

2026

# Aprendizagem de derivadas com base na teoria dos registros de representação semiótica e nas múltiplas representações.

Tozo, Guilherme Augusto Bossi

Universidade Estadual do Norte do Paraná

---

<https://repositorio.uenp.edu.br/handle/123456789/884>

*Baixado de Repositório Institucional UENP*



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE  
DO PARANÁ**

***Campus Cornélio Procópio***

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO**

---

**GUILHERME AUGUSTO BOSSI TOZO**

**APRENDIZAGEM DE DERIVADAS COM BASE NA TEORIA  
DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E  
NAS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES**

---

**CORNÉLIO PROCÓPIO – PR  
2025**

GUILHERME AUGUSTO BOSSI TOZO

**APRENDIZAGEM DE DERIVADAS COM BASE NA TEORIA  
DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E  
NAS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná – *Campus* Cornélio Procópio, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Trevisan Sanzovo

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Ciências Naturais e Matemática

Ficha catalográfica elaborada por Juliana Jacob de Andrade - Bibliotecária, CRB/9 - 1669, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UENP

T757a TOZO, Guilherme Augusto Bossi  
Aprendizagem de derivadas com base na teoria dos registros de representação semiótica e nas múltiplas representações. / Guilherme Augusto Bossi TOZO; orientador Daniel Trevisan Sanzovo - Cornélio Procópio, 2025.  
116 p. :il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino) - Universidade Estadual do Norte do Paraná, Centro de Ciências Humanas e da Educação, Programa de Pós Graduação em Ensino, 2025.

1. Cálculo Diferencial e Integral. 2. Aprendizagem. 3. Representação Semiótica. 4. Múltiplas Representações. I. Sanzovo, Daniel Trevisan, orient. II. Título.

CDD: 515.3

GUILHERME AUGUSTO BOSSI TOZO

**APRENDIZAGEM DE DERIVADAS COM BASE NA TEORIA DOS  
REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E NAS MÚLTIPLAS  
REPRESENTAÇÕES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná – *Campus* Cornélio Procópio, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino.

Após realização de Defesa Pública o trabalho foi considerado:

Aprovado

**BANCA EXAMINADORA**

Documento assinado digitalmente



**DANIEL TREVISAN SANZOVO**

Data: 15/12/2025 15:04:16-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Orientador: Prof. Dr. Daniel Trevisan Sanzovo  
Universidade Estadual do Norte do Paraná - UENP

Documento assinado digitalmente



**KARINA ALESSANDRA PESSOA DA SILVA**

Data: 15/12/2025 15:47:18-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Karina Alessandra Pessoa da Silva  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Documento assinado digitalmente



**SIMONE LUCAS**

Data: 17/12/2025 17:53:31-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Simone Luccas  
Universidade Estadual do Norte do Paraná - UENP

Cornélio Procópio, 04 de novembro de 2025.

Dedico este trabalho aos meus amados pai e mãe, eles que sempre me ofereceram imenso apoio e suporte perante minhas escolhas e decisões ao longo dos meus anos de estudos, Sidnei Tozo e Neusa Bossi Tozo, saibam que sem vocês nada disso seria possível!

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente meu orientador Prof. Dr. Daniel Trevisan Sanzovo não só pela constante orientação no desenvolvimento deste trabalho, mas sobretudo, pela sua amizade, confiança e paciência durante todos esses anos de convivência. Seja enquanto professor de Métodos e Técnicas de Pesquisa, quando fui apresentado à área da pesquisa em ensino por meio da iniciação científica, ou durante esses anos de Pós-Graduação no PPGEN, minha sincera gratidão a seu trabalho.

Aos professores do PPGEN, em especial a Prof<sup>a</sup>. Dra. Simone Luccas pelo novo olhar às práticas docentes que me proporcionou em suas aulas, ao Prof. Dr. Lucken Bueno Lucas e o Prof. Dr. Rudolph dos Santos Gomes Pereira pelas contribuições ao desenvolvimento desta pesquisa em suas disciplinas, e por último, mas não menos importante, à Prof<sup>a</sup>. Dra. Marinez Meneghello Passos pelos constantes ensinamentos sobre o que é, como ser e sentir-se um pesquisador.

Gostaria de agradecer também algumas pessoas que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho. A meus pais Sidnei Tozo e Neusa Bossi Tozo, novamente venho agradecer com todo meu coração o apoio, companheirismo, amor e carinho que tiveram comigo durante esses 25 anos de minha vida, não é exagero dizer que eu devo tudo que sou à vocês, e espero poder compensar ao menos parte do esforço que tiveram em minha criação. Finalmente, a todos os meus amigos que me apoiaram em momentos difíceis, como João Pedro Cachatore de Oliveira, que sempre me apoiou durante os estudos preparatórios para as avaliações de Cálculo na universidade, Vinicius Dias Valerio e meu primo Yan Lemes Martins, que não me deixaram desistir dessa dissertação.

*“No apego de um homem à sua vida há algo mais forte que todas as misérias do mundo. O juízo do corpo tem o mesmo valor que o do espírito, e o corpo recua diante do aniquilamento. Cultivamos o hábito de viver antes de adquirir o de pensar”.*

— Albert Camus

TOZO, G. A. B. **Aprendizagem de Derivadas com base na Teoria dos Registros de Representações Semióticas e nas Múltiplas Representações**. 2025. 116 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino) – Universidade Estadual do Norte do Paraná, Cornélio Procópio, 2025.

## RESUMO

A dissertação a seguir trata-se de uma pesquisa que elaborou e implementou uma proposta de ensino acerca da aprendizagem das Derivadas de funções polinomiais, conteúdo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, por meio dos referenciais da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e das Múltiplas Representações a estudantes de Matemática do Ensino Superior. Tendo assim como seu objetivo principal, investigar indícios de aprendizagem diante da aplicação de uma Sequência de Atividades sistematizada por estes pressupostos. Dessa forma, a presente pesquisa foi desenvolvida aos moldes do método qualitativo de estudo e, para a análise dos dados obtidos, foram utilizados os pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e das Funções Pedagógicas das Múltiplas Representações, com o intuito de analisar a produção e o uso dos registros produzidos durante a aplicação das cinco atividades presentes no Produto Educacional. Foi possível identificar três grupos principais: (i) os que conseguiram realizar integralmente as tarefas, explorando de forma coerente tratamentos e conversões entre registros; (ii) os que, apesar de iniciarem com dificuldades, demonstraram evolução significativa ao longo das etapas, conseguindo concluir as últimas atividades de maneira mais estruturada; e (iii) os que apresentaram limitações persistentes em tratamentos e conversões, não conseguindo finalizar a maioria das propostas. Esses resultados reforçam a centralidade da coordenação entre registros na aprendizagem matemática e destacam a importância de propostas pedagógicas que explorem intencionalmente funções complementares, restritivas e de aprofundamento das Múltiplas Representações. Constatou-se que o êxito nas atividades não está restrito ao domínio de um único registro, mas depende da capacidade de articular diferentes formas de representação, favorecendo compreensões mais profundas dos conceitos de derivada. Assim, a pesquisa conclui que propostas fundamentadas na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e no trabalho com uma Diversidade Representacional constituem estratégias promissoras para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, mas também apontam para a importância de investigações futuras que ampliem esse modelo para outros conteúdos e níveis de ensino, explorando as condições que favoreçam a coordenação espontânea entre registros.

**Palavras-chave:** Sequência de atividades. Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Múltiplas Representações. Aprendizagem. Cálculo Diferencial e Integral.

