadas para arborização urbana na Tabela a seguir.

Tabela 1: Espécies de árvores indicadas para arborização urbana.

Espécie	Nome Popular	Altura (metros)	Valor Unitário
<i>Thevetia peruviana</i>	Chapéu-de-napoleão	4-5	R\$38,00
<i>Bauhinia forficata</i>	Pata-de-vaca	5-8	R\$22,90
<i>Caesalpinia pulcherrima</i>	Flamboianzinho	3-4	R\$20,90
<i>Senna bicapsularis</i>	Canudo-de-pito	3-4	R\$27,90
<i>Lagerstroemia</i>	Estremosa	5-8	R\$32,90

Fonte: Apolinário (2009)

→ Levando em consideração as informações apresentadas e os benefícios que as árvores podem proporcionar à escola, pense você: Quantas árvores são necessárias para arborizar as áreas verdes da escola? Quanto custará essa arborização?



Fonte: As autoras

A partir dessa discussão, os estudantes foram organizados em cinco grupos constituídos por cinco membros. Considerando a extensão do texto, nos referimos as resoluções do Grupo 3 (G3), cujos integrantes foram codificados como A10, A18, A21, A22, A23 e do Grupo 5 (G5), os estudantes A1, A4, A5, A11, A25 estão incluídos.

Com os dados em mãos, cada grupo estabeleceu critérios e estratégias para determinar quantas árvores seriam necessárias para a arborização, levando em consideração as informações recebidas. Considerando a extensão das áreas verdes na escola, cada grupo definiu uma área a ser arborizada, sendo elas: laterais (1¹⁰) e (2), jardins (3) e (4) e estacionamento (5).

Os estudantes do grupo G3 decidiram, inicialmente, que as informações apresentadas pela professora não seriam suficientes para responder às questões e seriam necessárias as medidas de cada região a ser arborizada.

Acompanhados pela professora, os estudantes realizaram medições no espaço previamente escolhido por cada grupo, conforme indica a Figura 2.

Figura 2: Coleta de dados realizada pelos estudantes

¹⁰ Os espaços considerados para arborização são identificados na imagem do Quadro 2.



Fonte: Dados da pesquisa

A partir da obtenção das medidas de cada região, algumas discussões foram iniciadas sob os seguintes questionamentos feitos pela professora: O que vocês podem fazer agora que conhecem as medidas dos espaços que serão arborizados? A escolha das espécies de árvores seguirá algum critério ou serão escolhidas ao acaso? Como será realizado o plantio? Os estudantes começaram a expor suas ideias e dentre elas as informações selecionadas que consideraram relevantes: a cada três metros será plantada uma árvore; a escolha de cada espécie se dará de acordo com a estatura que cada árvore poderá atingir em relação a medida do espaço a ser arborizado; as árvores serão escolhidas de acordo com o menor custo.

A seleção de informações direcionou os estudantes à matematização da situação visando encontrar meios para determinar a quantidade necessária de árvores para a arborização da escola e o custo aproximado. Neste momento, as variáveis envolvidas na situação foram colocadas em evidência (distância mínima necessária para o plantio de uma árvore e medidas do espaço a ser arborizado). O diálogo a seguir evidencia a iniciativa dos estudantes de construir um desenho para representar os elementos envolvidos na situação e a Figura 3 ilustra esse momento.

A22: [...] eu vou ler mais uma vez. A gente tem que descobrir quantas árvores dá para plantar nessa lateral. (Leitura da atividade em voz alta. Durante a leitura sublinha e anota na folha de resolução a indicação de distância mínima necessária entre uma árvore e outra).

A21: As medidas da lateral é 30m de comprimento e 4m de largura. Vamos simular como se fosse o espaço aqui no papel. (Começa a medir com a régua a folha de sulfite e desenha um retângulo para representar o espaço a ser arborizado) – então como o comprimento é de 30 m, vamos usar 30 cm, a largura de 4 m, vamos riscar 4 cm.

A18: Ah... Deu para entender agora! Nessa parte de dentro as árvores serão plantadas. Dá para a gente ir medindo a distância entre uma e outra fazendo desse jeito. (se referindo a sugestão de A21 de utilizar um raciocínio proporcional as medidas reais).

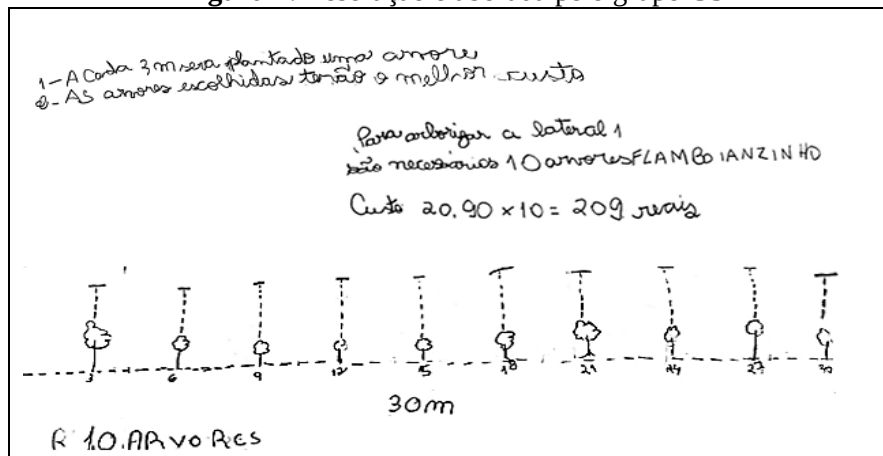
Figura 3: Estudantes realizando o traçado de desenhos para a atividade *Arborização da Escola*



Fonte: Dados da pesquisa

A partir do diálogo do grupo G3, é possível inferir que os estudantes organizaram mentalmente as informações selecionadas antes de construir o desenho. Além disso, identificaram os objetos e as informações numéricas relevantes para a resolução do problema e organizaram essas informações estabelecendo relações com a situação investigada. Em seguida construíram um desenho relacionando essas informações. A estratégia permitiu aos estudantes encontrar meios para resolver o problema, influenciando na matematização e na obtenção do modelo matemático, contribuindo para uma visão holística da situação (Figura 4).

Figura 4: Resolução elaborada pelo grupo G3



Fonte: registro escrito do grupo G3

O que se poderia caracterizar de modelo matemático nessa situação inclui o próprio desenho em que os estudantes, ao mesmo tempo que traçaram com riqueza de detalhes as informações descritas na situação, também incluíram informações matemáticas que eles foram conhecendo no decorrer da exploração do problema e das medições que realizaram na lateral (1). O traçado realizado pelo grupo associa-se a uma ideia de proporcionalidade, em que a linha seccionada possui 30cm e corresponde ao local que se pretende arborizar que equivale a 30m de comprimento. Além disso, os estudantes utilizaram

a mesma regra para representar a distância de 3m, necessária entre uma árvore e outra, que no desenho corresponde a 3cm.

A partir desse encaminhamento, o grupo G3 evidenciou que para a arborização da lateral (1) serão necessárias aproximadamente dez árvores. Os estudantes optaram pela espécie Flamboianzinho (ver Quadro 2) devido ao menor custo, estimado em duzentos e nove reais. Para avaliação do modelo matemático obtido, o grupo retomou as informações selecionadas da situação, refazendo a resolução.

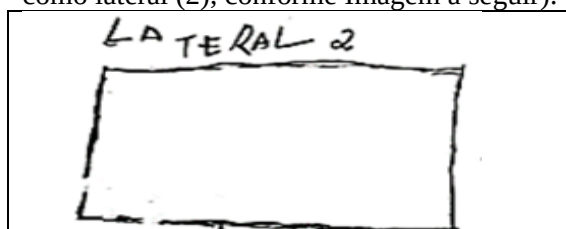
O desenho da Figura 4 indica uma conexão com a situação real em que os objetos representados – árvores e espaço a ser arborizado - incluem detalhes e semelhanças relativos às suas características físicas, o que segundo Rellensmann *et al.* (2022) caracteriza-o como desenho situacional. O desenho situacional, além de expressar detalhes da situação desenhada, também inclui informações matemáticas relevantes do que está sendo desenhado, como é o caso da medida do espaço e a distância necessária entre as árvores, nessa situação.

Os estudantes do grupo G5, por sua vez, iniciaram o processo de matematização discutindo estratégias que permitissem determinar a quantidade de árvores necessárias para a arborização da lateral (2). Dentre os encaminhamentos mencionados pelos estudantes, surgiu uma ideia de representação figural para a situação. No entanto, a estratégia não foi acolhida pelo grupo e os diálogos sinalizam que alguns estudantes não consideram o desenho uma boa estratégia para subsidiar a resolução do problema, conforme sinaliza o diálogo a seguir.

A5: Então, como a gente vai saber quantas árvores cabem nessa lateral?

A25: A gente tem essas informações (indica com dedo as informações anotadas no relatório do grupo).

A1: Vamos tentar fazer um desenho dessa parte, é como se fosse essa figura. (Estudante realiza o traçado de um esboço de um retângulo, representando como lateral (2), conforme Imagem a seguir).



A11: Não! Acho que não precisa.

A4: Podemos fazer a conta direto.

A1: E o que nós vamos calcular?

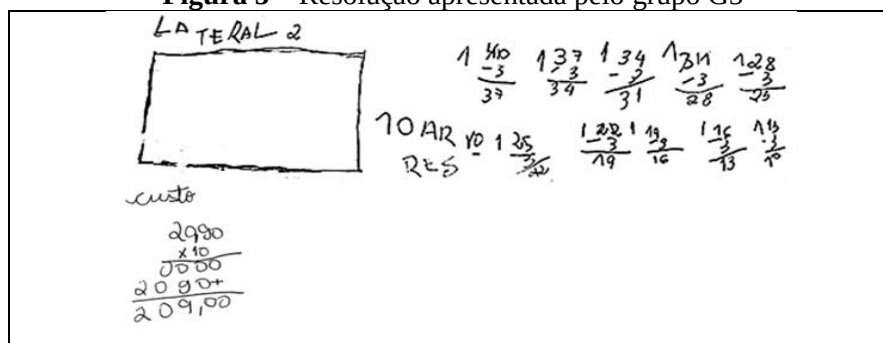
A25: Dá para pegar os 40m da lateral e fazer menos 3 que é a distância para plantar as árvores.

A5: Sim. Vamos diminuindo de 3 em 3 para saber a quantidade de árvores.

Neste momento, os estudantes do grupo G5 procuraram entender a situação e familiarizar-se com os aspectos relevantes, identificando a distância mínima necessária entre uma árvore e outra e a medida do espaço a ser arborizado. Entretanto, as relações identificadas e discutidas pelos estudantes não são especificadas no desenho, de modo que o traçado realizado pode servir como um indício para identificar uma possível dificuldade de compreensão dos estudantes, pois evidencia a tentativa de representar a estrutura do problema investigado.

A representação inicial realizada pelo grupo G5 é expressa por meio de traços grosseiros, em que os objetos relevantes, suas relações e informações numéricas não são incluídas no desenho. Considerando essas particularidades, o desenho construído se caracteriza como um esboço uma vez que os números e suas relações com a situação podem ser visualizados como objetos figurados expressos por linhas e figuras que se unem para representar algo (Bräuer; Leiss; Schukajlow, 2021). Os procedimentos dos estudantes associados a esse diálogo são apresentados na Figura 5.

Figura 5 – Resolução apresentada pelo grupo G5

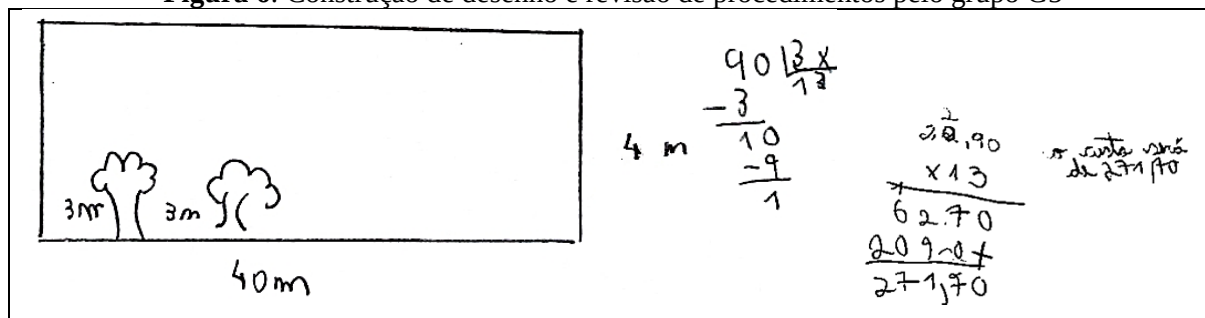


Fonte: registro escrito do G5

O modelo matemático nesse caso é resultado das operações aritméticas, em que os estudantes associam a medida do espaço a ser arborizado (40m) a uma subtração entre a distância necessária entre uma árvore e outra (3m). Nesse momento, os estudantes do grupo G5 evidenciaram que para arborização da lateral (2) seriam necessárias, aproximadamente, dez árvores. Os estudantes também optaram pela espécie Flamboianzinho para essa arborização. O grupo, entretanto, não foi preciso ao utilizar esse critério, de modo que associam apenas 10 árvores para a arborização do espaço, não se atendo que a partir da informação considerada de que uma árvore seria plantada a cada 3 metros e de acordo com as medições realizadas, um número maior de árvores poderia ser considerado para a arborização do espaço. Então, a professora realiza uma intervenção, fornecendo um *feedback* aos

estudantes quanto a ausência de informações relevantes no desenho e levanta os seguintes questionamentos: É possível visualizar a situação no desenho construído? O desenho construído pode ser complementado? É sugerido pela professora a construção de um desenho que represente a situação, visando determinar a quantidade de árvores necessárias para arborização do espaço, conforme Figura 6.

Figura 6: Construção de desenho e revisão de procedimentos pelo grupo G5



Fonte: Relatório do grupo G5

A orientação da professora permitiu com que os estudantes avançassem na matematização e utilizassem o desenho como um instrumento que guia a ressignificação, ou ainda, um instrumento de *feedback*, pois o processo recursivo orientado pelo desenho serviu de base para a compreensão e representação da situação. O desenho construído pelos estudantes do grupo G5, inclui tanto características matemáticas, como por exemplo, a representação de um retângulo para se referir ao espaço a ser arborizado e sua dimensão, quanto características situacionais, como a representação de árvores e a indicação de espaçamento entre elas. Considerando a assertiva de Rellensmann (2019) de que o desenho matemático deve se concentrar na estrutura matemática do problema, o desenho do grupo pode ser classificado como situacional.

O desenho construído pelo grupo G5 sinaliza uma fragilidade no processo de matematização, uma vez que os estudantes consideram uma distância inicial de 3m para o plantio da primeira árvore (Figura 6). Para matematização, fundamentaram-se em operações aritméticas de divisão entre a medida do espaço a ser arborizado (40m) e a distância necessária entre uma árvore e outra (3m) (Figura 6). Nesse momento, os estudantes evidenciaram que para arborização da lateral (2) seriam necessárias aproximadamente treze árvores, que para a espécie com menor custo, implica em um custo de R\$271,70.

Para socialização dos resultados, cada grupo escolheu um representante para apresentar os encaminhamentos realizados. A partir das resoluções apresentadas pelos grupos G3 e G5, evidenciou-se que para a arborização da lateral (1) e (2) serão necessárias cerca de

23 árvores e os estudantes de ambos os grupos fizeram a escolha das espécies levando em consideração o menor valor. Assim, os estudantes optaram por árvores do tipo Flamboianzinho, totalizando para a arborização das laterais, um custo aproximado de R\$480,70. Para validação dos resultados, a pedido da escola, o secretário do Meio Ambiente do município realizou uma avaliação dos espaços a serem arborizados na escola e evidenciou que para arborização das laterais (1) e (2) seriam necessárias 21 mudas, as quais foram disponibilizadas sem custos pela secretaria do Meio Ambiente do município. Logo, as resoluções encontradas foram consideradas satisfatórias. A figura a seguir evidencia os momentos de socialização dos resultados e validação.

Figura 7: Comunicação dos resultados e validação



Fonte: Dados da pesquisa

2.5.2 ATIVIDADE 2: CLIMATIZAÇÃO DA SALA DE AULA

A atividade *Climatização da sala de aula* foi desenvolvida a partir de uma queixa constante dos estudantes, relacionada a um problema enfrentado em sala de aula: a sensação térmica. Questionados pela professora sobre o que poderia influenciar no desconforto térmico enfrentado em sala de aula, os estudantes citaram alguns fatores, segundo suas experiências cotidianas, como: poucos ventiladores, falta de arborização, quantidade excessiva de estudantes, uniforme escolar, entre outros. Esse movimento gerou uma discussão entre a turma e os estudantes começaram a expor fatores que eles julgavam contribuir para a climatização da sala de aula, dentre eles, a instalação de aparelhos de ar-condicionado, conforme evidencia o diálogo a seguir.

A14: Poderia mudar o modelo do uniforme, fazer uma regata [...].

A9: Que nada! Só um ar condicionado para dar jeito.

A11: É verdade, quando a gente entra em um banco é fresquinho [...].

P: Vocês concordam que deveriam colocar um ar condicionado na sala?

A16: Sim! Mas deve ficar caro.

A7: A gente tinha que pesquisar o preço, daria até para fazer uma promoção para arrecadar o dinheiro.

Durante o diálogo, os estudantes manifestaram interesse em investigar como se daria a instalação de aparelhos de ar-condicionado na sala de aula. Para subsidiar a formulação do problema a ser investigado, os estudantes realizaram pesquisas no laboratório de informática (Figura 8) baseados na situação escolhida. A problemática estabelecida foi: Quantos aparelhos de ar-condicionado são necessários para a climatização da sala de aula? Qual será o custo para instalação destes aparelhos?

Figura 8: Estudantes no laboratório de informática



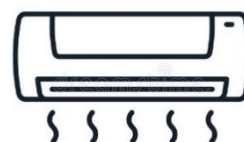
Fonte: Dados da pesquisa

Para complementar as informações coletadas no laboratório, os estudantes realizaram um orçamento com uma empresa da região a respeito de características dos aparelhos de ar-condicionado, como, modelos, valores e a potência de refrigeração. As informações coletadas constam no Quadro 3.