TOZO, G. A. B. **Learning derivatives based on the Theory of Semiotic Representation Registers and Multiple Representations**. 2025. 116 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino) – Universidade Estadual do Norte do Paraná, Cornélio Procópio, 2025.

## ABSTRACT

This dissertation reports on a research study that designed and implemented a teaching proposal aimed at fostering the learning of Derivatives of mathematical functions, a core topic in Differential and Integral Calculus. The instructional approach was grounded in the theoretical frameworks of the Theory of Semiotic Representation Registers and Multiple Representations, and was applied to undergraduate Mathematics students. The primary objective was to investigate evidence of learning resulting from the implementation of an Activity Sequence structured according to these theoretical perspectives. The study adopted a qualitative research methodology. Data analysis relied on the principles of the Theory of Semiotic Representation Registers and the Pedagogical Functions of Multiple Representations, focusing on the production and use of registers generated during the five activities comprising the Educational Product. Findings revealed three main student profiles: (i) those who successfully completed the tasks, coherently managing both treatments and conversions between registers; (ii) those who initially struggled but showed significant progress, completing the final activities more effectively; and (iii) those who faced persistent challenges in treatments and conversions, failing to complete most proposed tasks. These results underscore the central role of register coordination in mathematical learning and highlight the pedagogical value of approaches that deliberately explore the complementary, restrictive, and deepening functions of Multiple Representations. The study further shows that successful learning is not tied to mastering a single register, but rather to the ability to articulate multiple representational forms, enabling deeper conceptual understanding of derivatives. In conclusion, teaching proposals based on the Theory of Semiotic Representation Registers and on a Representational Diversity approach constitute promising strategies for teaching Differential and Integral Calculus. However, the findings also point to the need for further research extending this framework to other mathematical domains and educational levels, exploring conditions that foster the spontaneous coordination of registers.

**Key words:** Educational Product. Semiotic Representation Register Theory. Multiple Representations. Learning. Differential and Integral Calculus.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Tratamento de um registro algébrico de uma Derivada por limite.....	24
Figura 2 – Tratamento de um registro gráfico de uma Derivada por limite.....	24
Figura 3 – Conversão entre diferentes registros do objeto matemático Derivada....	26
Figura 4 – Estrutura diádica e triádica das significâncias dos signos.....	29
Figura 5 – Hipótese fundamental de aprendizagem: estrutura da representação em função de conceitualização.....	30
Figura 6 – Diversidade representacional numa função quadrática.....	33
Figura 7 – Exemplo da função Restringir no conceito de Derivada.....	35
Figura 8 – Categorias de registros de representação semióticos.....	37
Figura 9 – Fases e atividades do processo de execução do Mapeamento Sistemático da Literatura.....	44
Figura 10 – Resolução da Etapa 1 do P01.....	58
Figura 11 – Resolução da Etapa 1 do P02.....	58
Figura 12 – Resolução da Etapa 1 do P03.....	59
Figura 13 – Resolução da Etapa 1 do P04.....	60
Figura 14 – Resolução da Etapa 1 do P05.....	61
Figura 15 – Resolução da Etapa 1 do P06.....	61
Figura 16 – Resolução da Etapa 1 do P07.....	62
Figura 17 – Resolução da Etapa 1 do P08.....	63
Figura 18 – Resolução da Etapa 1 do P09.....	63
Figura 19 – Resolução da Etapa 1 do P10.....	64
Figura 20 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P01.....	66
Figura 21 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P02.....	67
Figura 22 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P03.....	67
Figura 23 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P04.....	68
Figura 24 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P05.....	69
Figura 25 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P06.....	69
Figura 26 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P07.....	70
Figura 27 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P08.....	71
Figura 28 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P09.....	71
Figura 29 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P10.....	72

Figura 30 – Recorte da resolução da Etapa 3 do P01.....	73
Figura 31 – Recorte da resolução da Etapa 3 do P02.....	73
Figura 32 – Recorte da resolução da Etapa 3 do P03.....	74
Figura 33 – Recorte da resolução da Etapa 3 do P04.....	75
Figura 34 – Recorte da resolução da Etapa 3 do P05.....	75
Figura 35 – Recorte da resolução da Etapa 3 do P06.....	76
Figura 36 – Recorte da resolução da Etapa 3 do P07.....	77
Figura 37 – Recorte da resolução da Etapa 3 do P08.....	78
Figura 38 – Recorte da resolução da Etapa 3 do P09.....	78
Figura 39 – Recorte da resolução da Etapa 3 do P10.....	79
Figura 40 – Resolução da Etapa 4 do P01.....	80
Figura 41 – Recorte da resolução da Etapa 4 do P02.....	81
Figura 42 – Recorte da resolução da Etapa 4 do P03.....	82
Figura 43 – Recorte I da Etapa 4 do P04.....	83
Figura 44 – Recorte II da Etapa 4 do P04.....	84
Figura 45 – Recorte da resolução da Etapa 4 do P05.....	85
Figura 46 – Recorte da resolução da Etapa 4 do P06.....	86
Figura 47 – Recorte da resolução da Etapa 4 do P07.....	87
Figura 48 – Recorte da resolução da Etapa 4 do P08.....	88
Figura 49 – Recorte da resolução da Etapa 4 do P09.....	89
Figura 50 – Recorte I da Etapa 4 do P10.....	90
Figura 51 – Recorte II da Etapa 4 do P10.....	91
Figura 52 – Resolução da Etapa 5 do P01.....	92
Figura 53 – Resolução da Etapa 5 do P02.....	93
Figura 54 – Resolução da Etapa 5 do P03.....	94
Figura 55 – Resolução da Etapa 5 do P04.....	94
Figura 56 – Resolução da Etapa 5 do P05.....	95
Figura 57 – Resolução da Etapa 5 do P06.....	96
Figura 58 – Resolução da Etapa 5 do P07.....	96
Figura 59 – Resolução da Etapa 5 do P08.....	97
Figura 60 – Resolução da Etapa 5 do P09.....	98
Figura 61 – Resolução da Etapa 5 do P10.....	99

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no fazer matemático /atividade matemática.....	28
Quadro 2 – Funções Pedagógicas das Múltiplas Representações.....	34
Quadro 3 – Possíveis vantagens e desvantagens dos registros representacionais semióticos (domínio das funções).....	38
Quadro 4 – Quantitativo de Dissertações e Teses (BDTD e CAPES) verificados no mapeamento.....	47
Quadro 5 – PE que compuseram o <i>corpus</i> da pesquisa de mapeamento.....	47
Quadro 6 – Estrutura geral das etapas da sequência de atividades do PE.....	52
Quadro 7 – Síntese da análise geral da Etapa 1.....	56
Quadro 8 – Síntese da análise geral da Etapa 2.....	65
Quadro 9 – Síntese das análises da pesquisa.....	100