Quadro 3: Situação-problema climatização da sala de aula

Climatização da sala de aula

De acordo com o Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), novembro de 2023 foi marcado por uma intensa onda de calor que deixou um recorde histórico de temperatura no país. As altas temperaturas associadas a um ambiente sem climatização adequada podem ocasionar algumas consequências, como: irritabilidade, estresse, falta de concentração, cansaço e sonolência, esses fatores acabam interferindo no dia a dia de diversos estudantes no país. A curto prazo, o desconforto térmico ocasionado por altas temperaturas, pode ser mediado pela instalação de aparelhos de ar-condicionado, os quais contam com um sistema interno capaz de transformar o ar quente do ambiente externo em ar frio, proporcionando o bem-estar.



A climatização da sala de aula não envolve apenas comprar um ar-condicionado e instalar. É preciso fazer um estudo aprofundado sobre a quantidade de estudantes que a sala comporta e sua extensão, a fim escolher a potência adequada do aparelho que pode ser verificada pela quantidade de BTU (*British Thermal Unit*), quanto mais BTUs ele possuir, maior será sua potência de refrigeração.

Para calcular o BTU usado na hora de refrigerar um cômodo, devemos pensar no tamanho do ambiente, já que são necessários 600 BTUs por m². A quantidade de pessoas que frequentam o local também influenciará no resultado final. Recomenda-se somar 600 BTUs para cada pessoa. A escolha correta proporciona maior conforto para o ambiente, resfriamento mais rápido e eficiente, temperatura bem distribuída no espaço e economia com manutenções.

Considerando as altas temperaturas enfrentadas nos últimos dias e o interesse em climatizar a sala de aula, foram obtidos os dados:

Tabela 1: Preços aparelhos de ar-condicionado

Aparelho	Quantidade de BTUs	Custo (aparelho/instalação)
Split Lg Dual Inverter Voice	9.000	2.519,00
Split Samsung Digital Inverter Ultra	12.000	2.934,00
Ar-Condicionado Split HW Philco	18.000	3.699,00
Ar-Condicionado Split Inverter Samsung WindFree	22.000	5.599,00
Ar-condicionado Philco split	30.000	6.839,90

Fonte: empresa local

Vamos ao problema...

→ Quantos aparelhos de ar-condicionado são necessários para a climatização da sala de aula? Qual será o custo para instalação destes aparelhos?

Fonte: Relatório escrito dos estudantes

Após a coleta de informações e definição do problema, os estudantes em seus respectivos grupos se engajaram em discussões a respeito das características e especificidades da situação, buscando estabelecer critérios e estratégias para determinar a quantidade necessária de aparelhos de ar-condicionado para a climatização da sala de aula e o custo aproximado. Nesta atividade, nos referimos à resolução do Grupo 4 (G4), composto pelos estudantes: A12, A14, A15, A20, A24. O diálogo transcrito a seguir dá indícios de como se daria o encaminhamento da atividade pelo grupo.

A24: Eu acho que um aparelho é suficiente. Vamos pegar o mais barato.

A14: A quantidade de estudantes influencia, aqui é quase trinta! Colocar qualquer um não vai resolver.

A12: Sempre chega estudante novo, essa quantidade ainda pode aumentar até o fim do ano.

A20: Sim. A gente também vai precisar... – (aluna faz uma leitura das informações coletadas) – do tamanho da sala, podemos usar a trena.

A14: Daí, dos aparelhos que atenderem esses critérios, a gente escolhe o mais barato.

O diálogo sinaliza a intenção dos estudantes em selecionar e organizar as informações relevantes para o estudo da situação, em que, para além de uma estruturação das informações iniciais, houve uma busca por informações adicionais. Após realizarem as medidas na sala de aula com o auxílio de uma trena disponibilizada pela professora, um dos integrantes tomou a iniciativa de propor uma possibilidade para a matematização da situação, conforme sugere a transcrição de diálogo entre os estudantes do grupo.

A20: A gente tem isso aqui como a sala de aula, as filas, a mesa da professora

[...] – (estudante realiza o traçado de um desenho) – essa parede tem 7m, essa outra parede tem 5m.



A14: E para saber o tamanho total?

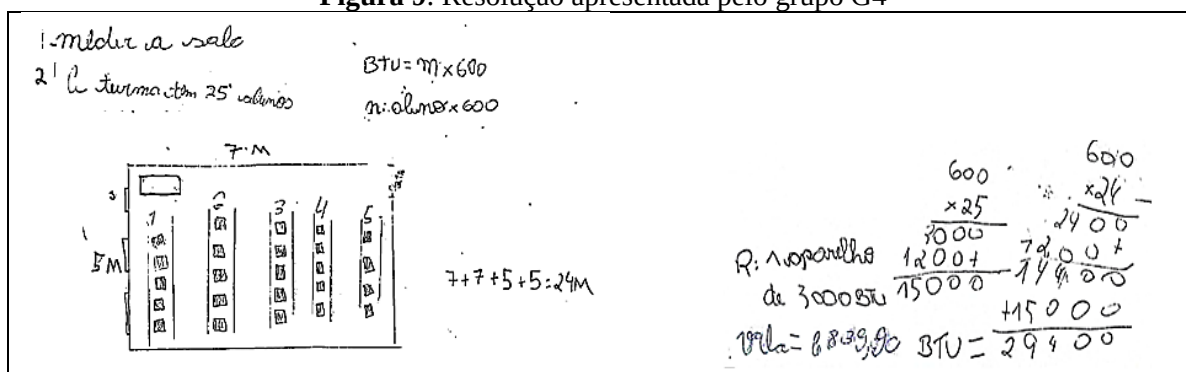
A20: [...] a gente faz aquela conta que já fizemos em outra aula, soma tudo.

A15: Aquela do contorno, né?

A14: Será que é o contorno mesmo?

O desenho elaborado pelo grupo G4 apresenta uma conexão com a situação investigada em que os objetos desenhados incluem detalhes e semelhanças referentes às suas características físicas, essas especificidades caracterizam como situacional (Rellensmann *et al.*, 2022). Além disso, durante a construção do desenho os estudantes discutem e especificam as relações entre as medidas coletadas e sua representação. Em uma primeira matematização, os estudantes fazem uma analogia do desenho construído com uma situação vivenciada em aulas anteriores, envolvendo o conceito de perímetro. Apesar de A14 expressar incerteza quanto ao encaminhamento sugerido, o grupo utiliza essa relação para uma abordagem inicial da situação em que o modelo matemático é fundamentado em operações aritméticas de adição e multiplicação, evidenciando a necessidade de instalação de um aparelho de ar-condicionado com a potência de 30.000 BTUs. Conforme Figura 9.

Figura 9: Resolução apresentada pelo grupo G4



Fonte: Relatório do grupo G4

Nesta primeira matematização, o grupo não se atentou para o fato de que a resolução do problema acionaria o conceito de área e a partir de alguns questionamentos feitos pela professora, o grupo percebeu que a solução apresentada para o problema não representava uma resposta satisfatória à questão e iniciaram uma nova discussão. Conforme transcrição a seguir.

P: Então, o que vocês fizeram?

A20: A gente anotou as informações e daí desenhou para entender melhor. Daí nós somamos todas as medidas da sala e usamos a informação dos 600 BTUs para fazer as contas.

P: Essa soma: $7m + 7m + 5m + 5m$, o que representa?

A20: É o contorno da sala.

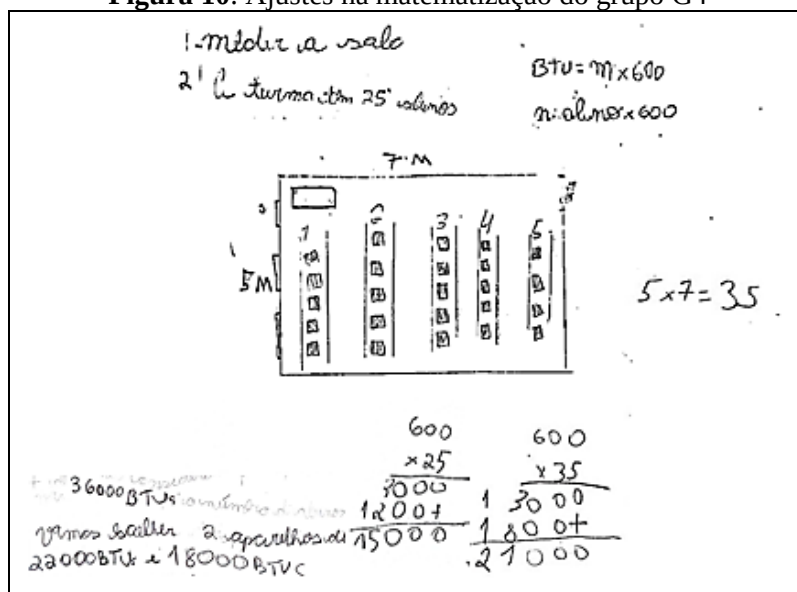
P: Esse contorno é o espaço que a gente ocupa na sala de aula?

A14: Ah... Eu acho que entendi. A gente fica sentado aqui – (referência ao Desenho, Figura 10) – é essa parte de dentro que vai ficar “fresquinha”, dentro da sala!

A20: Bem isso, deu para perceber que tem coisa errada, precisamos calcular toda essa parte (gestos indicando parte interna do desenho, Figura 9).

Nesta situação, o desenho se configurou como um instrumento de *feedback*, possibilitando a identificação e correção de equívocos cometidos na matematização da situação. A partir dos ajustes realizados no modelo matemático, os estudantes evidenciaram que para a climatização da sala de aula seria necessário um aparelho de ar-condicionado com a potência aproximada de 36.000 BTUs (Figura 10).

Figura 10: Ajustes na matematização do grupo G4



Fonte: relatório do grupo G4

Considerando as hipóteses assumidas pelo grupo: H1: a potência de refrigeração do aparelho deverá ser acima da quantidade mínima necessária, pois o número de estudantes poderá aumentar no decorrer do ano letivo; H2: a escolha do aparelho levará em consideração o atendimento das demandas da turma e o menor custo. Os estudantes

evidenciaram a necessidade de dois aparelhos de ar-condicionado com potências de 22.000 e 18.000 BTUs em que o custo aproximado para compra e instalação será de 9.298 reais.

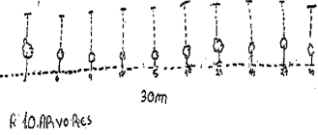
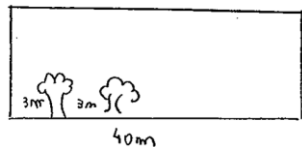
Para socialização dos resultados, os grupos apresentaram os encaminhamentos realizados no desenvolvimento da atividade. A validação dos resultados ocorreu mediante um orçamento disponibilizado pela empresa em que parte dos dados foram coletados, por meio de uma visita realizada por técnicos à escola em que sugeriram a instalação de dois aparelhos de ar-condicionado, sendo um de 30.000 BTUs e o outro 9.000 Btus com custo aproximado de 9.358,90 reais. A partir dos resultados obtidos, os estudantes organizaram vendas de rifas, doces, salgados e um bazar de roupas para contribuir com a instalação dos aparelhos.

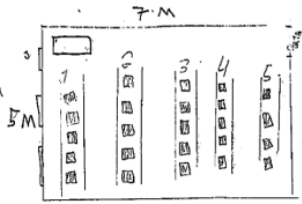
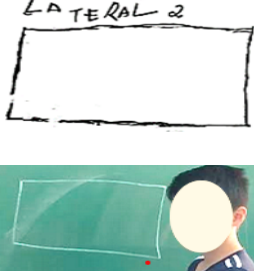
2.6 DISCUSSÃO E RESULTADOS

Para deliberar sobre como os desenhos colaboram para o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, dirigimos nossa atenção aos desenhos elaborados, sua classificação e sua relação com as ações dos estudantes nas atividades de modelagem matemática.

Considerando esse movimento, a partir do agrupamento das ações e discursos dos estudantes, observamos algumas características que se mostraram comuns ou semelhantes, em relação ao uso de desenhos no desenvolvimento das atividades (Quadro 4).

Quadro 4: Elementos relativos as influências do uso de desenhos no desenvolvimento das atividades

Indicativos do uso do desenho nas atividades de modelagem matemática (Excertos de diálogos)	Classificação do desenho (esboço, matemático, situacional)	Ações dos estudantes nas atividades de modelagem matemática	Colaboração para o desenvolvimento da atividade
<i>Arborização da Escola</i> A21: Vamos simular como se fosse o espaço aqui no papel. A18: Nessa parte de dentro as árvores serão plantadas. Dá para a gente ir medindo a distância entre uma e outra.	Desenho situacional (espontâneo) 	Os estudantes construíram desenhos que retratam objetos com detalhes e semelhanças. Além disso, representaram informações e relações relevantes para a resolução do problema.	Os desenhos apoiaram a familiarização com o tema, a compreensão e representação da situação, a matematização, a formulação do modelo matemático, a interpretação dos resultados, a retomada de
<i>Arborização da Escola</i> A25: Tem que colocar como se fosse as árvores aqui [...]. A1: Está faltando o espaço entre uma e outra (se referindo às árvores).	Desenho situacional (motivado pela intervenção da professora) 		

<i>Climatização da Sala de Aula</i> A20: A gente tem isso aqui como a sala de aula – (traçado de um desenho para simular a situação). A14: A gente fica sentado aqui – (referência ao desenho). A20: [...] precisamos calcular toda essa parte (gestos indicando parte interna do desenho).	Desenho Situacional (espontâneo) 		processos e correção de equívocos e possibilitou uma visão holística da situação.
<i>Arborização da Escola</i> A1: Vamos tentar fazer um desenho dessa parte, é como se fosse essa figura [...]. A21: A gente tentou fazer uma simulação assim [...] (construção de desenho na lousa).	Esboços (espontâneos) 	Os esboços traçados sinalizam uma tentativa de simplificar a situação, mas os objetos e relações não são especificadas. No desenvolvimento da atividade seu uso se deu como um instrumento de <i>feedback</i> que guia a ressignificação, apoiando a retomada da situação.	Os esboços colaboraram para a simplificação do espaço real, para a avaliação da resposta formulada e a retomada da situação.
<i>Climatização da Sala de Aula</i> A20: A sala de aula é como se fosse isso (referência ao desenho). A14: Só depois que a gente percebeu que precisava calcular essa parte de dentro (indicação no esboço).	Esboço (espontâneo) 	Os estudantes construíram esboços como recurso para apoiar a explicação de ideias e encaminhamentos na socialização dos resultados.	O esboço colaborou com a explicação de procedimentos e escolhas realizadas no desenvolvimento da atividade.

Fonte: dados da pesquisa

No desenvolvimento das duas atividades de modelagem matemática, os estudantes produziram desenhos, ora espontâneos, ora motivados pela intervenção da professora, com o objetivo de representar a situação e compreender aspectos matemáticos que até então estavam despercebidos. Os dados produzidos fornecem indícios de que os desenhos foram a estratégia que permitiu aos estudantes compreender a situação e encontrar meios de resolver o problema.

O processo de construção de desenhos, inicialmente, se deu por meio de leituras exploratórias das informações fornecidas e coletadas sobre a situação. Em seguida, os estudantes selecionaram as informações julgadas importantes para a resolução do problema e organizaram essas informações na folha de resolução. Com a seleção e organização destas informações, buscaram estabelecer relações por meio de uma estruturação. A partir da estruturação, procuraram compreender a situação fazendo algumas aproximações ou idealizações sobre o fenômeno investigado, por meio de relações com seus conhecimentos

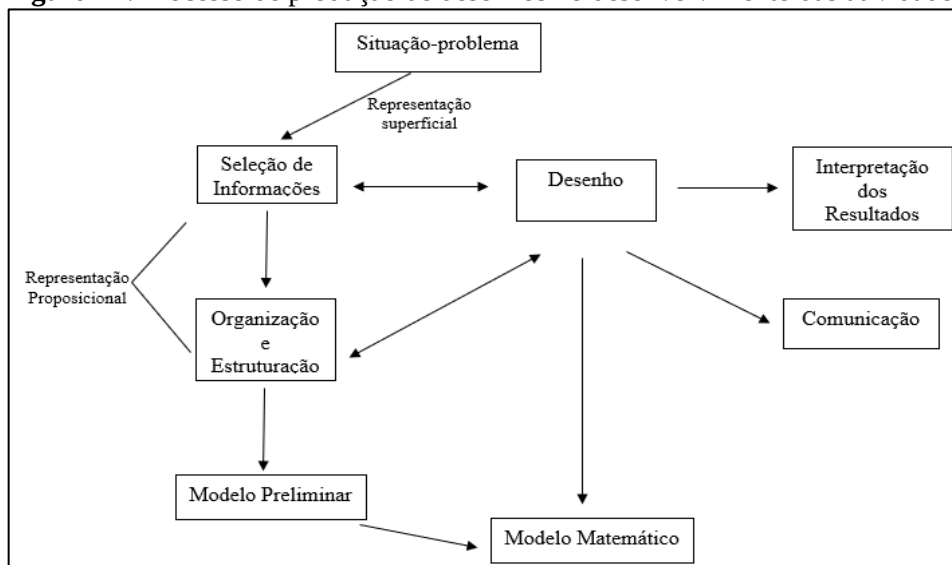
prévios, chegando ao que Van Meter e Firetto (2013) denominam de modelo preliminar (mental) da situação. Esse movimento, em certa medida, serviu como pano de fundo para a iniciativa de representar e explicar a situação por meio da construção de desenhos, apoiando a interação com a situação, a matematização e formulação do modelo matemático, a interpretação e comunicação de resultados.

O traçado de desenhos no desenvolvimento das duas atividades de modelagem matemática sinaliza uma mobilização do conhecimento estratégico. De fato, pois os estudantes identificaram a estratégia de desenho como adequada para as demandas da tarefa, aplicaram-na em sintonia com a estrutura da atividade, incluindo a indicação de relações numéricas relevantes e, utilizaram o desenho como meio de favorecer a resolução do problema.

Os desenhos produzidos colaboraram para a compreensão da situação, a matematização e obtenção do modelo matemático, com a interpretação dos resultados e com a explicação de procedimentos e escolhas realizadas no desenvolvimento da atividade. Assim, os desenhos configuram-se como ferramenta para compreensão, para avançar na matematização, para avaliação e para comunicação. Além disso, a intervenção da professora contribuiu com a efetividade de uso do desenho, o que segundo os autores, fortalece o repertório de conhecimento dos estudantes, na medida em que os direcionou a examinar o desenho produzido e utilizá-lo como instrumento de *feedback* para retomar etapas, definir novos encaminhamentos e refinar o modelo matemático produzido.

A análise da resposta obtida constituiu um processo avaliativo no qual o desenho foi utilizado como uma ferramenta de avaliação do próprio processo de resolução. Os estudantes compararam características da situação de estudo com os desenhos produzidos, identificando imprecisões tanto em relação aos procedimentos matemáticos, quanto em relação à representação construída para a situação.

Os indicativos dos processos subjacentes à construção de um desenho, parecem estar em sintonia com o modelo proposto por Van Meter e Firetto (2013). No desenvolvimento das atividades de modelagem matemática foram evidenciados processos cognitivos associados a seleção de informações relevantes para a resolução do problema, a organização e estruturação destas informações e a compreensão da situação em estudo. A produção de desenhos para representar a estrutura do problema investigado, nas duas atividades de modelagem matemática, permitiu aos estudantes encontrar meios de obter um modelo matemático, interpretar e comunicar os resultados, conforme indica a Figura 11.

Figura 11: Processo de produção de desenhos no desenvolvimento das atividades

Fonte: as autoras

2.7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a finalidade de investigar como o uso do desenho colabora para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, analisamos duas atividades de modelagem matemática desenvolvidas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental.

Os dados que subsidiam nossas discussões nos permitem inferir que, os desenhos produzidos colaboraram e incrementaram as ações dos estudantes no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, permitindo com que eles encontrassem meios de resolver o problema. O que se pode caracterizar de modelo matemático nessa situação inclui o próprio desenho. Todos os grupos produziram desenhos com o objetivo de representar a situação e compreender aspectos matemáticos que até então estavam despercebidos.

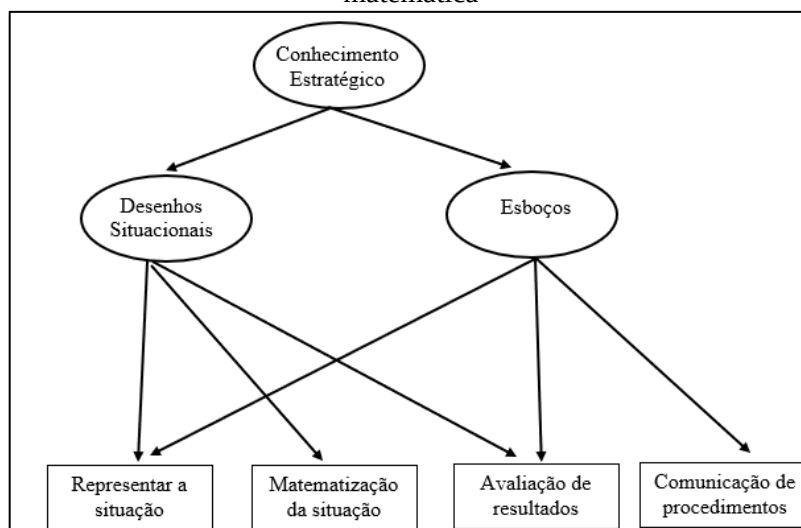
No desenvolvimento das duas atividades de modelagem matemática não foi identificado a construção de desenhos que expressassem a sistematização de conceitos matemáticos relevantes para resolver o problema, de modo que os desenhos produzidos, a partir de suas características, foram classificados em situacionais e esboços. Nesta perspectiva, os desenhos situacionais retrataram com detalhes e semelhanças a situação de estudo, em que os objetos foram desenhados de acordo com sua aparência física (Rellensmann; Schukajlow; Leopold, 2016). Estes desenhos colaboraram com o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, favorecendo a compreensão do

problema, a matematização da situação, a interpretação de resultados e retomada de etapas necessárias para o aperfeiçoamento do modelo matemático.

Por sua vez, o desenho como esboço representa uma visão geral da situação investigada, não expressando riqueza de detalhes (Rellensmann, 2019). Os esboços traçados pelos estudantes não incluíram informações numéricas e relações matemáticas relevantes para a resolução do problema. Essas particularidades, de acordo com Rellensmann, (2019), podem justificar a possibilidade de pouca colaboração deste tipo de desenho na matematização da situação.

No desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, o uso do desenho se deu como um instrumento de *feedback* para avaliação e refinamento do modelo matemático, além de contribuir com a comunicação dos resultados. Além disso, o conhecimento estratégico orientou o processo de desenvolvimento das atividades, na medida em que os estudantes selecionaram a estratégia de desenho como a mais adequada para as demandas da situação, executaram em sintonia com a estrutura da atividade, incluindo características úteis para a resolução e utilizaram como meio de obter a resposta do problema. A colaboração dos desenhos situacionais e esboços produzidos no desenvolvimento das duas atividades se deu conforme indica a Figura 12.

Figura 12: Colaboração dos diferentes tipos de desenhos produzidos nas atividades de modelagem matemática



Fonte: as autoras

A investigação empreendida corrobora com evidências empíricas acerca da colaboração da produção de desenhos para o desenvolvimento de atividades de modelagem

matemática, sinalizando evidências de processos cognitivos na construção de desenhos para resolver problemas que emergem em atividades desta natureza.

Como se propõe no modelo de Van Meter e Firetto (2013), no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática foram evidenciados processos cognitivos que envolvem a seleção de informações relevantes da situação de estudo, a organização e estruturação destas informações, a compreensão da situação e a produção de desenhos para representar a estrutura do problema investigado. Além disso, a escolha dos estudantes pela estratégia de desenho como sendo a mais adequada para as demandas das atividades, a execução em sintonia com a estrutura do problema e seu uso eficiente, sinalizam uma mobilização do conhecimento estratégico no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, contribuindo com evidências acerca do que Rellensmann, Schukajlow e Leopold (2019) denominam como complexas relações, entre o conhecimento estratégico, o uso de desenhos e atividades de modelagem matemática.

Há de se considerar que, a intervenção do professor pode contribuir com a efetividade de uso do desenho, na medida em que uma intervenção pode direcionar os estudantes a examinar o desenho produzido e utilizá-lo como instrumento de *feedback* para avaliação e refinamento do modelo matemático. Entretanto, Rellensmann (2019), considera que nem sempre a intervenção do professor proporciona uma efetividade no uso da estratégia e a resolução bem sucedida da tarefa, pois o pedido para fazer e/ou complementar um desenho pode não ser concretizado ou até mesmo, não surtir efeito. Desta forma, estudos futuros podem investigar como estudantes de diferentes níveis de escolaridade implementam a solicitação de fazer um desenho para resolver um problema em atividades de modelagem matemática e sob quais condições essa solicitação direciona a uma solução bem sucedida da tarefa.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA; L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, v. 50, n. 1-2, p. 19-30, 2018.

ALMEIDA, L. M. W.; CASTRO, E.V. Metacognitive Strategies in Mathematical Modelling Activities: Structuring an Identification Instrument. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 12, n. 3, p. 210-228, 2023.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; Semiótica e as ações cognitivas dos estudantes em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre os modos de inferência. *Ciência & Educação*, v. 18, n. 3, p. 623-642, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Editora Contexto, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRÄUER, V.; LEISS, D.; STANISLAW, S. Skizzen zeichnen zu Modellierungsaufgaben – Eine Analyse themenspezifischer Differenzen einer Visualisierungsstrategie beim mathematischen modellieren. *Journal für Mathematik-Didaktik*, v. 42, n. 2, p. 491-523, 2021.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: CHO, S. J. (Ed), **The Proceedings of the 12th Internacional Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes**. New York: Springer, p. 73-96, 2015.

BORROMEO FERRI, R. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education**. Springer, 2018.

BORKOWSKI, J. G.; CHAN, L. K.; MUTHUKRISHNA, N. A process-oriented model of metacognition: Links between motivation and executive functioning. In G. Schraw & J. C. Impara (Eds.), **Issues in the measurement of metacognition**. University of Nebraska Press, 2000.

CASTRO, E. M. V.; ALMEIDA, L. M. W. The Individual and the Collaborative Nature of Metacognitive Strategies and Their Unfoldings for Mathematical Modelling. *Acta Scientiae*, v. 25, n. 3, p. 1-25, 2023.

CORREIA, N. N. G. **Mapeamento da percepção do sistema metacognitivo na aprendizagem em Física**: um estudo dos relatos de estudantes do Ensino Médio. 191fls. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2021.

ENGLISH, L. Mathematical modelling with Young learners. In: LAMON, S. J.; PARKER, W. A.; HOUSTON, S. K. (Eds.). **Mathematical Modelling**: a way of life. Chichester: Horwood Publishing, p. 3-18, 2003.

ENGLISH, L. D. Developing early foundations through modeling with data. In: HIRSCH, C. (Ed). **Annual perspectives in mathematics educations**: Mathematical Modeling Mathematics. Reston: NCTM - National Council of Teachers of Mathematics, 2016. p. 187-195.

FLAVELL, J. H. Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive developmental inquiry. *American Psychologist*, v. 34, p. 906–911, 1979.

Galbraith, P. Modelling, education, and the epistemic fallacy. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.), **Mathematical Modelling in Education Research and Practice: cultural, social and cognitive influences**. New York: Springer, p. 339-348, 2015.

MAYRING, P. **Qualitative content analysis: theoretical foundation basic procedures and software solution**. Klagenfurt, p. 6-136, 2014.

MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 9, n. 2, p. 191-211, 2003.

RELLENSMANN, J. Selbst erstellte Skizzen beim mathematischen Modellieren: Ergebnisse einer empirischen Untersuchung. **Springer Spektrum**, 2019.

RELLENSMANN, J.; SCHUKAJLOW, S.; LEOPOLD, C. Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. **ZDM**, 2016.

RELLENSMANN, J.; SCHUKAJLOW, S.; LEOPOLD, C. Measuring and investigating strategic knowledge about drawing to solve geometry modelling problems. **ZDM**, v. 52, p. 97–110, 2019.

RELLENSMANN, J. SCHUKAJLOW, S.; BLOMBERG, J. LEOPOLD, C. Effects of drawing instructions and strategic knowledge on mathematical modeling performance: Mediated by the use of the drawing strategy. **Wiley**, v. 36, p. 402-417, 2022.

RICHT, L. A.; RICHT, A. O Modelo de Barras de Singapura na Resolução de Problemas Aritméticos e Algébricos. **Bolema**, Rio Claro, v. 36, n. 73, p. 697-727, 2022.

SILVA, V. S.; KLÜBER, T. E. Modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma investigação impenetrável. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 6, n. 2, p. 228-249, 2012.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) –Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

TORTOLA, E. ALMEIDA, L. M. W. A. Configuraciones de actividades de modelación matemática en la Educación Primaria: una construcción apoyada en el Análisis de Contenido. **Revista Paradigma**, v. XLIII, p. 329-355, maio 2022.

VAN METER, P.; FIRETTO, C. M. **Cognitive model of drawing construction. Learning through the construction of drawings**. In SCHRAW, G.; MCCRUDDEN, M. T.; ROBINSON, D. (Eds.), *Learning through visual displays*, p. 247–280, 2013.

VAN METER, P.; GARNER, J. The promise and practice of learner-generated drawing: literature review and synthesis. **Educational Psychology Review**, v. 17, n. 4, 285–325, 2005.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA COM TECNOLOGIA DIGITAL NO ENSINO FUNDAMENTAL: UM OLHAR PARA O USO ESTRATÉGICO DE DESENHOS

Resumo

O artigo tem como objetivo apresentar a investigação de como se dá a interlocução entre o desenho feito à mão e o uso de um *software* para construir desenhos e, em que aspectos esses recursos podem favorecer ou incrementar as ações dos estudantes em atividades de modelagem matemática. A base teórica refere-se à modelagem matemática associada à tecnologia digital, bem como a estratégia de construir um desenho. A pesquisa empírica refere-se a duas atividades de modelagem matemática desenvolvidas por estudantes de um 5º ano do Ensino Fundamental. A metodologia de pesquisa segue uma abordagem qualitativa, em que a análise dos dados foi inspirada pela análise de conteúdo. Os resultados sinalizam que a interlocução, entre desenhos traçados a mão e o uso de um *software* para construir desenhos, incrementa as ações dos estudantes em diferentes momentos do desenvolvimento da atividade, proporcionando meios para a visualização e compreensão do problema, para a matematização e construção de um modelo matemático, para a interpretação e comunicação dos resultados. Além disso, o uso do *software* no desenvolvimento das atividades possibilitou uma ampliação na classificação dos tipos de desenho, em que os desenhos digitais construídos com o GeoGebra permitiram abordar os objetos descritos na situação com precisão, proporcionando meios para que os estudantes ampliassem os efeitos de desenhos feitos com lápis e papel.

Palavras-chave: Desenho Estratégico. Tecnologia Digital. Modelagem Matemática.

3.1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática ao longo das últimas décadas tem sido discutida em diversos cenários de pesquisa e de práticas de sala de aula. Com a possibilidade de trazer à tona conexões entre a matemática e o mundo real, a modelagem matemática propicia aos estudantes mobilizar conceitos matemáticos (Almeida; Silva; Vertuan, 2013).

Quando se trata dos anos iniciais do Ensino Fundamental, entretanto, conforme Tortola (2016, p.268), a modelagem matemática tem particularidades, pois “envolve um modo de agir característico, com ações e encaminhamentos específicos, especialmente no que se refere à simbologia matemática e à produção de modelos matemáticos”. Particularmente, neste nível de escolaridade um modelo matemático pode ser representado por meio de esquemas, gráficos, diagramas, materiais manipuláveis, colagens, língua natural e desenhos (Doerr; English, 2003).

Considerando que o uso de desenhos nos anos iniciais constitui uma forma de linguagem que os estudantes utilizam para expressar ideias, pensamentos e para apoiar a resolução de problemas, Bräuer, Leiss e Stanislaw (2021) consideram que construir um desenho pode ser uma estratégia¹¹ poderosa, possibilitando ao estudante imaginar, representar, interpretar e estabelecer semelhanças com o problema investigado, podendo orientar e direcionar suas ações. No entanto, pesquisas sinalizam a necessidade de investigar fatores que possam complementar os desenhos manuais, visto que essa estratégia parece ter um efeito reduzido em algumas situações, pois os traçados com lápis e papel podem ser insuficientes e não colaborar para a visualização da situação (Rellensmann, 2019; Krawitz; Schukajlow, 2020).

Uma alternativa interessante que pode ampliar as possibilidades de ações e manipulações de estudantes, conforme sugerem Borba e Villarreal (2005), é o uso de tecnologias digitais. De acordo com os autores, a tecnologia digital pode ampliar as possibilidades de ações e manipulações por meio da construção de representações visuais que têm potencial para favorecer a visualização e a interpretação de informações.

Nesse contexto, dirigimos nossa atenção à possibilidade de articulação de desenhos traçados a mão com o uso de ferramentas da tecnologia digital, como é o caso de *softwares*, por exemplo, no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

¹¹ O termo estratégia pode ser caracterizado como a arte de aplicar com eficácia os recursos de que se dispõe ou de explorar condições favoráveis visando o alcance de determinado objetivo (Houaiss, 2009).

Particularmente, a investigação, é dirigida para esta ação de estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental em que se visa investigar: como se dá a interlocução entre o desenho feito à mão e o uso de um *software* para construir desenhos e, em que aspectos esses recursos podem favorecer ou incrementar as ações dos estudantes em atividades de modelagem matemática.

Com esta finalidade, a partir de um quadro teórico que inclui discussões acerca da modelagem matemática e o uso de ferramentas da tecnologia digital, o uso estratégico de desenhos e a visualização, dirigimos nossa atenção a duas atividades de modelagem matemática desenvolvidas por estudantes de um 5º ano do Ensino Fundamental.

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA E TECNOLOGIA DIGITAL

Em termos gerais, o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática envolve a identificação de uma situação da realidade, a busca de informações sobre essa situação e, a resolução, por meio da matemática de um problema associado a ela (Sousa; Tortola; Almeida, 2018). Essa resolução, em geral, se dá a partir da observação de características e de regularidades no comportamento do fenômeno investigado e a partir de uma estrutura matemática, denominada modelo matemático, que permite realizar generalizações, descrever, explicar e até mesmo fazer previsões relacionadas ao seu comportamento (Almeida; Tortola; Merli, 2012).

Para a construção de modelos matemáticos, os estudantes podem valer-se de variados métodos, procedimentos e conceitos matemáticos, muitas vezes, subsidiados pelo uso de recursos tecnológicos, visto que o crescente acesso a computadores, tablets, telefones celulares e afins, tem possibilitado que os estudantes estejam dinamicamente inseridos em uma cultura digital (Greefrath; Hertleif; Siller, 2018).

No contexto educacional, as tecnologias digitais têm sido abordadas em documentos oficiais, por exemplo, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)¹², como importantes aliadas para promover habilidades relacionadas a construção do conhecimento, a colaboração, o pensamento crítico, criativo e lógico, além de proporcionar múltiplas formas de resolução de problemas (Brasil, 2018). No que diz respeito aos anos iniciais, a BNCC destaca o uso das tecnologias digitais de duas maneiras distintas: a primeira delas é de forma transversal, ou seja, quando o objetivo de conhecimento é a própria tecnologia; a segunda

¹² Base Nacional Comum Curricular. Para maiores informações, consultar: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>

forma, a qual nos apoiaremos para o desenvolvimento deste artigo, é para subsidiar o desenvolvimento de atividades, sendo o suporte para promover a construção de conhecimentos e a aprendizagem dos estudantes.