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MR	Múltiplas Representações
MSL	Mapeamento Sistemático de Literatura
PE	Produto Educacional
SA	Sequência de Atividades
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO.....</b>	<b>21</b>
2.1	TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.....	21
2.2	MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES.....	31
2.3	VANTAGENS E DESVANTAGENS NO USO DOS REGISTROS.....	36
<b>3</b>	<b>ASPECTOS METODOLÓGICOS.....</b>	<b>40</b>
3.1	NATUREZA DA PESQUISA.....	40
3.2	PARTICIPANTES DA PESQUISA.....	41
3.3	DESENVOLVIMENTO DO PRODUTO EDUCACIONAL.....	41
3.3.1	TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES PARA O ENSINO DE DERIVADA: UM MAPEAMENTO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS.....	42
3.3.1.1	Justificativa do Mapeamento.....	42
3.3.1.2	Materiais e Métodos do Mapeamento.....	42
3.3.1.3	Resultados e Discussões do Mapeamento.....	46
3.3.1.4	Considerações Finais do Mapeamento.....	50
3.3.2	SISTEMATIZANDO A SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES DO PE.....	51
3.3.3	RELATO DE IMPLEMENTAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL.....	54
3.4	INSTRUMENTO PARA COLETA E ANÁLISE DOS DADOS.....	55
<b>4</b>	<b>APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS.....</b>	<b>57</b>
4.1	ETAPA 1.....	57
4.2	ETAPA 2.....	66
4.3	ETAPA 3.....	73
4.4	ETAPA 4.....	80
4.5	ETAPA 5.....	93
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>103</b>

<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>107</b>
<b>APÊNDICES.....</b>	<b>111</b>
APÊNDICE A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.....	112
<b>ANEXOS.....</b>	<b>115</b>
ANEXO A – Ementa da disciplina de CDI-I da Universidade de aplicação.....	116

## 1 INTRODUÇÃO

Minha jornada ante a pesquisa se iniciou durante os anos de Ensino Superior. Fascinado pela área das Ciências Exatas, optei por um curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP), Campus de Jacarezinho, onde tive contato com excelentes profissionais que me auxiliaram a desenvolver minha paixão pelo ensino de Matemática. Sempre tive inerente a mim a necessidade de me aprofundar efetivamente num assunto para extrair significados que fossem reais ao meu cotidiano.

Assim, frente à Matemática, suas abstrações e seus axiomas, enfrentei enormes barreiras nos meus primeiros anos de Licenciatura. Da mesma forma, durante minha superação a esses obstáculos (frente a inúmeras horas de estudo), me encontrei junto à Matemática e suas complexidades.

Durante esse período, por meio de minha participação na disciplina de Metodologias e Técnicas de Pesquisa, ministrada pelo meu orientador desta pesquisa, Prof. Dr. Daniel Trevisan Sanzovo, fui apresentado à área da pesquisa em Ensino, onde pude almejar uma possibilidade incrível de contribuir, enquanto pesquisador, para facilitar e enriquecer o Ensino e a Aprendizagem da Matemática a fim de, possivelmente, sanar problemas que eu mesmo havia enfrentado durante meu percurso formativo. Também neste período, junto ao Prof. Daniel, recebi uma bolsa de iniciação científica (PIBIC) com incentivo da Fundação Araucária para realizar uma pesquisa sobre o que havia na literatura científica de revistas do nosso país sobre a evasão e o abandono escolar de alunos do Ensino Fundamental, tendo assim, meu primeiro contato efetivo com os métodos de fazer Ciência.

Enquanto aluno de Matemática, principalmente da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, pude observar uma grande dificuldade tanto minha quanto de meus colegas de turma no que dizia respeito à compreensão efetiva e aplicações dos objetos de conhecimento da matéria.

Viseu (2017) vai de encontro a esse fato, apontando que, na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, conceitos como limite, continuidade e Derivada revelam grande complexidade não somente no que tange a suas abstrações, mas também, seus processos de representação dificultam a compreensão.

Observando a existência de diversos teoremas e conceitos abstratos no estudo de funções por meio das Derivações e/ou Integrações, surgiram minhas inquietações sobre quais maneiras de contribuir ou auxiliar os processos de ensino e aprendizagem na abordagem desses conceitos.

Nos anos finais do Ensino Superior, já com planos de ingresso na Pós-Graduação, por meio de minha participação no grupo de estudos GPECEM<sup>1</sup> liderado pelo orientador desta pesquisa, obtive contato com os referenciais da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval (1995; 2003; 2009; 2012), das Múltiplas Representações (MR) de Shaaron Ainsworth (1999; 2006; 2008; 2014), e outras vertentes semióticas muito relevantes à aplicação na área do Ensino.

Nesse grupo, pude conhecer e estudar o que eram e as aplicações destes referenciais, além da importância da utilização da diversidade representacional, tomando proveito das funções pedagógicas e as especificidades que cada representação do objeto matemático exerce, bem como, a da conversão e do uso coordenado de dois ou mais registros. Todas essas abordagens e resultados relevantes presentes nas pesquisas da área fizeram tanto sentido que me saltaram aos olhos.

A TRRS, formulada por Duval, parte da premissa de que compreender um conceito matemático exige a mobilização de diferentes registros de representação e, sobretudo, a capacidade de converter informações entre esses registros. Duval (2003) afirma que, toda atividade matemática mobiliza, de maneira indissociável, ao menos dois registros de representação diferentes. Essa perspectiva fundamenta-se na ideia de que não há compreensão sem representação, sendo o processo de conversão (a passagem de um registro a outro) o elemento central para a aprendizagem matemática.

No contexto brasileiro, Moretti (2002) ressalta que os registros de representação são essenciais para a construção do conhecimento matemático, pois permitem ao sujeito organizar, comunicar e elaborar raciocínios. Assim, o uso da TRRS no planejamento didático possibilita que o estudante não apenas manipule símbolos, mas também interprete e estabeleça relações entre diferentes formas de

---

<sup>1</sup> Grupo de Estudos vinculado ao Grupo de Pesquisa em Ensino e Formação de Professores [GPEFOP - Certificado pela Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP) e cadastrado no Diretório de Grupos de Pesquisa do CNPq. Espelho: [dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/3345995435404954](http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/3345995435404954), acesso em 02 de setembro de 2024].

representar um mesmo objeto matemático, como expressões algébricas, gráficos, linguagem natural e tabelas numéricas.

Complementarmente, a abordagem das Múltiplas Representações (MR) reforça a importância da diversidade semiótica nos processos de ensino e de aprendizagem. Ainsworth (2006) apresenta o *framework DeFT*, no qual aponta três funções principais das MR no aprendizado: complementar, quando diferentes representações oferecem informações distintas; restringir, quando uma representação ajuda a interpretar outra, e aprofundar, quando usamos duas ou mais representações para alcançar uma compreensão mais profunda do domínio. Segundo Ainsworth (2008), o valor educacional das múltiplas representações reside na sua habilidade de apoiar a construção de conhecimento, tornando visíveis diferentes aspectos de um conceito.

Laburú e Silva (2011) ampliam essa discussão ao destacar que, no ensino de ciências e matemática, a multiplicidade representacional atua como ponte entre os significados conceituais e os modos de expressão, favorecendo o desenvolvimento da literatura científica. Para os autores, a coordenação entre registros contribui para que o estudante desenvolva múltiplas competências cognitivas e comunique o conhecimento de forma mais ampla.

A integração entre TRRS e MR pode potencializar, portanto, tanto a compreensão conceitual quanto a flexibilidade cognitiva do aprendiz. No caso específico do ensino de derivadas, Viseu (2017) identificou que estudantes apresentam maior dificuldade quando precisam articular representações gráficas e algébricas, o que reforça a necessidade de propostas didáticas que explorem de forma intencional a conversão entre registros e a complementaridade das representações.

Dessa forma, fundamentar um Produto Educacional na TRRS e nas MR não apenas se alinha às evidências teóricas e empíricas da literatura nacional e internacional, como também responde a um desafio amplamente documentado: possibilitar ao aluno a compreensão profunda de conceitos matemáticos por meio da articulação consciente e pedagógica de diferentes formas de representá-los.