No contexto de atividades de modelagem matemática, Galbraith e Fisher (2021, p. 201) consideram que a implementação das tecnologias digitais inclui diferentes aspectos e deve considerar especificidades do uso da ferramenta digital, bem como o conteúdo a ser aprendido por meio desse uso. Desse modo é possível “explorar o valor epistêmico da ferramenta digital como instrumento de ensino e de aprendizagem”. Além disso, os autores apontam que a tecnologia digital pode ser utilizada como serva do processo de ensino e aprendizagem, podendo fornecer opções estratégicas de resolução aos estudantes, ampliar e aprimorar os métodos de resolução manuais, contribuir para um avanço no desenvolvimento de modelos, além de favorecer a otimização de tempo.

Greefrath, Hertleif e Siller (2018), consideram que o uso da tecnologia digital não pode ser somente um apêndice às ações requeridas de estudantes no processo de modelagem matemática. Ao invés disso, ela pode ser incluída em diferentes momentos do desenvolvimento da atividade para apoiar processos como investigar, experimentar, visualizar, simular, calcular e controlar. Nesse sentido, a tecnologia digital pode ser utilizada para ampliar as possibilidades de ações e manipulações de estudantes e professores, fornecendo oportunidades para explorar situações por meio da construção de representações dinâmicas que podem ampliar e aprimorar os registros e representações estáticas dispostas no papel. Segundo Sousa e Tortola e Almeida (2018), a inclusão da tecnologia digital em atividades de modelagem matemática pode favorecer que estudantes construam conexões entre conceitos e procedimentos matemáticos, possibilitando que ideias abstratas presentes na situação de estudo se tornem mais tangíveis e concretas.

Ao associar atividades de modelagem matemática com as tecnologias digitais, muitas possibilidades podem ser exploradas por meio de *softwares* de geometria dinâmica em que o dinamismo pode ser atribuído às possibilidades de “utilizar, manipular, combinar, visualizar e construir virtualmente objetos geométricos, permitindo traçar novos caminhos de investigação” (Borba; Silva; Gadanidis, 2018, p.27).

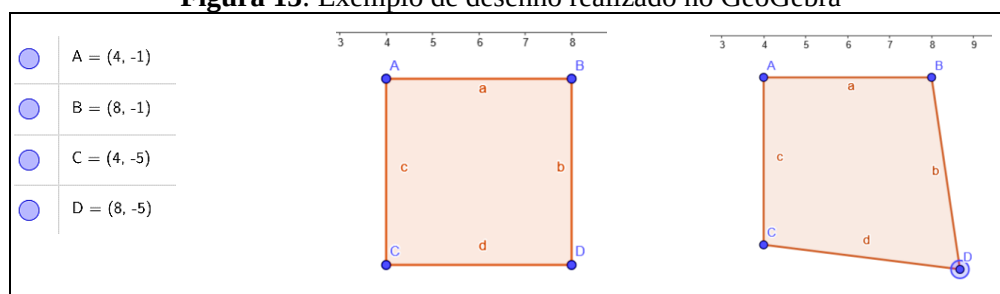
Seki, Martins e Almeida (2018), apontam que o uso desses *softwares* em sala de aula pode ampliar o repertório matemático dos estudantes, pois possibilita abordar uma situação-problema de múltiplas formas. Nesse sentido, Meier e Gravina (2012), destacam

o GeoGebra¹³ como um *software* de geometria dinâmica gratuito, que pode ser utilizado em todos os níveis de escolaridade para abordar conteúdos de geometria, cálculo, álgebra e estatística, a fim de favorecer um ambiente de exploração e investigação, quebrando limitações físicas da sala de aula e possibilitando a visualização e manipulação direta de objetos na tela do computador, permitindo que o estudante, a partir de uma análise da construção realizada, avalie se os resultados são úteis para entender a situação inicial.

Borba, Silva e Gadanidis (2018), consideram oportuna a diferenciação entre *desenho* e *construção* no desenvolvimento de atividades com o apoio do GeoGebra e, exemplificam essa distinção a partir da verificação de um teste, denominado pelos autores como *prova do arrastar*. Essa ferramenta leva em consideração que em uma construção, a figura sempre preserva suas propriedades fundamentais quando um dos elementos *móveis* que a compõe é arrastado. Segundo os autores, se ao ser arrastada no *software*, uma figura não preservar propriedades fundamentais, ela pode ser classificada como um desenho.

Vamos considerar um exemplo. A partir das ferramentas *ponto* e *polígono* disponibilizadas no GeoGebra, criou-se a figura de um quadrado. No entanto, ela não resiste à *prova do arrastar*, pois ao manipular um dos vértices, as propriedades do quadrado (quatro lados iguais e todos os ângulos retos) não se mantiveram, sendo portanto, classificada como um desenho.

Figura 13: Exemplo de desenho realizado no GeoGebra



Fonte: Adaptado Borba, Silva e Gadanidis (2018)

De acordo com Junior, Amaral e Souza (2018), os desenhos construídos com o apoio do GeoGebra podem aprimorar traçados realizados com lápis e papel, pois, de modo geral, os estudantes apresentam dificuldades em representar fidedignamente um objeto em uma superfície bidimensional e o *software* permite com que eles utilizem sua interface em mais de uma dimensão, favorecendo a visualização e a percepção de conceitos geométricos.

¹³ Ferramenta interativa e dinâmica que integra recursos de geometria, álgebra e cálculo, permitindo aos estudantes criar e manipular modelos matemáticos. Para maiores informações, consultar: <https://www.geogebra.org/about>

Ao se referir a noção de três dimensões que o GeoGebra propicia, Mendes (2020) sugere o uso do *software* como um recurso facilitador da visualização, porque possibilita a sobreposição de objetos e a visualização de representações em diferentes ângulos, ilustrando todas as dimensões de uma forma, favorecendo a exploração, a formulação de hipóteses, o monitoramento visual e a investigação, contribuindo para a construção do conhecimento matemático. De fato, Meier e Gravina (2012), mencionam que, o GeoGebra pode favorecer a elucidação de conceitos matemáticos por meio da construção de figuras que podem facilitar a visualização de procedimentos, possibilitando novas formas de entender e aprender matemática.

No contexto de atividades de modelagem matemática, particularmente, Carreira (2019), menciona o uso do GeoGebra como uma ferramenta da tecnologia digital que pode representar avanços na visualização da situação de estudo, proporcionando aos estudantes envolvimento com a situação por meio de representações dinâmicas que incentivam a interação entre aspectos empíricos e teóricos dos objetos em atividades de modelagem matemática. Assim, o uso do GeoGebra em atividades de modelagem matemática leva a vislumbrar, entre outras finalidades, uma possibilidade para a construção de desenhos.

3.3 SOBRE O USO DO DESENHO

Na literatura, o uso de desenhos é mencionado tanto como uma estratégia de aprendizagem, pois pode apoiar a seleção, organização e integração de informações relevantes de um texto (Van Meter; Firetto, 2013; Zhang; Fiorella, 2021), quanto como uma estratégia para resolver problemas, pois pode fornecer sugestões gerais que auxiliam o estudante a entender um problema e definir procedimentos em busca da solução (Reuter, 2016; Rellensmann, 2019).

Vale refletir, entretanto, sobre o que é um problema. Nosso entendimento a esse respeito vem pautado nas argumentações de Almeida, Tortola e Merli (2012). Segundo os autores, o termo problema pode ser entendido como uma situação em que o indivíduo deseja fazer algo, mas não possui um esquema a priori para sua resolução e não há procedimentos específicos previamente conhecidos ou soluções indicadas, em que o sujeito identifica qual é seu objetivo, mas não identifica meios para atingir esse objetivo. Neste contexto, pode emergir o uso de desenhos como estratégia que pode contribuir para atingir o objetivo da tarefa, ou seja, a resolução do problema.

Na resolução de um problema, o desenho corresponde a uma exteriorização de uma forma de imagem esboçada na mente em que o modelo mental da situação de estudo é transformado em uma representação visual externa desta situação, seja com auxílio de lápis e papel ou, em alguns casos, com um computador, a fim de apoiar a busca por uma solução (Johnson-Laird, 1980). Nesse sentido, Cox (1999) considera que o processo de construir um desenho envolve interações dinâmicas entre o modelo mental da situação e sua representação externalizada, a fim de combinar ambas as representações. De acordo com o autor, esse movimento pode apoiar a seleção, organização e sistematização de informações, relações e objetos descritos no fenômeno sob investigação, podendo favorecer a compreensão e a identificação de conceitos para a construção de um modelo matemático.

O uso estratégico de desenhos pode se dar de maneira consciente e planejada, exigindo uma reflexão acerca da estrutura e dos processos que devem ser envolvidos na sua realização, ou de forma espontânea e inconsciente em que o sujeito o utiliza de forma intuitiva. Em ambos os casos, o uso do desenho ativa aspectos cognitivos que podem incrementar a resolução de um problema. Neste sentido, ainda que o desenho seja provisório, e não ofereça garantia para um resultado efetivo, ele reflete os propósitos daquele que o utiliza como apoio para busca de uma solução para um problema (Rellensmann, 2019).

Estudos anteriores indicam que vários fatores parecem determinar a efetividade do uso de desenhos estratégicos. Rellensmann, Schukajlow e Leopold (2016), consideram que o sucesso da estratégia pode ser determinado pelo conhecimento e habilidades individuais de quem o utiliza, configurando o conhecimento estratégico como uma pré-condição necessária para o uso eficiente do desenho. De acordo com Flavell (1979), o conhecimento estratégico é um tipo de conhecimento metacognitivo que corresponde ao conhecimento adquirido ou que se pode adquirir a respeito de estratégias ou ações que são as mais efetivas para alcançar os objetivos de uma tarefa cognitiva. Este conhecimento inclui o repertório de conhecimentos do estudante em relação às estratégias de aprendizagem e resolução de problemas que ele pode utilizar para realizar determinada tarefa. Assim, ao desenvolver uma atividade, o estudante utiliza determinada estratégia de acordo com sua experiência pessoal e se uma estratégia específica for eficaz em um contexto, o estudante tende a utilizá-la em uma situação semelhante, fortalecendo seu repertório de conhecimentos (Borkowski; Chan; Muthukrishna, 2000).

O sucesso da ação estratégica de construir um desenho, também pode estar relacionado ao fator qualidade, conforme menciona Reuter (2016). Para o autor,

representações externas, como é o caso do desenho, devem gerar uma estrutura que represente a situação investigada, na medida que as características essenciais dessa situação estejam incluídas na representação bem como os elementos importantes, suas relações e informações numéricas relevantes estejam explicitadas e conectadas entre si. Desta forma, o desenho pode favorecer a compreensão da situação e a visualização de elementos-chave para a sua resolução, podendo auxiliar no reconhecimento de estruturas matemáticas. Este aspecto corrobora com os argumentos de Arcavi (2003, p. 216), que se refere ao desenho como um meio *para ver o invisível* em que os estudantes podem utilizá-lo para realizar inferências perceptíveis, ou até mesmo para obter uma solução direta, por exemplo, por meio da contagem de elementos no desenho ou por meio de medições, se o desenho apresentar uma escala.

Considerando a qualidade do desenho, Stylianou (2011), enfatiza que a estratégia pode ajudar os estudantes a construir um entendimento comum da abordagem do problema, em que pode servir de base para apresentar e discutir ideias de resolução no grupo de trabalho, além de contribuir para identificação de lacunas e correção de equívocos. No entanto, Leenaars, Joolingen e Bollen (2012) salientam que os recursos manuais, como lápis, papel e régua podem limitar a construção de um desenho em que a estratégia pode ter um efeito reduzido e até mesmo negativo em algumas situações, podendo levar a equívocos conceituais.

Neste contexto, Krawitz e Schukajlow (2020), sinalizam a necessidade de pesquisas que investigue fatores que possam complementar e propiciar o uso benéfico de desenhos construídos com lápis e papel. Assim, considerando as possibilidades de ampliação de ações e manipulações de estudantes proporcionada pela tecnologia digital, em particular, por meio de representações construídas com o apoio de *software*, destacamos a ferramenta de visualização ao abordar o desenho como estratégia de resolução de problemas em atividades de modelagem matemática.

3.4 SOBRE A VISUALIZAÇÃO

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a unidade temática Geometria se caracteriza como um conjunto de conhecimentos essenciais para a compreensão do espaço e das figuras que representam objetos do cotidiano em que o espaço que interessa é aquele com o qual os estudantes estão familiarizados. Portanto, nesta área de conhecimento, relacionar observações empíricas do mundo real a representações e associar essas representações a uma

atividade de matemática pode desenvolver o pensamento geométrico de estudantes (Brasil, 2018). Brito e Almeida (2021, p.8) consideram que o espaço em que os estudantes estão habituados inclui “o espaço real e físico, tal como vivenciamos em nosso mundo, mas inclui também o chamado espaço das representações, como a janela de um *software* geométrico ou uma folha de papel, por exemplo”.

Entretanto, no que diz respeito ao campo de conhecimento geométrico, pesquisas têm apontado para dificuldades enfrentadas por estudantes, tanto da educação básica, quanto do ensino superior, em atividades que envolvam a visualização de conceitos, propriedades e representações (Mendes, 2020; Settimy; Bairral, 2020). Nesse sentido, um aspecto que pode amenizar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes neste tipo de atividade, é o uso de *software* que conta com uma estrutura dinâmica capaz de proporcionar a construção de representações e a visualização de seus elementos e propriedades, tanto no espaço bidimensional quanto no tridimensional, possibilitando experiências diferentes daquelas obtidas com o uso de lápis e papel (Borba; Villarreal, 2005).

O termo *visualização*, de acordo com o dicionário Houaiss (2009), pode ser definido como “ato ou efeito de visualizar; capacidade de formar na mente imagens visuais de coisas que não estão à vista”. Contudo, diferentes definições para o termo parecem permear a literatura, de modo que as similaridades e diferenças encontradas nas várias definições fazem com que elas apresentem aspectos diferenciados. Neste sentido, Zimmermann e Cunningham, (1991), compreendem a visualização como o processo de formar imagens (mentais, com lápis e papel, ou com o auxílio da tecnologia digital), e utilizá-las com a finalidade de alcançar uma maior compreensão matemática.

Gutiérrez (1996), considera a visualização em Matemática como um tipo de raciocínio baseado no uso de elementos visuais ou espaciais, sejam mentais ou físicos, realizados para resolver problemas ou provar propriedades. O autor salienta que por meio da visualização, é possível que aspectos favoráveis ao desenvolvimento do pensamento geométrico sejam desenvolvidos. Nesse sentido, Hanson (1996), afirma que, a partir da visualização, espera-se que os recursos exibidos estimulem associações na mente do usuário que levará a novos *insights*, novas possibilidades, a formulação de hipóteses, permitindo uma maior abrangência do fenômeno sob investigação.

Borba e Villarreal (2005), sugerem que a visualização por meio de *softwares* proporciona ao estudante oportunidades de explorar ideias matemáticas, construir representações visuais, analisar exemplos e contraexemplos e, em seguida, obter o

conhecimento visual necessário para formulação de *insights* formais poderosos. No entanto, ela não deve ocorrer de maneira isolada, mas dentro de um contexto que também inclui representações numéricas e simbólicas de modo a complementar-se mutuamente e contribuir para uma compreensão aprofundada da situação. Esta perspectiva leva a vislumbrar uma articulação entre os recursos de lápis, papel e a visualização com o apoio do GeoGebra em uma atividade de modelagem matemática.

3.5 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Com o intuito de investigar como se dá a interlocução entre o desenho feito à mão e o uso de um *software* para construir desenhos e, em que aspectos esses recursos podem favorecer ou incrementar as ações dos estudantes em atividades de modelagem matemática, associamos ao quadro teórico o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática realizadas por estudantes do Ensino Fundamental.

Os dados que subsidiam nossas discussões consistem em registros escritos de estudantes, anotações em diário de campo, gravações de áudio, vídeo e entrevistas provenientes de duas atividades de modelagem matemática desenvolvidas em aulas regulares, ministradas pela professora em uma turma de vinte e cinco estudantes do 5º ano.

O processo analítico é pautado em uma abordagem qualitativa cuja natureza é descritiva e tem como característica principal a busca pela compreensão dos fenômenos (Moraes, 2003). Com esses preceitos, inspirou-se nos procedimentos metodológicos da análise qualitativa de conteúdo, que consiste em um conjunto de técnicas de análise guiada por etapas às quais podem ser adaptadas em conformidade com os objetivos de pesquisa, (Mayring, 2014).

Nesse contexto, primeiramente, os dados que compõe o material de análise (áudios, vídeos, entrevistas, etc.), foram transcritos. A partir da transcrição, definiu-se a direção da análise em relação ao objetivo pretendido, que consiste em identificar elementos que diretamente interessam do material. Por fim, utilizou-se a técnica explicativa para análise dos dados, que consiste em usar a literatura para esclarecer, explicar e interpretar o que foi observado e explorado no material de análise.

3.6 AS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

A discussão relativa ao uso de desenhos é fundamentada em duas atividades de modelagem matemática desenvolvidas por vinte e cinco estudantes de um 5º ano do Ensino Fundamental, organizados em cinco grupos. Considerando a extensão do texto e que de certo modo, os encaminhamentos e registros produzidos pelos estudantes são representantes dos encaminhamentos dados à resolução pelos demais grupos, nos referimos às resoluções de Grupo 1 (G1) composto pelos estudantes A2, A3, A8, A13, A17 e Grupo 2 (G2) que inclui A6, A7, A9, A16, A19, concernentes a atividade de temática *Reciclagem de Garrafas PET*; Grupo 3 (G3) com os estudantes A10, A18, A21, A22, A23 e Grupo 4 (G4) composto por A12, A14, A15, A20, A24, relativas à atividade cujo tema é *Beleza das Flores*.

A atividade com a temática *Reciclagem de Garrafas PET* foi desenvolvida a partir de um tema proposto pelos estudantes, levando em consideração a realidade de muitos deles uma vez que familiares trabalham na separação de materiais recicláveis. A motivação dos estudantes também atende uma preocupação vivenciada pelos colaboradores da Associação de Catadores e Separadores de Materiais Recicláveis de Assaí (ASCAMARA): o pouco espaço disponível para o armazenamento dos materiais e a quantidade elevada de garrafas plásticas recebidas.

Considerando essas particularidades, as problemáticas estabelecidas foram: o espaço de armazenamento na unidade de separação de matérias recicláveis de nosso município comporta quantos fardos de garrafas PET compactadas? Em quanto tempo não haverá espaço disponível para o armazenamento desses fardos? A coleta de dados ocorreu em horário regular de aula, durante uma visita realizada à Associação. Durante a visita, um dos colaboradores acompanhou, apresentando a rotina de trabalho, os maquinários e os espaços físicos. O quadro a seguir apresenta a síntese do desenvolvimento da atividade como realizado na sala de aula pelos estudantes do grupo G2.

Quadro 5 – Síntese da atividade *Reciclagem de Garrafas PET*

Informações relativas à entrevista

Colaborador: Nós recebemos materiais às terças, quartas, quintas e sextas.

A7: Que tipo de material vocês mais recebem?

Colaborador: Garrafas PET, cada dia de coleta chegam em média 2.250. Vai chegar um momento que não teremos espaço suficiente e elas serão destinadas ao aterro sanitário.

A16: Por quê? Vai prejudicar o meio ambiente!

Colaborador: Porque todo dia chega esse “montão” de garrafas aqui e a empresa que compra o material faz o recolhimento uma vez por mês.

A7: A gente pode descobrir quantos fardos dá para ficar guardado aqui e com isso fazer uma palestra na escola para reduzir o consumo de refrigerante ou ir na prefeitura falar com o prefeito.

P: Ótimo! E como podemos obter essas informações?

A6: A gente pode usar uma trena [...]



Problema

O espaço de armazenamento na unidade de separação de nosso município comporta quantos fardos de garrafas PET compactadas? Em quanto tempo não haverá espaço disponível para o armazenamento desses fardos?

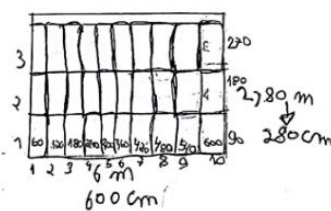
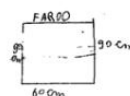
Dados selecionados

- São necessárias 1.000 garrafas PET para se produzir um fardo.
- Dimensões dos fardos: 60cm de comprimento, 35cm de largura e 90cm de altura.



Matematização e Resolução

ANALISANDO OS FARDOS
6m de comprimento
3m de largura
2,80m de altura
FARDO
60cm de comprimento
35cm de largura
90cm de altura



$$10 \times 3 = 30$$

No total cabem 30 fardos

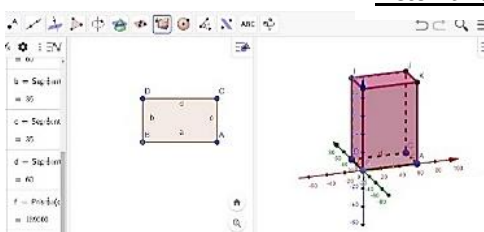
R: No total cabem 30 fardos.

Avaliando o Modelo

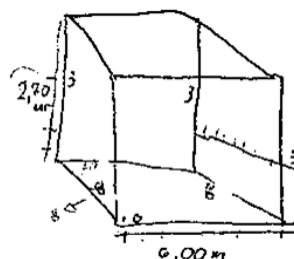
A16: Só 30 fardos? Isso está estranho.

A6: Tem alguma coisa errada [...].

Retomando Etapas com o GeoGebra



$$10 \text{ fardos} = \frac{8}{80} \times 10$$



COMO O ESPAÇO COMporta 3 blocos
EMPILHADOS
 $\frac{8}{140}$

R: CABEM NO ESPAÇO o total de 240 fardos

R: Cabe no espaço o total de 240 fardos. Em 60 meses não haverá espaço suficiente para armazenamento.

Comunicação e Implementação

Os estudantes realizaram uma visita à prefeitura a fim de que houvesse uma intervenção da administração pública nessa situação. Para validar os resultados, os estudantes realizaram uma nova visita à Associação acompanhados de um engenheiro ambiental em que os resultados obtidos foram confirmados.

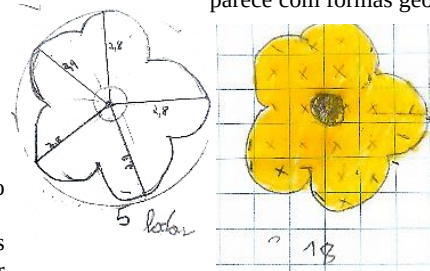
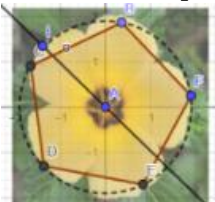
Fonte: Dados da pesquisa

Os estudantes concluíram que a Associação tem espaço para o armazenamento de duzentos e quarenta fardos de garrafas PET compactadas. Se a quantidade de garrafas recebidas se mantiver no ritmo atual em, aproximadamente, sessenta meses não haverá espaço suficiente para o armazenamento do material, podendo ocasionar problemas ambientais. Envolvidos com a temática e preocupados com os impactos ambientais que o descarte de garrafas PET no aterro sanitário poderia ocasionar, os estudantes realizaram uma

visita à prefeitura a fim de que houvesse uma intervenção da administração pública nessa situação.

A segunda atividade teve como tema *Beleza das Flores*. Consideramos aqui as resoluções do Grupo 3 (G3) (A10, A18, A21, A22) A23 e Grupo 4 (G4) (A12, A14, A15, A20, A24). Seu desenvolvimento se deu a partir de um Festival da Primavera promovido pela escola, em que os estudantes participam de um desfile com adereços e flores que remetem a estação. O festival causou uma inquietação na turma, pois o critério de escolha do vencedor seria a beleza. Nesse contexto, os estudantes indagaram: é possível medir a beleza de uma flor? A partir da problemática definida, cada grupo escolheu uma espécie, dentre as flores selecionadas para o desfile, e passaram a analisar características e aspectos que permitissem inferir um critério de beleza. O quadro a seguir apresenta a síntese do desenvolvimento da atividade realizado em sala de aula pelos estudantes do grupo G4.

Quadro 6: Síntese da atividade *Beleza das Flores*

<u>Informações</u> A Primavera é marcada pelo desabrochamento de uma variedade de flores: margaridas, rosas, girassóis, hortênsias, hibiscos, violetas, entre tantas outras, que desabrocham em uma variedade de cores e aromas. Com características distintas, algumas flores podem ser consideradas mais belas que outras. 	<u>Matematização e Resolução</u> P: Quais informações vocês têm sobre a flor escolhida pelo grupo? A20: A flor se chama Damiana é uma planta medicinal. P: As características dessa flor podem ser relacionadas com a matemática? A14: Sim, ela tem cinco pétalas e nós podemos medir o comprimento. A20: Vamos fazer um desenho! O formato se parece com formas geométricas.
<u>Problema Formulado</u> É possível medir a beleza de uma flor? <u>Hipóteses e variáveis</u> • O formato das flores pode ser associado a formas geométricas. <u>Avaliando o Modelo</u> A14: A gente está com dúvidas se está certo porque o desenho ficou um pouquinho torto. A20: Não deu para contar todos os quadradinhos da área, o desenho tinha que ser	 R: A flor tem as pétalas com 2,8cm, parecidas com as formas geométricas de círculo e pentágono, com área igual a 18cm^2
<u>Retomando Etapas com o GeoGebra</u>  A flor damiana possui duas partes iguais quando dividida por uma linha, formando uma simetria bilateral. Suas pétalas possuem medidas semelhantes entre si, 2 e 2,3cm. Com ajuda do GeoGebra construímos um pentágono, a área total é 11,34.	<u>Comunicação e Implementação</u> A partir de pesquisas sobre a simetria das flores, os estudantes constataram que a beleza de uma flor pode estar relacionada com suas proporções harmoniosas que dizem respeito a precisão do tamanho, formas e posição de suas pétalas.
R: A flor Domiana possui duas partes iguais quando dividida por uma linha, formando uma simetria bilateral. Suas pétalas possuem medidas semelhantes entre 2 e 2,3cm. Com ajuda do GeoGebra construímos um pentágono, a área total é 11,34.	

Fonte: Dados da pesquisa

Os estudantes concluíram que a beleza de uma flor pode estar relacionada com sua simetria e proporções harmoniosas, que dizem respeito a precisão de suas pétalas, seu formato e elementos que a compõe. De fato, Critchlow (2011) pondera que, embora haja um encanto natural em toda flor, sua beleza está intimamente relacionada à sua simetria, às formas de suas pétalas e sua proporção, em que a simetria pode ser descrita como beleza resultante da proporção correta entre as partes de um todo, equilíbrio, congruência, harmonia.

3.7 O USO DO DESENHO NAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Para abarcar indícios que possam fundamentar como se dá a interlocução entre o desenho feito à mão e o uso de recursos tecnológicos e, em que aspectos ele favorece ou incrementa as ações dos estudantes em atividades de modelagem matemática, são analisados os desenhos construídos pelos estudantes no desenvolvimento das duas atividades de modelagem matemática, e os encaminhamentos dos estudantes nessa construção.

Na atividade *Reciclagem de Garrafas PET*, com a intenção de saber quantos fardos de garrafas compactadas podem ser armazenados na unidade de matérias recicláveis do município e em quanto tempo não haverá espaço disponível para o armazenamento, os estudantes do Grupo 1 (G1) iniciaram as discussões demonstrando dificuldades em estabelecer encaminhamentos para o desenvolvimento da atividade. Este aspecto pode ter sido ultrapassado com a iniciativa de representar a estrutura do problema por meio de um desenho, conforme indica o diálogo.

P: O que vocês fizeram?

A2: A gente estava com dúvidas e não sabia direito como começar, daí nós desenhamos

uma caixa, porque o formato do fardo é parecido[...].

P: Certo, esse fardo desenhado tem alguma relação com as informações da atividade?

A8: Sim, a gente quer saber quantos fardos desse cabem no espaço de armazenamento.

P: Então o que vocês podem fazer agora que já representaram o fardo?

A2: Hum... Não sei...

A8: E se a gente desenhasse o espaço que eles irão ocupar?

P: Isso vai ajudar a responder o problema?

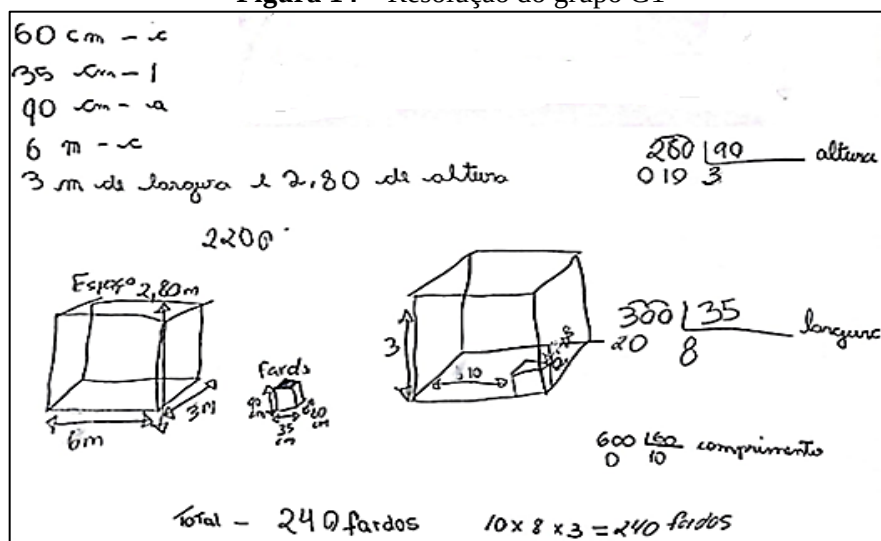
A8: Sim, acho que vai ficar mais fácil para a gente entender.

O diálogo indica que, visualizar o problema por meio de um desenho pode ajudar o estudante a lidar com possíveis dificuldades no que se refere ao estabelecimento de

encaminhamentos para solução de um problema, em consonância com o que sugere Rellensmann (2019).

De fato, os estudantes utilizaram o desenho como ferramenta de visualização no processo de resolução do problema. A estratégia possibilitou aos estudantes vislumbrar encaminhamentos que permitissem a matematização da situação, associando a estrutura do problema a ideia de volume. O desenho feito pelo grupo G1 (Figura 15), expressa as informações relevantes da situação (fardo de garrafas PET e espaço de armazenamento), representados por meio de traçados semelhante a paralelepípedos. Além disso, no desenho foram indicadas informações numéricas relativas as dimensões dos fardos de garrafas PET (60cm de comprimento, 35cm de largura e 90cm de altura) e do espaço de armazenamento (6m de comprimento, 3m de largura, 2,80m de altura), possibilitando ao grupo identificar a necessidade de padronização entre as unidades de medidas destes elementos. Considerando que o desenho representa adequadamente a estrutura e os elementos descritos no problema (Figura15), este desenho apresenta alta qualidade (Reuter, 2016).

Figura 14 – Resolução do grupo G1



Fonte: Relatório do grupo G1

Os cálculos realizados indicam que o espaço de armazenamento comporta 240 fardos de garrafas PET compactadas. A partir da resposta informada pelos estudantes do grupo G1, eles iniciaram o encaminhamento da segunda questão, que consiste em determinar em quanto tempo não haverá espaço suficiente para o armazenamento de fardos de garrafas PET na Associação. Para isso, o grupo considerou as informações disponibilizadas pelo colaborador durante a visita à Associação (Quadro 7).

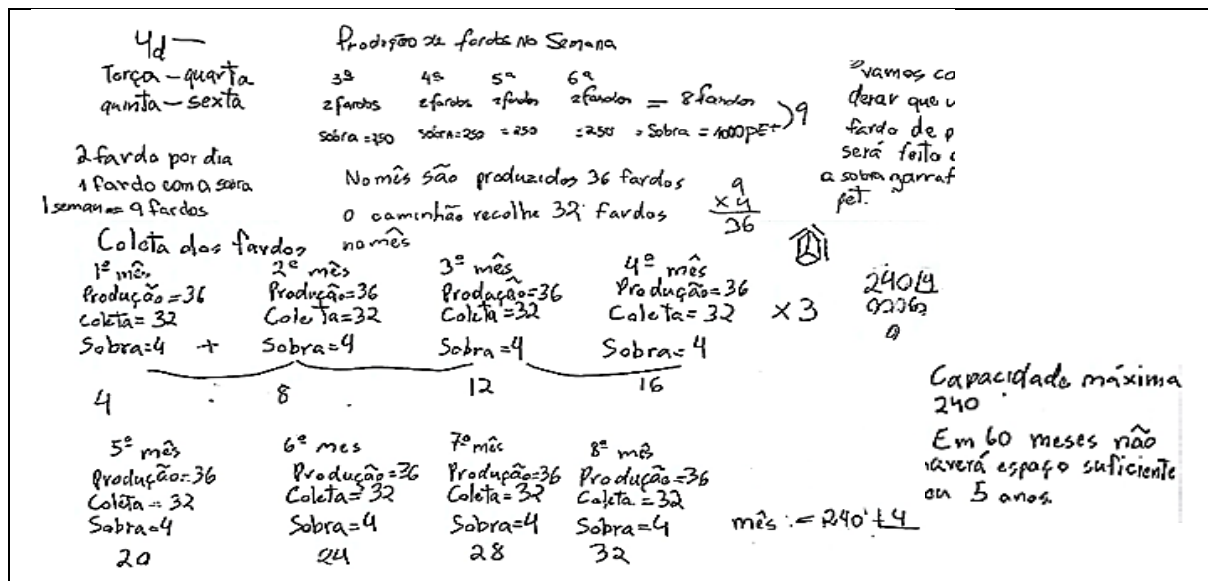
Quadro 7: Informações disponibilizadas pelo colaboradores durante a visita à Associação

Dias da semana que a Associação recebe a coleta de materiais recicláveis	Terças, quartas, quintas e sextas
Quantidade de garrafas PET recebidas a cada dia de coleta	2.250 garrafas PET
Quantidade de garrafas PET necessárias para confecção de um fardo de garrafas compactadas	1.000 garrafas PET
Comercialização do material	Empresa da região faz o recolhimento mensal (uma vez ao mês). A cada recolhimento, 32 fardos compactados são destinados à empresa recicladora

Fonte: Dados da pesquisa

Considerando estas informações, o modelo matemático foi fundamentado em operações aritméticas de adição e divisão em que os estudantes consideraram a produção de 9 fardos de garrafas PET compactadas a cada semana, totalizando a produção de 36 fardos ao mês. Como a empresa recicladora faz o recolhimento de 32 desses fardos, há uma sobra a cada mês de 4 fardos. Os debates no grupo G1 prosseguiram e uma discussão interessante chamou atenção pelo fato de apresentar uma linha de pensamento que não era esperada, os estudantes estabeleceram a sobra de 4 fardos a cada mês como uma constante e associaram a uma divisão entre a quantidade de fardos que o espaço de armazenamento comporta (240 fardos), evidenciando que se a quantidade de garrafas PET produzidas pela população permanecer a mesma, em aproximadamente 60 meses não haverá espaço suficiente para armazená-las na Associação, sendo necessário encaminhá-las para o aterro sanitário, ocasionando diversos problemas ambientais. Conforme evidencia a Figura 15.