Ficou claro então a possibilidade de ligar a TRRS e as MR ao apoio do dificultoso processo da aprendizagem de conteúdos específicos da Matemática. Dessa forma, surgiram algumas hipóteses de como utilizar essas teorias a favor das

minhas práticas como futuro professor de Matemática.

Sendo assim, ao ingressar no Programa de Pós-Graduação em Ensino (PPGEN) da UENP optei por fundamentar e elaborar uma pesquisa que me desse apoio na tentativa de responder a esses problemas que identifiquei enquanto aluno do Ensino Superior. Elaboramos então esta pesquisa, visando, por meio destes pressupostos, buscar subsídios para auxiliar o processo de aprendizagem de acadêmicos do curso de Matemática acerca do conteúdo de Derivadas.

Nesta pesquisa buscamos responder à questão investigativa “*De que modo a aplicação de uma Sequência de Atividades sistematizada pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica e pelas Múltiplas Representações pode auxiliar na promoção de indícios de aprendizagem em uma turma de alunos de graduação do curso de Licenciatura em Matemática acerca do objeto matemático Derivada de funções polinomiais?*”.

Assim, por meio da elaboração e aplicação dessa Sequência de Atividades, temos como objetivo principal investigar de que modo a aplicação de uma Sequência de Atividades (SA), sistematizada à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e das Múltiplas Representações (MR), poderia contribuir para a compreensão do conceito de Derivada de funções por licenciandos em Matemática. Vale ressaltar que as Derivadas as quais trabalhamos ao longo deste estudo tratam-se apenas das derivações de funções polinomiais de uma variável real.

Separamos então, em cinco grandes seções, os temas que compõem esta dissertação.

Nesta introdução, já exposta, detalhamos a justificativa, a questão de investigação e objetivo do presente estudo.

Na segunda, são detalhados os referenciais de Raymond Duval da Teoria dos Registros de Representações Semióticas, e das Múltiplas Representações, com base em Shaaron Ainsworth.

Na terceira seção, apresentamos os aspectos metodológicos da pesquisa, englobando sua natureza, os participantes, o desenvolvimento do Produto Educacional (que por sua vez apresenta um mapeamento detalhado que visou compreender o que já foi produzido e pesquisado nos Programas de Pós-Graduação Profissionais da Área de Ensino do nosso país sobre a aplicação destes referenciais,

no intuito de fundamentar a proposta de nossa pesquisa), além dos instrumentos para coleta e análise de dados desta pesquisa.

Na quarta seção apresentamos a análise dos dados, seguido da quinta seção, em que são feitas as considerações finais. Por fim apresentamos as referências das obras que fundamentaram o desenvolvimento da presente pesquisa.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação, sendo assim, considera-se impossível analisar fenômenos da área do conhecimento sem recorrer à noção de representação (Duval, 2009).

Duval (2009) apresenta inicialmente em seu trabalho um resgate histórico dessa noção de representação por meio da Psicologia em três retomadas históricas, cada uma destas com determinações e fenômenos completamente diferentes.

A primeira, durante os anos de 1924-1926 nos estudos de Piaget sobre a Representação do mundo da criança, chamada também de representação mental, Duval (2009, p.30) traz que “O método empregado para o estudo das representações mentais era essencialmente um método de conversa, no qual o que pode aparecer como um erro é considerado como um indício de uma outra visão das coisas, ou de uma outra lógica”.

Percebemos então que a teoria piagetiana se articula em torno da noção da representação como a evocação dos objetos ausentes e da oposição entre o plano da ação e o da representação.

Numa segunda vez, a partir de 1955, o autor da Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS) relata que a representação é considerada como interna ou computacional, em teorias com foco nos tratamentos de informações de um sistema que produzia respostas adaptadas. Duval enuncia que, para esse período: “[...] A noção de representação torna-se, então, essencial como forma sob a qual uma informação pode ser descrita e considerada em um sistema de tratamento.” (Duval, 2009, p. 31). Assim, a noção do que é uma representação passa a decodificar informações e não mais a evocar objetos ausentes, como na primeira retomada.

Já em seu terceiro resgate histórico, por volta dos anos 90, Duval introduz uma visão de representação semiótica em pesquisas sobre a aquisição de conhecimentos matemáticos e os desafios associados ao aprendizado na área de

## Educação Matemática:

A especificidade das representações semióticas consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em um outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para um sujeito que as utiliza (Duval, 2009, p.32).

Podemos dizer que, nessa retomada, Duval apresenta dois tipos de representação internas ao sujeito, a mental que ocorre de maneira consciente a quem a representa, e a computacional não-consciente. As representações internas de um indivíduo não podem ser comunicadas a outro sem antes se tornarem externas.

As representações externas são, por natureza, representações semióticas, visto que são acessíveis a todos os indivíduos que aprenderam o sistema semiótico usado. A partir disso, considera-se que as representações semióticas são conscientes e externas, simultaneamente, pois tornam acessíveis ou visíveis as representações mentais de um indivíduo e possuem valor significante.

Nesse sentido representacional, no ano de 1995, Raymond Duval elabora a TRRS, teoria essa fortemente fundamentada em estudos de Semiótica conduzidos pelos pesquisadores Charles Sanders Peirce e Ferdinand de Saussure.

Com relação ao funcionamento cognitivo do pensamento humano, Duval (1995) denomina em sua teoria duas atividades mentais, a *semiósis* e a *noésis*. A *semiósis* é definida como a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, enquanto a *noésis* como os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto. Sendo assim, se relacionarmos essas atividades à aprendizagem matemática, ocorre o fenômeno elucidado pelo autor: “Não há *noésis* sem *semiósis*, é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e de exercício da *noésis*” (Duval, 2009, p.17, *itálico do autor*). Em outras palavras, não existe a compreensão efetiva de um conteúdo sem a produção de representações externas (semióticas) do objeto de estudo.

Além disso, Duval (2009) define como Registros de Representação Semiótica os sistemas semióticos que permitem o cumprimento de três atividades cognitivas inerentes às representações: a formação, o tratamento e a conversão.

Sobre a primeira atividade, produzir uma representação implica o ato de evocar um objeto através do processo de seleção um conjunto de caracteres e

determinações intrínsecas à representação mental de quem o representa. Seja a enunciação de uma frase em língua natural, o desenho de uma figura, a produção de um esquema, uma expressão matemática, etc. esta é atividade cognitiva que origina a semiose.

Entretanto, uma representação semiótica deve seguir regras de conformidade, ou seja, não pode ultrapassar os limites estabelecidos pelas normas que definem aquele sistema de representação, as quais são cruciais para sua identificação e reconhecimento, como destaca Duval (2009):

- a) A determinação de unidades elementares como, por exemplo, os símbolos e vocabulário;
- b) As combinações admissíveis das unidades elementares para a formação de unidades superiores como, por exemplo, a gramática no caso da Língua Portuguesa;
- c) Condições para que uma representação seja uma produção pertinente e completa como, por exemplo, as regras canônicas dos gêneros textuais.

Portanto, as regras de conformidade têm a função principal de capacitar o indivíduo a reconhecer significados<sup>2</sup> em uma representação que ele próprio não criou.

Com relação à operação de tratamento, pode ser entendida como os movimentos de transformação que ocorrem dentro de um mesmo registro, não alterando sua forma e respeitando suas regras de tratamento específicas (Duval, 2009). O cálculo matemático pode assumir o papel das transformações numéricas, combinando as atividades de tratamento e conversão que veremos a seguir. De maneira geral, podemos dizer que o tratamento das representações semióticas tem a função de expandir a informação, seguindo regras específicas, como as regras de derivação, coerência e associação, entre outras.

Duval (2012) exemplifica tratamento como sendo a paráfrase em um enunciado em língua natural, a realização do cálculo de uma expressão matemática tratando seus símbolos, a reconfiguração de uma figura geométrica, a anamorfose para registros imagéticos, etc.

---

<sup>2</sup> É o sentido matemático atribuído dentro de um registro. Exemplos: no registro algébrico “ $x^2$ ” significa elevar um número ao quadrado; no registro gráfico, o desenho da parábola significa a curva que representa todos os pares  $(x,y)$  com  $y=x^2$ .

A Figura 1 exemplifica esta atividade de tratamento, ilustrando uma sequência de tratamentos da representação algébrica da Derivada da função quadrática  $f(x) = x^2$  por meio de um limite tendendo a zero (cada seta azul representa um tratamento realizado no mesmo registro de representação semiótico).

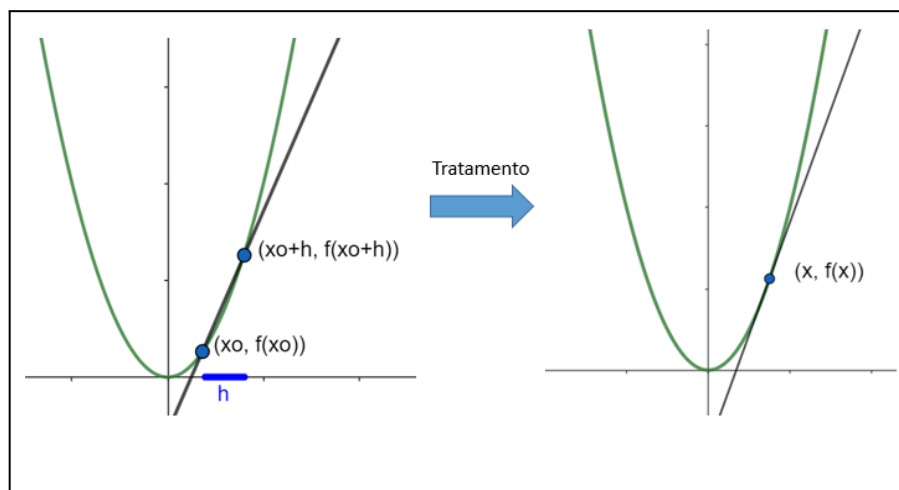
Figura 1 – Tratamento de um registro algébrico de uma Derivada por limite.

$$\begin{array}{l} \text{Tratamento} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \right) \\ \text{Tratamento} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h} \right) \\ \text{Tratamento} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{2xh + h^2}{h} \right) \\ \text{Tratamento} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h(2x + h)}{h} \right) \\ \text{Tratamento} \quad \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \end{array}$$

Fonte: os autores.

Por sua vez, a Figura 2 ilustra o tratamento ocorrendo num registro gráfico.

Figura 2 – Tratamento de um registro gráfico de uma Derivada por limite.



Fonte: os autores.

É possível perceber que, novamente, o objeto matemático representado é a Derivada da função  $f(x) = x^2$ . Inicialmente, a Derivada se dá por uma reta secante a dois pontos da curva, ou seja, uma aproximação, enquanto ao lado direito após o tratamento,  $h$  tende a zero, apontando uma Derivada exata para todos os pontos da curva numa reta tangente.

Por fim, a atividade cognitiva de conversão, que é entendida como sendo os movimentos de mudança de um registro para outro, conservando sua totalidade ou parte da representação inicial, que permite o reconhecimento do objeto matemático em diferentes registros (Duval, 2009; 2012).

Na Matemática, a conversão de uma representação de um registro semiótico para outro pode, em muitos casos, preservar total ou parcialmente o conteúdo da representação original. De acordo com Duval (2012), isso exige, especialmente no caso das expressões numéricas, a compreensão da diferença na significação operatória associada ao significante<sup>3</sup>.

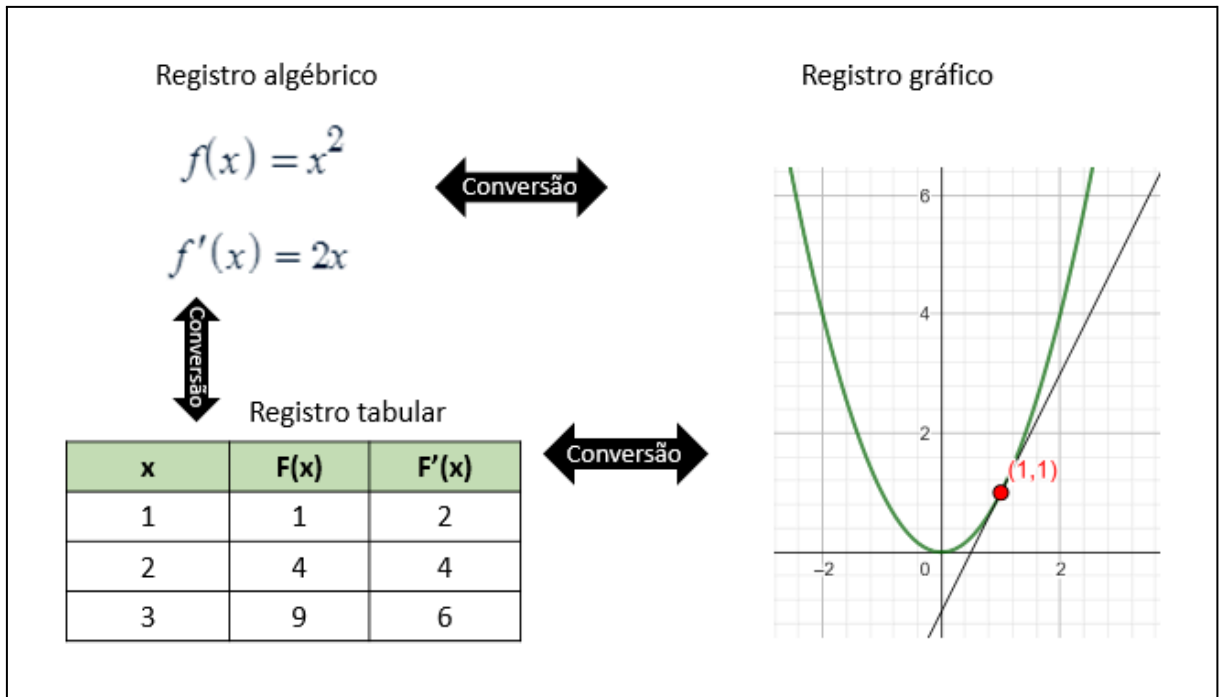
É importante destacar que a conversão é uma atividade completamente diferente e independente do tratamento, pois, na realização da troca de um registro para o outro é necessária à percepção da existência de diversos sentidos de conversão. Também não podemos confundi-la com a interpretação e a codificação. Por interpretação, podemos entender como movimentos que alteram o contexto de uma representação, não o registro representacional, já, a codificação é uma série de substituições na realização de uma transcrição de um registro inicial para outro distinto.

A Figura 3 ilustra como funcionaria algumas operações de conversão envolvendo três registros diferentes da função  $f(x) = x^2$ : o algébrico, o gráfico e o tabular.

Figura 3 – Conversão entre diferentes registros do objeto matemático Derivada.

---

<sup>3</sup> Face sensível do signo: é o suporte material da representação, em outras palavras, a materialidade perceptível do representante (os traços, os símbolos concretos). Refere-se a como o representante aparece concretamente para os sentidos. Exemplos: os símbolos escritos no papel " $x^2$ ", as letras "f" e "x", ou o desenho gráfico da parábola no plano cartesiano.