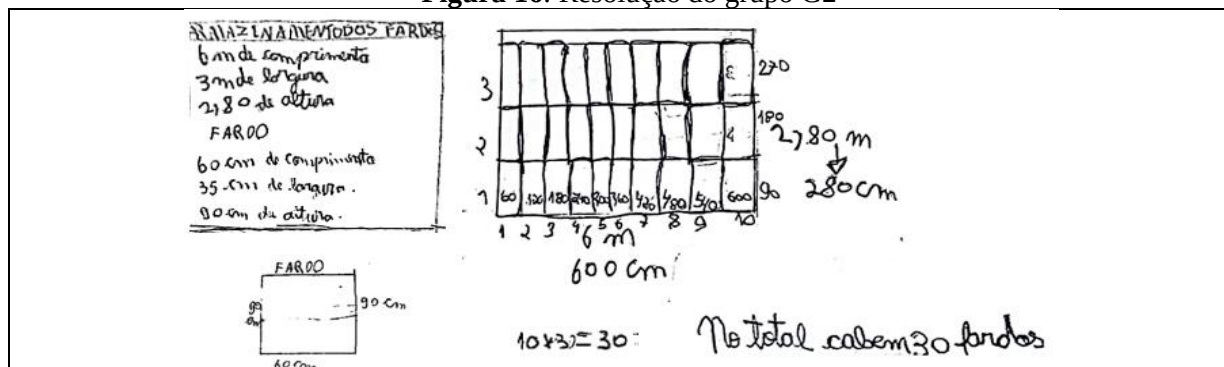
Figura 15: Resolução apresentada pelo grupo G1



Fonte: dados da pesquisa

Os estudantes do grupo G2 discutiram inicialmente, a possibilidade de resolução do problema utilizando *chutes* ou opiniões a respeito da quantidade de fardos de garrafas PET que espaço de armazenamento poderia comportar. No entanto, ao perceberem que as opiniões eram distintas, decidiram que esse não seria um encaminhamento adequado, solicitando a orientação da professora. Após a intervenção de que o grupo deveria utilizar as informações coletadas na Associação para resolver o problema, os estudantes realizaram o registro das informações a respeito das dimensões de cada fardos de garrafas PET e do espaço disponível para armazenamento. Em seguida, construíram desenhos como maneira de simbolizar esses elementos, os quais associaram ao formato de um retângulo, conforme indica a Figura a seguir.

Figura 16: Resolução do grupo G2



Fonte: Relatório do grupo G2

Embora os estudantes tenham utilizado o desenho como recurso para visualizar os elementos envolvidos na atividade, eles demonstraram dificuldades em

considerar o aspecto tridimensional da situação, construindo representações bidimensionais, semelhantes a retângulos. O resultado encontrado causou certa estranheza em alguns integrantes do grupo G2, pois consideraram o total de 30 fardos de garrafas PET ser um número pequeno, levando em consideração o tamanho do local de armazenamento, investigado pelos estudantes no dia da visita à Associação.

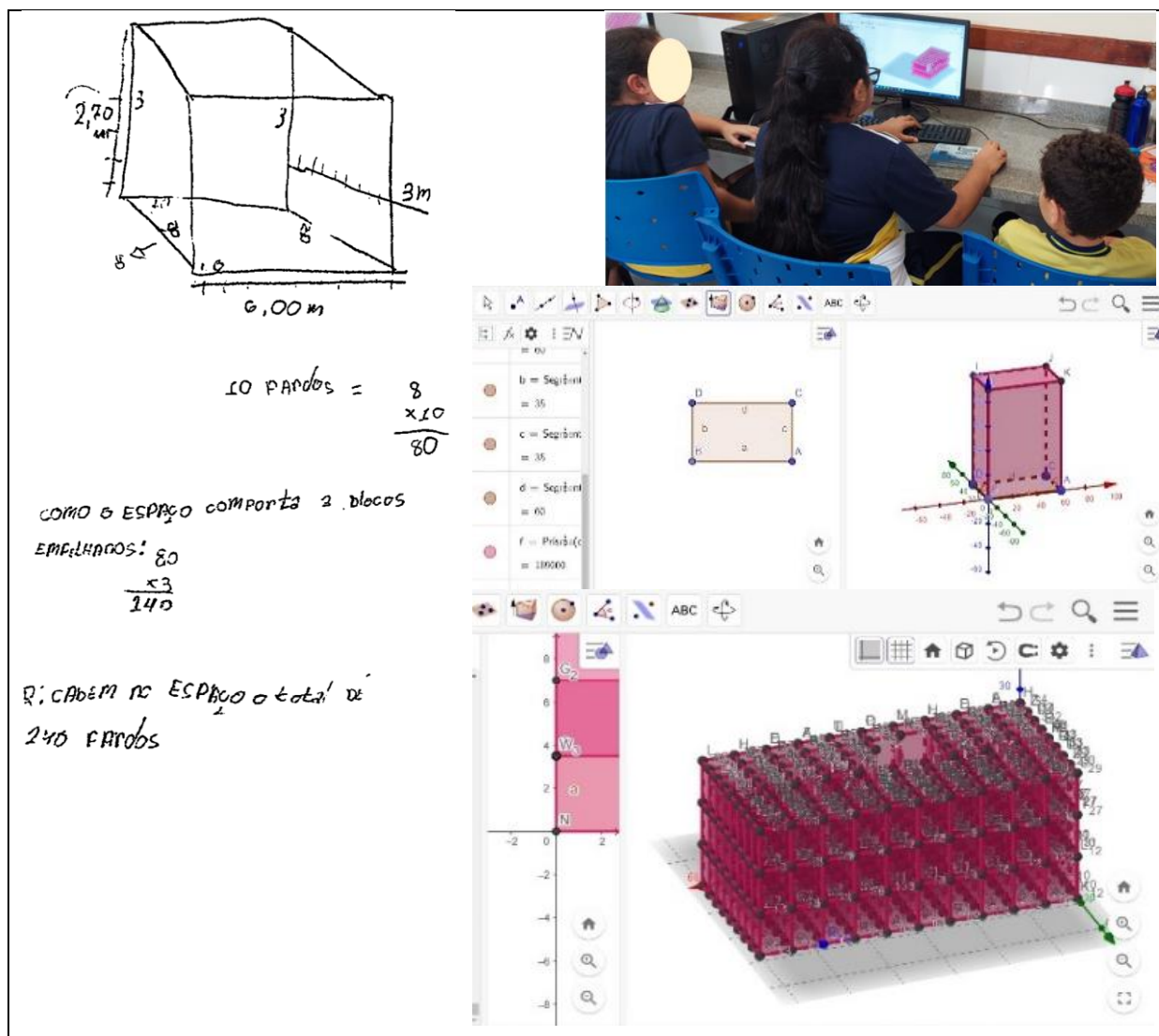
Assim, uma nova discussão se iniciou com o objetivo de identificar erros e imprecisões no modelo matemático. Nesse momento, para auxiliar o grupo a refinar sua abordagem da situação e se desvencilhar dos obstáculos encontrados, novas intervenções foram realizadas pela professora com a preocupação de não apresentar uma solução imediata, mas abordar ideias que surgiram durante a discussão dos estudantes. A professora então mencionou que os fardos poderiam ser armazenados um em cima do outro, formando camadas e a importância de relacionar corretamente a representação dos objetos as três medidas coletadas (comprimento, largura e altura).

Apesar de os estudantes demonstrarem envolvimento em busca de uma solução para o problema, as dificuldades de visualização em relação ao formato do local de armazenamento e dos fardos de garrafas PET permaneceram. Vale destacar que as dificuldades apresentadas pelo grupo G2 foram comuns aos demais grupos, com exceção do grupo G1¹⁴ que demonstrou certa autonomia. Diante disso, a professora sugeriu que a turma prosseguisse o desenvolvimento da atividade no laboratório de informática, com o apoio do *software* GeoGebra¹⁵, pois sua estrutura dinâmica pode propiciar a visualização de figuras no espaço tridimensional, possibilitando experiências diferentes daquelas obtidas com o uso de lápis e papel (Figura 17).

Figura 17: Usando software GeoGebra

¹⁴ Vale destacar que os estudantes do grupo G1 também desenvolveram a atividade com o apoio do GeoGebra, evidenciando um aspecto positivo com relação ao tempo gasto com a resolução utilizando lápis e papel.

¹⁵ Os estudantes estavam familiarizados com o uso do *software*.



Fonte: Relatório do grupo G2

A abordagem da situação com o apoio do GeoGebra, permitiu que os estudantes superassem dificuldades enfrentadas no desenvolvimento da atividade com o uso de lápis e papel, pois o *software* favoreceu a representação e manipulação de objetos, a visualização, a identificação de conceitos matemáticos e propriedades pertinentes para a resolução do problema.

Considerando as construções realizadas com o apoio do GeoGebra, de acordo com Borba, Silva e Gadanidis (2018), elas podem ser classificadas como desenho, pois ao arrastar um dos elementos *móveis* que as compõem suas propriedades fundamentais não são mantidas. Nesse sentido, Junior, Amaral e Souza (2018) consideram que a construção desses desenhos pode aprimorar traçados realizados com lápis e papel e possibilitar com que os estudantes superem as dificuldades em representar fidedignamente um objeto tridimensional. Nesse sentido, as transcrições de áudio fornecem indícios de que os desenhos

construídos com o apoio do GeoGebra favoreceram a compreensão da situação e a visualização de conceitos geométricos, permitindo aos estudantes perceber propriedades despercebidas com o uso do lápis e papel, conforme diálogo a seguir.

A7: Agora eu entendi! A gente estava confundindo com área, aqui ficou tão fácil, mas estava difícil perceber.

A9: E a gente esse tempo todo quebrando a cabeça, deu para entender agora! Não iríamos perceber que era uma caixa nunca!

A16: Isso porque a gente já tinha visto lá (se referindo à visita à Associação), mas agora deu para perceber que tem coisa errada no nosso desenho [...], é um bloco em cima do outro [...].

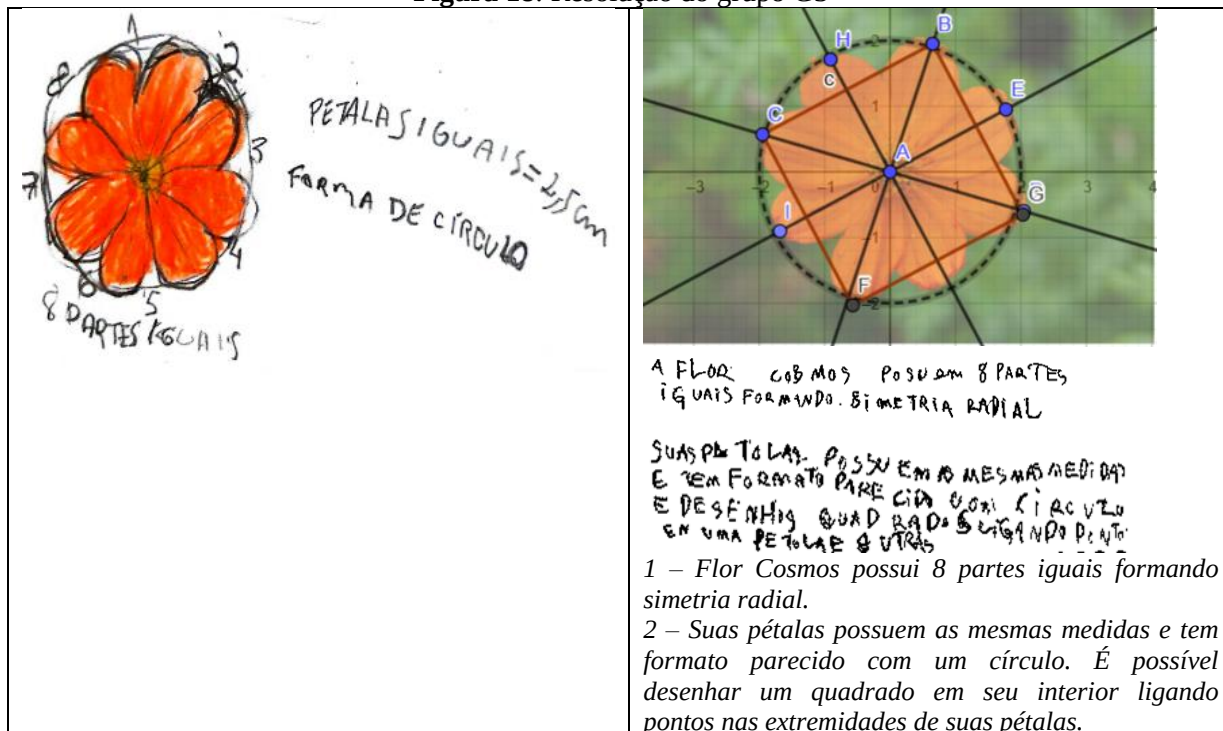
A6: Deveríamos ter vindo aqui antes, bem mais rápido! Agora vamos refazer nossa resolução.

Por meio dos desenhos construídos com o GeoGebra, os estudantes refinaram a resolução feita com lápis e papel e se propuseram a construir no *software* uma estrutura semelhante a situação investigada. O grupo G2 identificou que o espaço de armazenamento comporta cerca de 240 fardos de garrafas PET compactadas. Por meio da resolução obtida, eles iniciaram o encaminhamento da segunda questão, que consistia em determinar em quanto tempo não haverá espaço suficiente para o armazenamento de fardos de garrafas PET na Associação. O grupo G2 utilizou um raciocínio semelhante ao utilizado pelo grupo G1, assumindo as mesmas hipóteses estabelecidas. O modelo matemático elaborado foi fundamentado em operações aritméticas de multiplicação e o grupo evidenciou que em aproximadamente 60 meses não haverá espaço suficiente para armazenar o material na Associação.

Na atividade “Beleza das Flores”, os estudantes do grupo G3 iniciaram discussões acerca de como poderiam relacionar características da flor escolhida (Cosmos), com aspectos matemáticos, a fim de estabelecer alguma relação que possibilitasse evidenciar elementos relativos à sua beleza. Assim, inicialmente o grupo identificou as medidas de cada pétala com o auxílio de uma régua e passou a discutir a forma com que elas estavam distribuídas na flor. Em seguida, construíram um desenho para representar a flor sob estudo e passaram a estabelecer relações entre o desenho e a matemática, destacando aspectos geométricos das flores. A partir dos traçados realizados os estudantes identificaram que a flor apresentava a mesma medida em todas as pétalas, fato que permitiu com que os estudantes a dividissem em oito partes iguais, além disso associaram seu formato a um círculo. No entanto, os estudantes mostraram-se insatisfeitos com a precisão do desenho construído com lápis e

papel e realizaram uma abordagem da situação com o apoio do GeoGebra, conforma Figura a seguir.

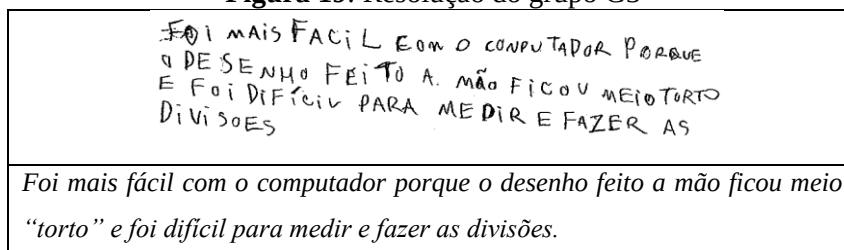
Figura 18: Resolução do grupo G3



Fonte: Relatório do grupo G3

Os estudantes consideraram que abordar a situação por meio do GeoGebra possibilitou a construção de um desenho mais preciso, além disso, o uso do software aprimorou a visualização de padrões de simetria, permitindo a inserção de um polígono ligando as extremidades de cada pétala para a busca de regularidades, facilitando a matematização da situação, conforme transcrição a seguir.

Figura 19: Resolução do grupo G3



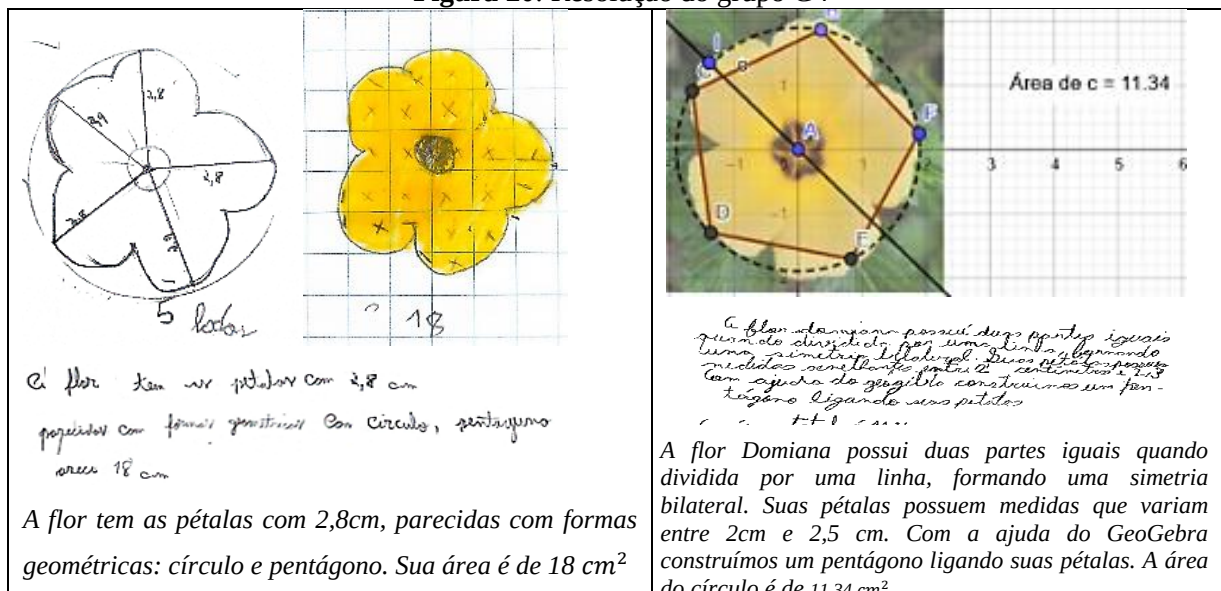
Fonte: relatório do grupo G3

Os estudantes realizam uma pesquisa sobre os tipos de simetria e concluíram que a flor Cosmos possui simetria radial, pois suas pétalas apresentam o mesmo

tamanho e ao traçarem linhas para dividir a imagem da planta todos os eixos se encontraram como se irradiassem do centro para as extensões da imagem. Além disso, ao girarem nos dedos bem rápido, sua forma se assemelhou a um círculo. Levando a considerar que a beleza de uma flor pode estar relacionada com sua simetria e proporções harmoniosas, que dizem respeito a precisão de suas pétalas e seu formato.