**Fonte:** os autores.

Atentando nosso olhar às setas de conversão da Figura 3, percebemos que não existe um sentido único de caminho para converter os registros de representação semióticos e sim, sentidos mais e menos congruentes.

Nesse contexto, Duval (2009) aponta a existência do fenômeno da congruência semântica. Este trata-se da manifestação da conversão de maior ou de menor sucesso do objeto matemático em dois registros semióticos. Se um registro é mais complexo de ser convertido em outro, essa operação se mostra menos congruente, do contrário, uma conversão mais simples se mostra mais congruente.

Na visão de Duval (2012), a congruência semântica se trata da distância cognitiva que separa duas representações de um mesmo objeto matemático, e quanto maior a distância cognitiva, mais custosa é a conversão, correndo o risco de não ser compreendida ou efetuada.

Esse fenômeno explicita alguns erros, fragilidades e incompreensões que podem servir de apoio à organização da prática educativa (Moretti; Brandt; Almouloud, 2022). A dificuldade observada na operação de conversão entre registros semióticos põe em prova, não somente o papel da *semiosis* no funcionamento do pensamento, mas também a necessidade de

distinção entre o representante<sup>4</sup> e o representado<sup>5</sup>.

Portanto, podemos dizer que duas representações são congruentes quando a passagem de uma para outra ocorre espontaneamente e, preenchendo a condição da relação biunívoca dessas representações, ou seja, a possibilidade de partir de um registro de partida para um registro de chegada e vice-versa (Moretti; Brandt; Almouloud, 2022).

A operação semiocognitiva de conversão se mostra a mais importante e o que dá base à ideia de aprendizagem matemática. O funcionamento cognitivo permite mobilizar, formar e reconhecer as representações dos objetos matemáticos, assim como, conduzir e controlar a atividade até seu término. A reprodução ou percepção da representação semiótica não garante a diferenciação entre o representante e o representado, para que não ocorra confusão, é importante dispor-se de uma variedade de representações semioticamente heterogêneas de um mesmo objeto de maneira coordenada (Duval, 2009).

Ao examinar a natureza da assimilação da Matemática e investigar as causas das dificuldades de compreensão frequentemente observadas em muitos alunos, surge a consideração da complexidade inerente aos conceitos matemáticos. Duval (2003) explana que a diferença na atividade cognitiva exigida pela Matemática, em comparação com outros campos do conhecimento, está relacionada ao fato de que os objetos matemáticos não são acessíveis ou observáveis diretamente por meio de instrumentos, como acontece em outras disciplinas como Biologia e Astronomia. A compreensão de conceitos matemáticos, como o de números, por exemplo, ocorre por meio de um sistema de representação.

Na aprendizagem matemática, existe uma ampla variedade de representações semióticas que podem ser utilizadas. Além dos sistemas numéricos de representação, existem também as representações geométricas, algébricas, gráficas e em linguagem natural. No Quadro 1, destacamos as quatro classificações de registros semióticos estabelecidas por Duval (2003) para as atividades de matemática.

---

<sup>4</sup> É a unidade de representação dentro de um registro semiótico específico (algébrico, gráfico, tabular, verbal, etc.). Exemplos: no registro algébrico, " $f(x)=x^2$ " é um representante do conceito de função quadrática; no registro gráfico, o desenho da parábola também é um representante desse mesmo conceito.

<sup>5</sup> É o objeto matemático, o conceito que está sendo expresso pelo representante (independente da forma como o expressamos). Exemplo: o conceito de função quadrática que associa cada número real  $x$  ao número real  $x^2$ .

Quadro 1 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no fazer matemático /atividade matemática

	<b>REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA</b>	<b>REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA</b>
<p><b>REGISTROS MULTIFUNCIONAIS:</b> Os tratamentos não são algoritmizáveis.</p>	<p>Língua natural</p> <p>Associações verbais (conceituais).</p> <p>Forma de raciocinar:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● argumentação a partir de observações, de crenças ...;</li> <li>● dedução válida a partir de definição ou de teoremas.</li> </ul>	<p>Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● apreensão operatória e não somente perspectiva;</li> <li>● construção com instrumentos.</li> </ul>
<p><b>REGISTROS MONOFUNCIONAIS:</b> Os tratamentos são principalmente algoritmos.</p>	<p>Sistemas de escritas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● numéricas (binária, decimal, fracionária ...);</li> <li>● algébricas;</li> <li>● simbólicas (línguas formais).</li> </ul> <p>Cálculo</p>	<p>Gráficos cartesianos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● mudanças de sistema de coordenadas;</li> <li>● interpolação, extrapolação.</li> </ul>

Fonte: adaptado de Duval (2003, p.14).

Segundo Duval (2003), os registros multifuncionais discursivos são aqueles que não podem ser transformados em algoritmos, mas podem ser expressos por meio de sistemas de escrita, como a linguagem natural. Em contraste, os registros multifuncionais não-discursivos também não podem ser algoritmizáveis, mas, além disso, não podem ser representados por sistemas de escrita; exemplos disso incluem figuras geométricas e maquetes.

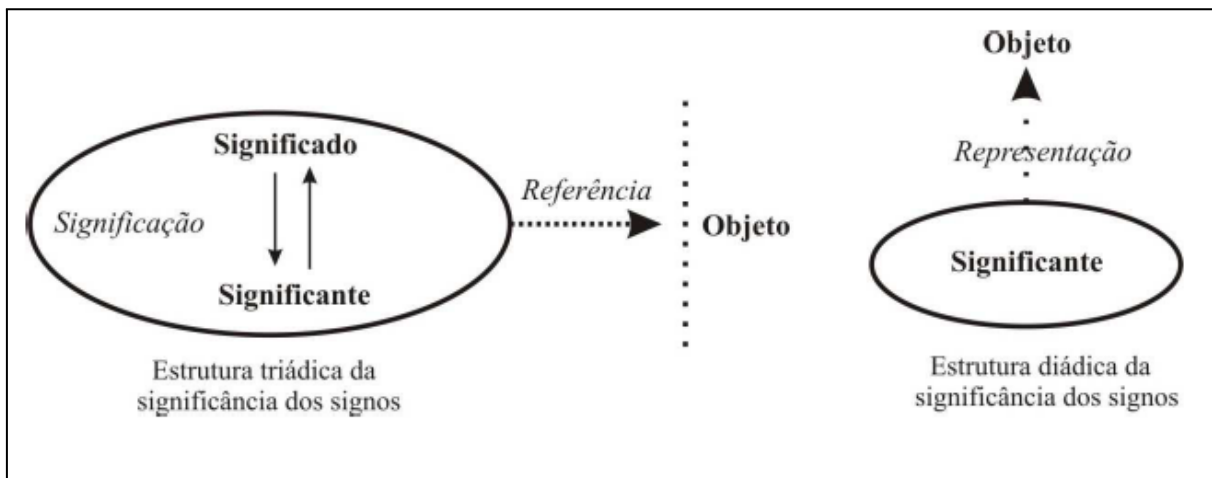
Os registros monofuncionais discursivos, por outro lado, têm representações que podem ser algoritmizáveis em sistemas de escrita, como é o caso das representações numéricas e algébricas. Finalmente, os registros

monofuncionais não-discursivos são caracterizados pela impossibilidade de serem algoritmos e, ao mesmo tempo, não podem ser representados por sistemas de escrita, como ocorre com os gráficos.

Pensando ainda sobre a aprendizagem matemática, o autor aponta em sua teoria que a construção do conceito de um conteúdo implica o uso coordenado de dois ou mais registros de representação (Duval, 2009, 2012). Para concretizar essa proposta, Duval (2012) elaborou algumas hipóteses a cargo de entender o funcionamento da aprendizagem por meio dos registros de representação semióticos.

A primeira hipótese delimitada neste trabalho é que, quando bem escolhido um registro, as representações deste são suficientes para que ocorra a compreensão do conceito representado. Premissa essa que pode ser justificada pela estrutura da representação habitual (bem escolhida), como visualizado na Figura 4 a seguir:

Figura 4 – Estrutura diádica e triádica das significâncias dos signos.



Fonte: Duval (2012, p.281).

Perceba que, na Figura 4, os elementos que constituem a significação dos signos estão em negrito e, as relações que ocorrem entre eles em itálico. Fazendo então uma análise dos signos de estrutura diádica como noções matemáticas (notações de função, vetores, operadores, etc.), nota-se que estes não possuem significado e, com isso, são constituídos por uma relação vinculada ao objeto. Já, na estrutura triádica, como signos linguísticos (ou até figuras), o objeto

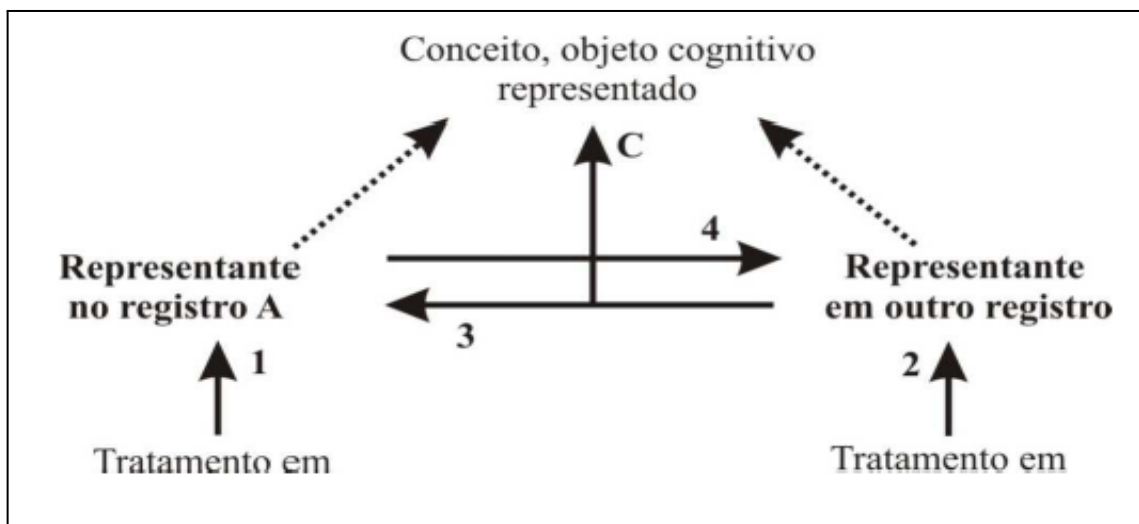
depende de uma relação de significação determinada pelo sistema da língua (ou pela percepção visual). (Duval, 2012).

Fazendo ou não a distinção dessas duas estruturas, Duval (2012) afirma que:

**[...] não duvida-se que o emprego de signos ou de representações de apenas um registro seja suficiente para que a sua significação funcione cognitivamente nos sujeitos que aprendem.** Dito de outro modo, a significação é postulada como sendo de imediato trans-registro, e como consequência as operações de conversão de representação de um registro ao outro parecem evidentes e negligenciadas em relação às operações de formação ou de tratamento de representações. (Duval, 2012, p. 281, grifo nosso).

Duval (2012) levanta então uma nova hipótese, esta vista como fundamental à TRRS quanto à conceitualização de uma representação: “[...] A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão.” (Duval, 2012, p.282). Nessa óptica, a Figura 5 sintetiza os movimentos de tratamento e conversão que ele chama de uso coordenado de dois registros.

Figura 5 – Hipótese fundamental de aprendizagem: estrutura da representação em função de conceitualização.



Fonte: Duval (2012, p. 282).

Na Figura 5, as setas 1 e 2 indicam as transformações de tratamento que ocorrem internamente em dois registros distintos e, as setas 3 e 4,

representando as conversões (mudanças externas) de um registro para o outro. A seta C, portanto, representa a compreensão integral de uma representação.

O esquema ilustrado pela Figura 5 confronta o caso mais simples de coordenação de dois registros. Segundo Duval (2012), uma coordenação entre três registros pode ser requisitada, como na álgebra linear, por exemplo.

Além disso, é possível notar, pela Figura 5, que “[...] **o representante de um registro pode ser considerado como o representante de outro registro**, como é o caso de uma relação entre texto e imagem” (Duval, 2012, p.282, grifo do autor).

Esse uso coordenado está longe de ser considerado algo natural aos estudantes. É importante ressaltar que, a ausência de coordenação dos registros não impede a compreensão do objeto ao todo, porém torna os conhecimentos adquiridos, pouco ou inutilizáveis em situações favoráveis e, com isso, a compreensão mono registro conduz a trabalhos onde não existe o controle de “sentido” para o que é realizado (Duval, 2012).

Em suma, se levarmos em conta a aprendizagem matemática por meio da semiose, o principal caminho para a conceitualização dos objetos implica fundamentalmente a coordenação de diferentes registros de representação semióticos.

## 2.2 MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES

As Múltiplas Representações (MR) podem ser definidas como a capacidade de representar um conceito científico de diferentes modos, visando com isso, permitir que os alunos se apropriem do significado dos conceitos (Prain; Waldrip, 2006). Isso acontece à medida que os estudantes se conectam e entendem as diversas formas de representação.

Em concordância, Laború e Silva (2011) complementam essa definição explicando que esses modos representacionais são entendidos como os meios (percursos) pelos quais a Diversidade Representacional pode ser comunicada, expressada, pensada ou executada. Por Diversidade Representacional, Trevisan Sanzovo (2017), durante sua retomada teórica de Multimodos e Múltiplas Representações, entende como as variadas classificações

dos modos de representar um objeto.

Um ensino que utiliza múltiplas formas de representação atende às necessidades e preferências cognitivas individuais dos alunos, funcionando como um andaime conceitual que facilita a construção de novos conceitos e a superação de obstáculos em representações mais abstratas (Laburú; Silva, 2011).

Dado que cada indivíduo tem um caminho único para construir significados, o uso da Diversidade Representacional se alinha com o princípio pedagógico atual, que considera as necessidades e preferências cognitivas individuais, permitindo que certas formas representacionais sejam mais eficazes na introdução ou no refinamento das ideias de um aluno, ajudando-o a superar dificuldades em representações mais abstratas (Laburú; Zompero; Barros, 2013).

De fato, a multiplicidade representacional desempenha um papel muito importante na compreensão de ideias e conceitos, podendo efetivamente melhorar a aprendizagem dos estudantes (Ainsworth, 2008). Trevisan Sanzovo (2017) afirma que o uso das MR permite aos alunos desenvolver significados mais complexos e profundos dos conceitos científicos. Essa abordagem enriquece não só a compreensão, mas também a aplicação desse conhecimento de maneira mais diversificada.