Para o desenvolvimento da atividade, os estudantes do grupo G4 adotaram encaminhamentos semelhantes ao grupo G3 em que iniciaram as discussões relacionando características da flor Damiana com aspectos matemáticos. Assim, ao realizar a contagem de suas pétalas, os estudantes associaram o formato da flor a um polígono de cinco lados. Em seguida, construíram um desenho para representar as características e relações geométricas identificadas. Entretanto, os estudantes demonstraram dificuldades em representar um pentágono no interior da flor e, inicialmente, transferiram o desenho para uma folha quadriculada, com a intenção de calcular a área total da flor e de cada uma de suas pétalas para estabelecer relações. Neste momento, foi associado ao desenho quadraturas. Com a intenção de refinar o desenho construído, a atividade foi desenvolvida com o auxílio do GeoGebra, em que o *software* possibilitou ampliar o traçado de formas geométricas, auxiliando na matematização da situação, conforme Figura a seguir.

Figura 20: Resolução do grupo G4

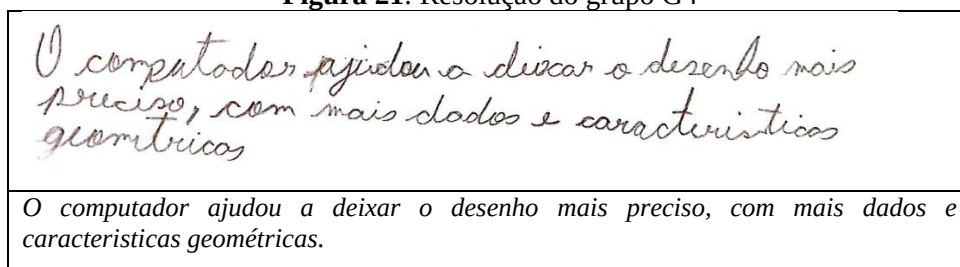


Fonte: Relatório do grupo G4

Abordar a situação por meio do GeoGebra permitiu aos estudantes aprimorar os desenhos feitos com lápis e papel e construir desenhos aproximados ao real,

incrementando a busca por relações matemáticas por meio da inserção de um polígono ligando as extremidades de cada pétala, do cálculo aproximado da área da superfície da flor e de sua divisão em duas partes iguais. Ao realizar uma pesquisa sobre os tipos de simetria, o grupo concluiu que a flor possui uma simetria bilateral, pois quando dividida, possui duas partes iguais. De acordo com Critchlow (2011), o conceito de simetria se refere à relação de dimensão ou disposição que um objeto tem com um eixo, ponto ou plano, e que pode estar também relacionada a equações matemáticas ou formas geométricas, em que a simetria bilateral ocorre quando há apenas um único plano que divide o objeto em metades simétricas. Os estudantes consideraram que abordar a situação com o apoio do GeoGebra permitiu visualizar padrões de simetria, construir um desenho mais preciso e aproximado das características geométricas da flor, conforme apresentado na Figura 21.

Figura 21: Resolução do grupo G4



Fonte: relatório do G4

Os estudantes concluíram que a beleza de uma flor parece estar relacionada com sua simetria e proporções harmoniosas, que dizem respeito a precisão de suas pétalas, seu formato e a disposição de seus elementos com um eixo, assim, elegeram a flor Cosmos como a mais simétrica e harmoniosa e conseqüentemente, a mais bela. Critchlow (2011) pondera que, embora haja um encanto natural em toda flor por meio de sua coloração, delicadeza e fragrância, ainda que de forma intuitiva, os olhos humanos buscam pela sua beleza através da simetria de suas pétalas, das formas e proporções harmoniosas de cada elemento que a compõe.

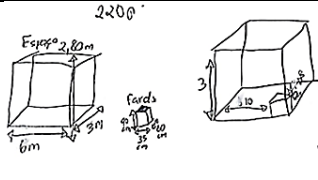
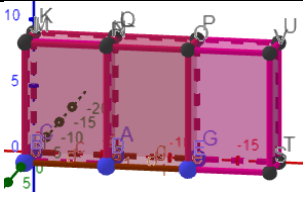
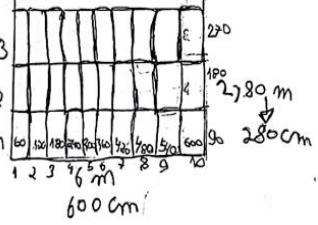
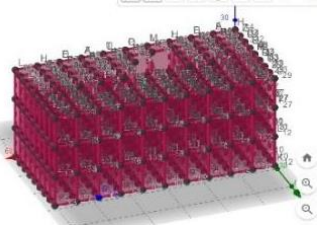
3.8 DISCUSSÃO

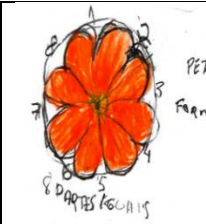
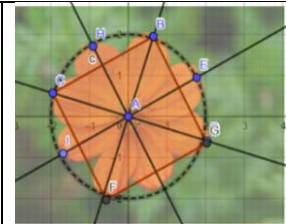
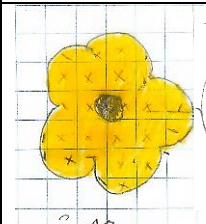
As interlocuções entre desenhos feitos à mão e desenhos feitos no *software* GeoGebra são identificadas nas duas atividades de modelagem matemática. Todos os grupos construíram desenhos espontâneos para uma primeira abordagem da situação-problema, utilizando os recursos de lápis, papel e em alguns casos, uma régua.

Os estudantes produziram desenhos com recursos manuais com o objetivo de visualizar a situação e compreender aspectos matemáticos que até então estavam despercebidos. No entanto, em alguns momentos os recursos manuais não foram suficientes para abordar aspectos relevantes para a resolução do problema, corroborando com os argumentos de Leenaars, Joolingen e Bollen (2012), de que os recursos manuais podem limitar a construção de um desenho.

O uso do GeoGebra possibilitou uma maior abrangência do fenômeno sob investigação, propiciando a construção de desenhos tanto no espaço bidimensional quanto no tridimensional, favorecendo a visualização de elementos e propriedades das representações construídas. Desenvolver as atividades com o apoio do *software* permitiu aos estudantes revisitar e complementar os desenhos construídos com lápis e papel, de modo que os desenhos produzidos com o GeoGebra colaboraram para a compreensão da situação, servindo de base para que os estudantes construíssem um entendimento comum na abordagem das atividades de modelagem matemática, favorecendo um trabalho colaborativo por meio da comunicação de ideias e da identificação de lacunas na resolução. Indicativos dessas interlocuções são apresentados no Quadro 8.

Quadro 8: Interlocução entre os diferentes tipos de desenhos

Desenhos feitos à mão	Complemento com o GeoGebra	Considerações dos estudantes	Ações para a modelagem matemática
		A2: [...] aqui foi mais rápido. A8: [...] é mais fácil fazer o desenho no computador. A17: [...] ficou mais “certinho”.	Otimização do tempo; Precisão do modelo produzido; Ideia de volume como espaço ocupado.
		A7: Agora eu entendi! Aqui ficou tão fácil. A16: [...] é um bloco em cima de outro até ocupar as três medidas. A7: Temos que corrigir a quantidade de fardos na largura. A9: A gente estava confundindo com área.	Visualização e compreensão da situação; Identificação de imprecisões e equívocos; Refinar o modelo matemático; Identificar propriedades e conceitos matemáticos que auxiliassem na matematização; Compreensão do conceito de volume.

		A10: O computador ajudou a deixar o desenho mais preciso. A21: Deu para obter mais dados e ajudou a perceber características geométricas. A18: A gente fez várias tentativas até chegar nessa e com o computador foi mais fácil [...].	Contribuição para a matematização da situação; Múltiplas formas de resolução; Precisão do desenho construído; Realizar menos simplificações.
		A14: Foi mais fácil com o computador porque o desenho feito à mão ficou meio “torto”. A12: Fazendo o desenho a mão foi difícil para medir. A15: No computador foi mais rápido. A20: Todo grupo fez junto no computador.	Contribuição na matematização da situação; Contribuiu para um trabalho colaborativo; Realizar menos simplificações; Otimização de tempo; Abordagem precisa da situação.

Fonte: as autoras

As atividades de modelagem matemática possibilitaram aos estudantes relacionar situações da realidade a desenhos e representações geométricas construídas tanto com lápis e papel, quanto com o computador, permitindo que aspectos favoráveis do pensamento geométrico fossem desenvolvidos (Gutiérrez, 1996; Brasil, 2018). O uso do GeoGebra no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática possibilitou ampliar a classificação de desenhos proposta por Rellensmann, Schukajlow e Leopold (2016), visto que os desenhos digitais produzidos com o auxílio do *software* apresentam um certo rigor no que se refere a características e propriedades matemáticas, favorecendo a identificação de conceitos. Nesse sentido, Reuter (2016) considera que o sucesso do desenho pode estar relacionado a sua qualidade e precisão, na medida que a representação externa deve expressar adequadamente a estrutura descrita na situação-problema, suas características essenciais, bem como suas relações e informações numéricas.

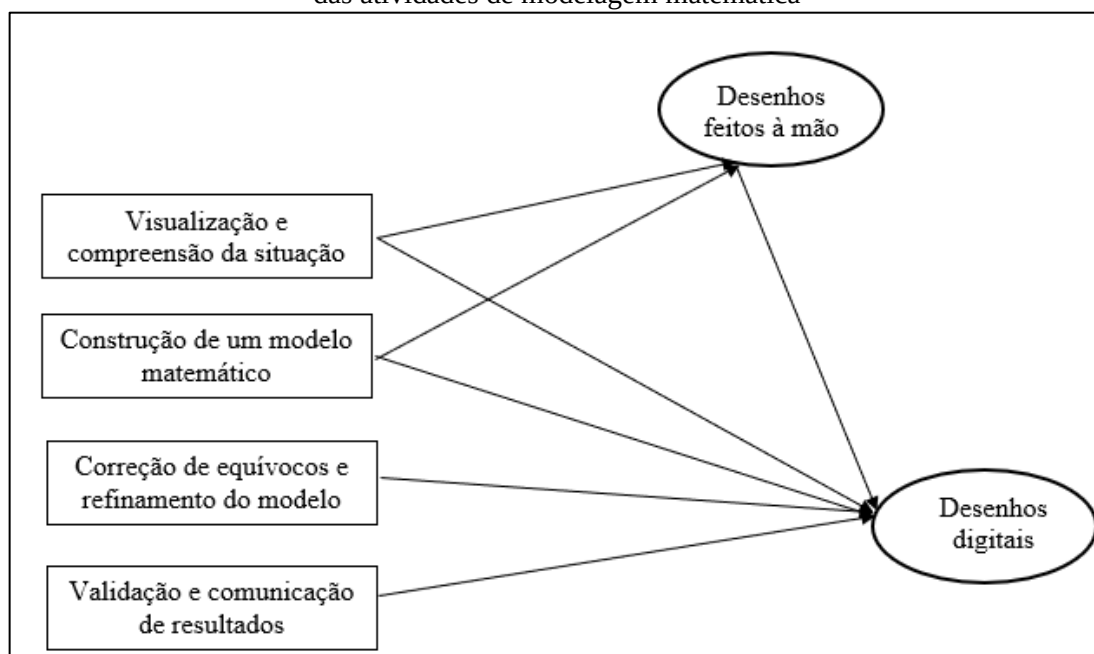
O uso de recursos da tecnologia digital no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática serviu como suporte para as ações dos estudantes, de modo que estas ações ficaram associadas aos diferentes encaminhamentos realizados no desenvolvimento das atividades. Os desenhos digitais produzidos por meio do *software*, favoreceram à visualização do problema, proporcionando um envolvimento dos estudantes com a situação, por meio da exploração de conceitos matemáticos nas representações dinâmicas construídas que contribuíram com a compreensão da situação, com a realização de

inferências matemáticas úteis e com a complementação de traçados realizados com lápis e papel, conforme reconhecido por Carreira (2019).

Como sugerem Galbraith e Fisher (2021), no contexto das atividades de modelagem matemática desenvolvidas, o uso da tecnologia digital se situou como serva, permitindo aos estudantes ampliar e aprimorar os métodos manuais de resolução, propiciando um avanço na matematização e no desenvolvimento dos modelos matemáticos, por meio da identificação de conceitos na construção de desenhos digitais precisos, além de colaborar com a avaliação dos resultados, favorecendo a correção de imprecisões nos modelos feitos com lápis e papel.

Desta forma, a interlocução entre os desenhos feitos à mão e o uso do *software* GeoGebra favoreceram e incrementaram as ações dos estudantes no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, contribuindo com à visualização e compreensão da situação, matematização e construção do modelo matemático, interpretação dos resultados, aperfeiçoamento do modelo produzido, otimização do tempo de trabalho, o uso de diferentes procedimentos para abordar um problema, bem como com a construção de desenhos digitais precisos, conforme Figura 22.

Figura 22: Impactos dos diferentes tipos de desenho para ações dos estudantes no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática



Fonte: as autoras

3.9 CONSIDERAÇÕES

Com a finalidade de investigar como se dá a interlocução entre o desenho feito à mão e o uso de recursos tecnológicos e, em que aspectos esses recursos podem favorecer ou incrementar as ações dos estudantes em atividades de modelagem matemática, analisamos duas atividades desenvolvidas por estudantes de um 5º ano do Ensino Fundamental.

Em uma primeira abordagem das atividades de modelagem matemática, todos os grupos construíram desenhos utilizando como recurso lápis e papel. Os estudantes construíram esses desenhos com a intenção de identificar aspectos matemáticos que até então estavam despercebidos, de forma a tirar proveito deles para a resolução do problema. Entretanto, os recursos manuais não foram suficientes para abordar aspectos relevantes para a resolução do problema, em que os estudantes demonstraram dificuldades em compreender a situação e visualizar os elementos envolvidos, em identificar propriedades e conceitos matemáticos e representar objetos geométricos com fidedignidade. Este aspecto corrobora com os argumentos de Leenaars, Joolingen e Bollen (2012), de que os recursos manuais podem limitar a construção de um desenho e dificultar a visualização de conceitos.

Retomar as atividades com o uso do GeoGebra permitiu que os estudantes superassem dificuldades enfrentadas ao abordá-las com uso de lápis e papel e por meio da construção de desenhos digitais que atuaram como uma representação reduzida da situação real, expressando a sistematização de conceitos e propriedades matemáticas, ideias abstratas se tornaram mais tangíveis e concretas na tela do computador, ampliando e aprimorando os efeitos de traçados realizados no papel. Estas evidências corroboram com o que Galbraith e Fisher (2021) afirmam, de que o uso de recursos tecnológicos pode ampliar e aprimorar os métodos de resolução manuais e contribuir para um avanço no desenvolvimento de modelos.

Além disso, o uso do GeoGebra no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, possibilitou com que os estudantes rompessem barreiras de visualização, compreensão do problema e formulação do modelo matemático, servindo de base para a construção de um entendimento comum na abordagem das atividades, favorecendo um trabalho colaborativo por meio da comunicação de ideias e da identificação de lacunas na resolução. Este aspecto sinaliza indícios das habilidades de colaboração e criticidade, conforme destaca a BNCC (2018).

O que se pode concluir é que, a articulação entre o desenho feito à mão e o uso do *software* GeoGebra no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, incrementa as ações dos estudantes em diferentes momentos do desenvolvimento da

atividade, fornecendo condições para a visualização e compreensão do problema, para a matematização e construção de um modelo matemático adequado, para a interpretação e comunicação dos resultados. Além disso, o uso do *software* no desenvolvimento das atividades, possibilitou uma ampliação na classificação dos tipos de desenho, em que os desenhos digitais construídos com o GeoGebra permitiram abordar os objetos descritos na situação com precisão, proporcionando meios para que os estudantes ampliassem os efeitos de desenhos feitos com lápis e papel, possibilitando uma efetividade no uso da estratégia.

Considerando os desenhos digitais produzidos e seu uso efetivo no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, Borkowski, Chan e Muthukrishna (2000), consideram que propiciar contextos que favoreçam o uso efetivo de uma estratégia pode fortalecer o conhecimento estratégico do estudante, ampliando suas possibilidades de uso ao abordar um problema e fortalecendo seu repertório estratégico.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Editora Contexto, 2013.

ALMEIDA, L.M.W; TORTOLA, E.; MERLI, R.F. Modelagem matemática – com o que estamos lidando: modelos diferentes ou linguagens diferentes? **Acta Scientiae**, Canoas, v.14, n.2, p. 215-239, maio/ago. 2012.

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, n.52, p. 215-241, 2003.

BORBA, M. C; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2018.

BORBA, M.; VILLARREAL, M. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking**: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation. Springer, 2005.

BORKOWSKI, J. G.; CHAN, L. K.; MUTHUKRISHNA, N. A process-oriented model of metacognition: Links between motivation and executive functioning. In G. Schraw & J. C. Impara (Eds.), **Issues in the measurement of metacognition**. University of Nebraska Press, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRÄUER, V.; LEISS, D.; STANISLAW, S. Skizzen zeichnen zu Modellierungsaufgaben – Eine Analyse themenspezifischer Differenzen einer Visualisierungsstrategie beim

mathematischen modellieren. **Journal für Mathematik-Didaktik**, v. 42, n. 2, p. 491-523, 2021.

BRITO, D. S.; ALMEIDA, L. M. W. Práticas de modelagem matemática e dimensões da aprendizagem da geometria. **Revista Actualidades Investigativas en Educación**, v.21, n.1, 2021.

CARREIRA, S. Modelação Matemática e simulação no contexto escolar: conexões entre mundos. In **Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática (EIAM 2019)**, SPIEM, p. 47-62, 2019.

CRITCHLOW, K. The hidden geometry of flowers Living rhythms, form and number. **Floris Books**, p. 1-446, 2011.

COX, R. Representation construction, externalised cognition and individual differences. **Learning and Instruction**, v. 9, n. 4, p. 343–363, 1999.

FLAVELL, J. H. Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive developmental inquiry. **American Psychologist**, v. 34, p. 906–911, 1979.

GALBRAITH, P.; FISHER, D. M. Technology and mathematical modelling: addressing challenges, opening doors. **Quadrante**, v. 30 n.1, p. 98-218, 2021.

GREEFRATH, G.; HERTLEIF, C.; SILLER, H-S. Mathematical modelling with digital tools – a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. **ZDM Mathematics Education**, v.50, n.1, p. 1-12, 2018.

GUTIÉRREZ, A. Visualization in 3 - dimensional geometry: in search of a framework. In L. Puig e Gutierrez (Eds.), **Proceedings of 20th PME conference**, v. 3, p. 19-26, Valencia: Universitat de València, Dept. de Didàctica de la Ma-temàtica, 1996.

HANSON, A, **Mathematical Visualization: Standing at the Crossroads**. Conference Panel for IEEE Visualization' 96, 1996.

HOUAISS, A. **Dicionário Eletrônico Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

JOHNSON-LAIRD, P. N. Mental models in cognitive science. **Cognitive Science**, n. 4, p. 71–115, 1980.

JUNIOR, A. S. L.; AMARAL, F. H. N.; SOUZA, N. A. A utilização do GeoGebra como uma ferramenta no ensino de geometria espacial no ensino básico. In: Encontro Nacional das Licenciaturas – ENALIC, 2018, Fortaleza. **Anais [...]** Fortaleza, p. 1-24, 2018.

KRAWITZ, J.; SCHUKAJLOW, S. When can making a drawing hinder problem solving? Effect of the drawing strategy on linear overgeneralizations and problem solving. **Frontiers in Psychology**, v. 11, n. 506, 2020.

LEENAARS, F. A. J.; VAN JOOLINGEN, W.R.; BOLLEN, L. Using self-made drawings to support modelling in science education. **British Journal of Educational Technology**, v. 44, n.1, p. 82–94, 2012.

MAYRING, P. **Qualitative content analysis: theoretical foundation basic procedures and software solution**. Klagenfurt, p. 6-136, 2014.

MEIER, M.; GRAVINA, M. Modelagem no GeoGebra e o desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v.1, n.1, 250– 264, 2012.

MENDES, C. J. **O uso do GeoGebra 3D no ensino de Geometria**. 2020. 82f. (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de Brasília, Brasília, 2020.

MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 9, n. 2, p. 191-211, 2003.

RELLENSMANN, J. Selbst erstellte Skizzen beim mathematischen Modellieren: Ergebnisse einer empirischen Untersuchung. **Springer Spektrum**, 2019.

RELLENSMANN, J.; SCHUKAJLOW, S.; LEOPOLD, C. Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. **ZDM**, 2016.

REUTER, T. **Die Rolle externer Repräsentationen für die Konstruktion und Nutzung mentaler Modelle bei der Lösung problemhaltiger Textaufgaben in der Primarstufe**. Koblenz-Landau: Universität Koblenz-Landau, Campus Landau, Universitätsbibliothek, 2016.

SEKI, J. T. P.; MARTINS, B. O.; ALMEIDA, L. M. W. A. Uso do GeoGebra no estudo de equações diferenciais ordinárias. In: Encontro Paranaense de Tecnologia na Educação Matemática – EPTEM, 2018, Apucarana. **Anais [...]** Arapongas, p. 1-14, 2018.

SOUSA, B. N. P. A.; TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. O uso das tecnologias digitais como facilitadoras em atividades de modelagem matemática. In: Encontro Paranaense de Tecnologia na Educação Matemática – EPTEM, 2018, Apucarana. **Anais [...]** Arapongas, p. 1-16, 2018.

SETTIMY, T. F. O.; BAIRRAL, M. A. Dificuldades envolvendo a visualização em geometria especial. **VIDYA**, v. 40, n. 1, p. 177-195, 2020.

STYLIANOU, D. A. An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: Towards an organizing scheme. **Educational Studies in Mathematics**, v. 76, p. 265–280, 2011.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) –Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

VAN METER, P.; FIRETTO, C. M. **Cognitive model of drawing construction. Learning through the construction of drawings.** In SCHRAW, G.; MCCRUDDEN, M. T.; ROBINSON, D. (Eds.), *Learning through visual displays*, p. 247–280, 2013.

ZHANG, Q.; FIORELLA, L. Learning by drawing: When is it worth the time and effort? **Contemporary Educational Psychology**, n. 66, p. 1-16, 2021.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. Editor's Introduction: What is mathematical visualization? In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (Orgs). **Visualization in Teaching and Learning Mathematics.** Washington: MAA, 1991.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa foi estruturada com o objetivo de investigar o uso estratégico do desenho, visando caracterizar o seu potencial para fomentar as ações dos estudantes em atividades de modelagem matemática. A estrutura do relatório de pesquisa segue o formato *multipaper* de modo que essa investigação se desdobrou na elaboração de dois artigos.

No artigo 1, com o objetivo de investigar como a produção de desenhos pode colaborar para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, duas atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas. A pesquisa sinalizou que no contexto das atividades de modelagem matemática, o uso de desenhos produzidos¹⁶ colaborou e incrementou as ações de estudantes nas diferentes etapas de um ciclo de modelagem matemática.

Os desenhos produzidos, a partir de suas características, foram classificados em situacionais e esboços. Nesse sentido, os desenhos situacionais retrataram com detalhes e semelhanças a situação de estudo, em contrapartida, os desenhos esboçados não expressaram riqueza de detalhes, representando uma visão geral da situação investigada (Rellensmann; Schukajlow; Leopold, 2016). No desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, podemos considerar que os usos destes desenhos estão associados a tentativa de compreender a situação, de matematizar e encontrar meios de obter um do modelo matemático, de avaliar e interpretar os resultados, de explicar os procedimentos e escolhas realizadas pelos estudantes. Assim, podemos caracterizar o uso de desenhos no desenvolvimento destas atividades como: ferramenta para compreensão; ferramenta para avançar na matematização, ferramenta para avaliação e *feedback* e ferramenta para comunicação. Além disso, destacamos a orientação do professor no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, de modo que uma intervenção estratégica pode promover movimentos dos estudantes nas etapas do desenvolvimento das atividades. Estes movimentos podem ser mediados pelo uso do desenho como estratégia de compreensão, de busca por informações complementares e resolução de um problema.

No artigo 2, com o objetivo de investigar como se dá a interlocução entre o desenho feito à mão e o uso de um *software* para construir desenhos e, em que aspectos esses

¹⁶ É possível consultar os diferentes tipos de desenhos produzidos pelos estudantes no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática nos apêndices da pesquisa.

recursos podem favorecer ou incrementar as ações dos estudantes em atividades de modelagem matemática, desenvolvemos duas atividades de modelagem matemática.

A pesquisa sinalizou que a construção de desenhos com o uso de recursos tecnológicos ampliou as possibilidades de estudantes no desenvolvimento das atividades, pois os desenhos construídos com o *software* permitiram com que os traçados feitos à mão fossem revisitados e aprimorados, favorecendo e incrementando as ações de estudantes no desenvolvimento das atividades.

Primeiramente, todos os estudantes utilizaram como recursos lápis e papel e, embora tenha sido identificado a construção de desenhos no desenvolvimento das atividades, os recursos manuais não foram suficientes para abordar aspectos relevantes que possibilitassem a resolução do problema. Retomar as atividades com o uso do GeoGebra, permitiu com que ideias abstratas se tornassem mais tangíveis e concretas na tela do computador, ampliando e aprimorando as representações estáticas construídas no papel, contribuindo para um avanço no desenvolvimento do modelo matemático.

O que se pode inferir é que, em todas as etapas do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, ao associar a tecnologia digital aos desenhos construídos com lápis e papel, novos elementos foram incorporados às ações dos estudantes de modo que seu uso se deu de diferentes maneiras: como meio de compreensão e visualização do problema, como uma possibilidade de matematização e construção do modelo matemático, como um meio de avaliar os resultados, como uma forma de otimizar o tempo, como uma ferramenta que permite a construção de desenhos digitais precisos.

Neste contexto, a investigação realizada nos permite delinear potencialidades do uso do desenho em atividades de modelagem matemática, em particular, a pesquisa possibilitou ampliar a classificação de desenhos proposta por Rellensmann, Schukajlow e Leopold (2016), visto que os desenhos digitais construídos com auxílio de um *software* podem subsidiar o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Os diferentes tipos de desenhos, bem como possíveis colaborações para a modelagem matemática são abordadas na Tabela 1.

Tabela 1: Tipos de desenhos e possíveis colaboração para a modelagem matemática

Tipos de desenhos	Caracterização	Possíveis colaborações para a modelagem matemática
Situacionais	Retratam com detalhes a situação de estudo, em que os objetos são representados de acordo com sua aparência física.	Compreensão do problema, visualização de conceitos matemáticos, matematização e interpretação de resultados.

Esboços	Representa uma visão geral e simplificada da situação, geralmente expresso por linhas e traços grosseiros.	Visão geral da situação, entender objetos e suas relações, apoio na matematização e comunicação de resultados.
Matemáticos	Representa a sistematização de elementos e informações matemáticas essenciais da situação em estudo.	Observação de conceitos e métodos matemáticos.
Digitais	Desenhos construídos com o apoio de recursos tecnológicos digitais que expressem a precisão de conceitos matemáticos em duas ou mais dimensões.	Visualização e compreensão da situação, observação de conceitos matemáticos, matematização, formulação do modelo matemático, identificação de imprecisões, otimização de tempo, trabalho colaborativo, representação reduzida da situação real (menores simplificações).

Fonte: As autoras, com base em Rellensmann, Schukajlow e Leopold (2016)

Reconhecemos que no âmbito da presente pesquisa, a iniciativa dos estudantes de construir um desenho, evidenciada no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, por um lado, se deu de forma planejada e consciente, em que os desenhos produzidos apresentaram as características essenciais que um desenho deve incluir para apoiar a resolução de um problema. Por outro lado, entretanto, a estratégia foi acionada de forma inconsciente, ou até mesmo, motivada por uma intervenção da professora. Nesse sentido, Rellensmann *et al.* (2022) consideram que esse movimento sinaliza a mobilização e consolidação do conhecimento estratégico sobre desenho, pois a eficácia da estratégia em determinado contexto favorece seu uso em contextos semelhantes.

Além disso, o processo analítico relativamente ao uso de desenhos nas atividades de modelagem matemática, nos permite inferir que o conhecimento estratégico orientou o processo de resolução empreendido pelos estudantes, como sugerem Borkowski, Chan e Muthukrishna (2000). Inicialmente, os estudantes selecionaram a estratégia de desenho como a mais adequada para as demandas da situação, em seguida, executaram-na em sintonia com a estrutura da atividade, incluindo características úteis para a resolução do problema, por fim, utilizaram como meio de obter a resposta da situação investigada, fornecendo indicativos de como o conhecimento estratégico pode atuar sobre o uso do desenho em atividades de modelagem matemática. Contribuindo com evidências acerca do que Rellensmann, Schukajlow e Leopold (2019) denominam como complexas relações, entre o conhecimento estratégico, o uso de desenhos e atividades de modelagem matemática.

REFERÊNCIAS

BORKOWSKI, J. G.; CHAN, L. K.; MUTHUKRISHNA, N. A process-oriented model of metacognition: Links between motivation and executive functioning. In G. Schraw & J. C. Impara (Eds.), **Issues in the measurement of metacognition**. University of Nebraska Press, 2000.

RELLENSMANN, J.; SCHUKAJLOW, S.; LEOPOLD, C. Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. **ZDM**, 2016.

RELLENSMANN, J.; SCHUKAJLOW, S.; LEOPOLD, C. Measuring and investigating strategic knowledge about drawing to solve geometry modelling problems. **ZDM**, v. 52, p. 97–110, 2019.

RELLENSMANN, J. SCHUKAJLOW, S.; BLOMBERG, J. LEOPOLD, C. Effects of drawing instructions and strategic knowledge on mathematical modeling performance: Mediated by the use of the drawing strategy. **Wiley**, v. 36, p. 402-417, 2022

APÊNDICES

Apêndice B – Termo de consentimento livre e esclarecido



Universidade Estadual do Norte do Paraná – UENP
 Lei nº 15.300 – D.O.E. nº 7.320, de 28 de setembro de 2006.
 CNPJ 08.885.100/0001-54



Programa *Stricto Sensu* de Pós-Graduação em Ensino (PPGEN) Mestrado Profissional em Ensino

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Este é um convite especial para seu (sua) filho(a) participar voluntariamente da pesquisa: “MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM OLHAR PARA O USO DE DESENHOS”. Este trabalho tem o intuito de investigar o papel de desenhos estratégicos em atividades de modelagem matemática desenvolvidas por estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Sua autorização e a participação do(a) estudante, são muito importantes. Ao participar da pesquisa o(a) estudante desenvolverá situações-problema envolvendo conteúdos curriculares do 5º ano do Ensino Fundamental na disciplina de Matemática, em que serão analisadas as resoluções que cada estudante realizará, por meio de registros escritos, gravação de aulas, realização de notas de campo, preenchimento de questionários, fotos, etc.

O desenvolvimento da pesquisa poderá favorecer o desempenho escolar do (a) seu (sua) filho (a). A pesquisa será realizada nas dependências da sala de aula em que seu (sua) filho (a) está matriculado (a). A participação de seu (sua) filho (a) na pesquisa é voluntária, podendo o (a) senhor (a) desautorizar a participação do mesmo, sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa. Esclarecemos ainda, que o(a) estudante(a) não pagará e nem será remunerado(a) por sua participação. Garantimos, no entanto, que todas as despesas decorrentes da pesquisa serão ressarcidas, quando devidas e decorrentes especificamente da participação do(a) estudante.

É importante explicar que, de acordo com a Resolução 466/12, durante a realização de qualquer pesquisa, existe a possibilidade de o (s) participante (s) se expor (em) a riscos, referentes aos aspectos físicos, psicológicos, morais, intelectuais, sociais, culturais ou espirituais, em virtude das relações humanas e sociais, de modo geral. Vale destacar que caso a pesquisa lhe cause algum dano é assegurado ao participante procurar indenização. No caso desse estudo, consideramos que, no momento das atividades, é possível que seu (sua) filho (a) sinta alguma dificuldade na realização das mesmas, podendo gerar um possível constrangimento quando não atingir o objetivo proposto. No entanto, mesmo considerando que os riscos são mínimos deixamos claro que caso eles ocorram os participantes serão amparados pelo pesquisador responsável pelo projeto. A identidade de seu (sua) filho (a) será preservada conforme os padrões profissionais de sigilo e ética. Esclarecemos, também, que as informações coletadas serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a identidade do estudante. Todos os dados provenientes da pesquisa serão eliminados após a sua finalização.

Caso o(a) senhor(a) tenha dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos poderá nos contatar, ou procurar o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UENP Universidade Estadual do Norte do Paraná – Campus Luiz Meneghel de Bandeirantes, situado na Rod. BR 369, Km 54, Bandeirantes-PR, CEP 86360-000, Caixa Postal 261, Fone (43)

3542-8056, e-mail: cep@uenp.edu.br, funcionamento de segunda a sexta-feira das 7h30min às 12h e das 13h30min. Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas devidamente preenchida, assinada e entregue ao (à) senhor(a).

Assaí, ____ de _____ de 2023.

Talita Dutra da Hora (Pesquisador)

Eu, _____, responsável pelo(a) _____ estudante esclarecido(a) sobre os procedimentos da pesquisa, aceito que o(a) estudante anteriormente nominado(a) participe voluntariamente da investigação descrita anteriormente.

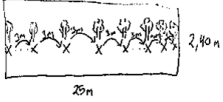
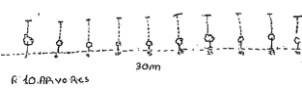
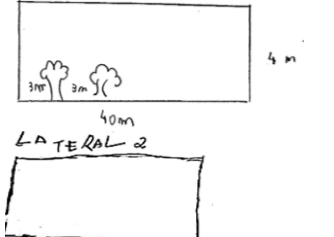
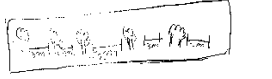
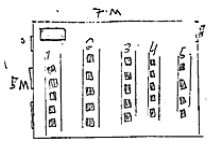
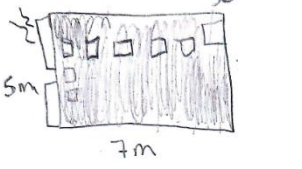
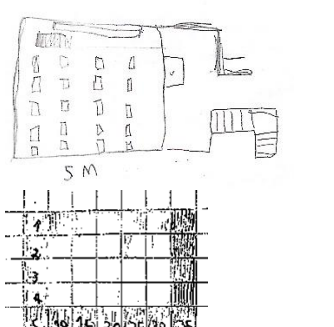
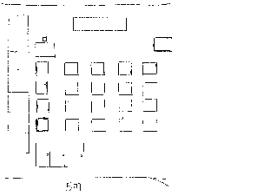
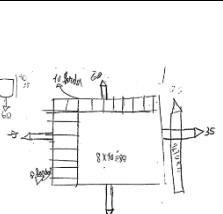
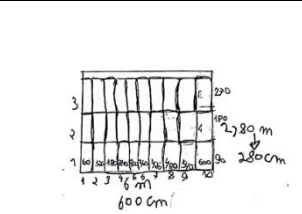
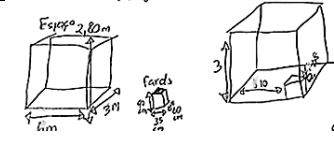
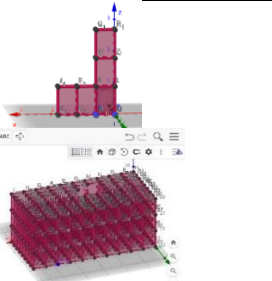
Assinatura do(a) responsável pesquisador Data: _____

Assinatura do

Assinatura do(a) participante:.....

RG ou CPF:.....

Desenhos Produzidos pelos estudantes nas atividades de modelagem matemática

Arborização da Escola				
Climatização da Sala de Aula				
Reciclagem de Garrafas PET				
Beleza das Flores	