As diferentes formas representacionais podem descrever distintos aspectos de um mesmo objeto ou uma mesma ideia, cada uma oferecendo um traço próprio de significado (Trevisan Sanzovo, 2017). Lemke (1998a; 1998b) exemplifica isso mostrando que a linguagem verbal em si é pobre em descrever variáveis contínuas e relações quantitativas, assim como as imagens são pobres em expressar significados em categorias.

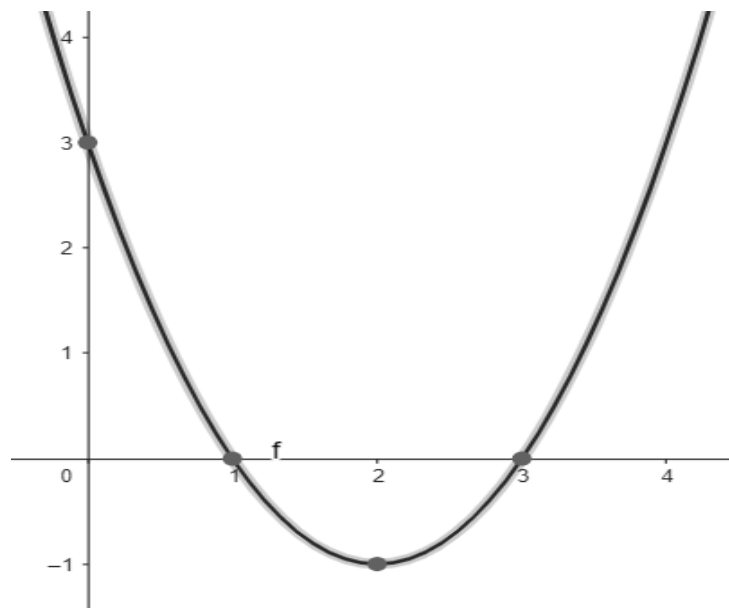
Alguns estudos, como por exemplo Ainsworth, Bibby e Wood (1997), concluem que o uso de mais de uma representação promove maior eficácia na aprendizagem dos estudantes, favorecendo o interesse para o objeto de estudo e prendendo sua atenção ao conteúdo. Estes últimos pesquisadores perceberam que, a conversão de uma representação para outra varia de acordo com a natureza delas. Utilizando representações imagéticas combinadas a representações matemáticas, propuseram que estudantes estimassem os resultados do cálculo de algumas operações fundamentais, identificando, assim, que embora todos os participantes fizessem as estimativas, somente os que receberam pares de

representações imagéticas e matemáticas aprenderam a estimar os cálculos com mais precisão.

Na Matemática, Laború e Faria (2018) notam ser comum a utilização intuitiva de representações, de forma não intencional, fazendo com que os estudantes possuam dificuldade na articulação perante a diversidade de representações que o objeto matemático pode tomar. A linguagem discursiva por exemplo, não fornece as mesmas possibilidades de uma figura ou diagrama, sendo assim, de um ponto de vista cognitivo, uma representação é parcial em relação aquilo que ela quer representar e, da mesma forma, entre um registro e outro, não são os mesmos conteúdos que são representados (Moretti, 2002). Observe a Figura 6, considerando as diferentes representações cartesianas de uma mesma parábola

Figura 6 – Diversidade representacional numa função quadrática.

- (a)  $y = x^2 - 4x + 3$
- (b)  $y + 1 = (x - 2)^2$
- (c)  $y = (x - 3)(x - 1)$
- (d) esboço da parábola no plano cartesiano



**Fonte:** adaptado de Moretti (2002, p.347).

Analisando cada uma destas representações na Figura 6, em sua integralidade, vemos que o mesmo objeto matemático foi representado de quatro maneiras distintas, sendo complementares às informações dos registros. De acordo com o visto, Moretti (2002) analisa que, do ponto de vista cognitivo, a informação se sobressai muito mais clara em (c), no qual podemos com clareza ver as raízes, em (b), as coordenadas do vértice da parábola, e em (d), um sistema semiótico diferente e bastante adequado à interpretação do fenômeno em questão.

Segundo Ainsworth (1999; 2006; 2014) existem três Funções Pedagógicas, não excludentes, que as representações podem desempenhar no processo de aprendizagem: *complementar*, *restringir* e *aprofundar*. O Quadro 2, adaptado de Ainsworth (2014) exemplifica cada uma destas funções, mostrando respectivamente em cada coluna o nome das funções, a definição do que se entende por cada uma e, em seguida, exemplos práticos de percepção destas.

Quadro 2 – Funções Pedagógicas das Múltiplas Representações.

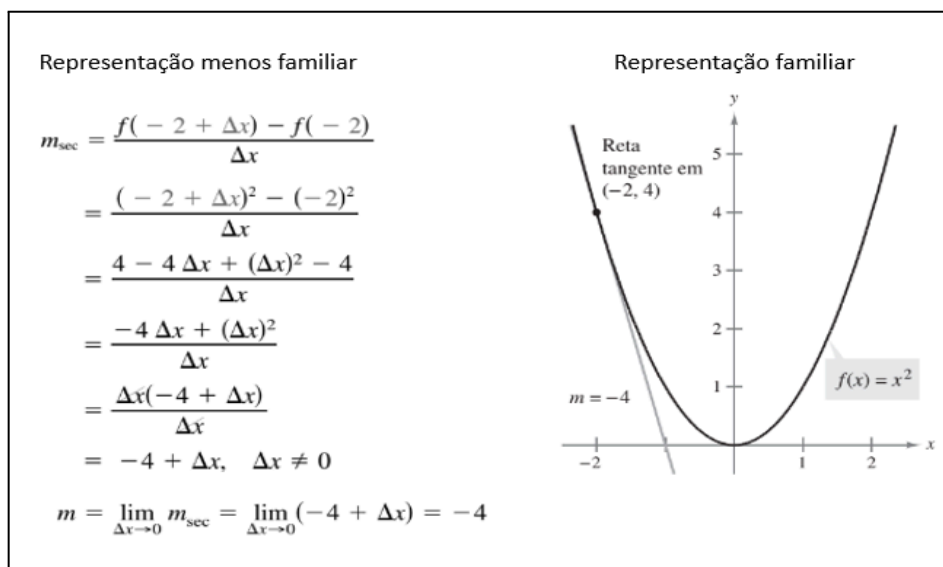
Função pedagógica	Função detalhada	Exemplo prático
Complementar	Complementa e aproveita a diferença das representações, apoiando o processo de aprendizagem e oferecendo apoio ao processo cognitivo.	Usar tabelas, equações e gráficos num simulador
Restringir	Utiliza-se uma representação conhecida/familiar ou de um nível mais fácil de compreensão, para auxiliar no entendimento de uma segunda representação mais aprofundada, ou seja, quando há uma complexidade no assunto ou em uma representação abordada, utiliza-se uma nova representação como restrição a interpretações equivocadas.	Fazer uso de uma animação concreta para apoiar um gráfico dinâmico
Aprofundar	A utilização de duas ou mais representações para que o aluno atinja uma compreensão mais profunda, na intenção de promover uma nova compreensão de um conhecimento mais profundo.	Relacionar gráficos de velocidade e espaço para entender mais sobre derivadas

Fonte: Adaptado de Ainsworth (2014, p.467).

Podemos dizer que a função complementar é entendida como tomar o proveito da diferença presente num sistema multirepresentacional, utilizando representações para mostrar a mesma informação de maneira combinada. Ao complementar representações, o aluno se beneficia das especificidades de cada uma destas, ao invés de condensar todo conteúdo em uma única forma, sendo possível simplificar cada representação individualmente. Trazendo para um exemplo matemático, ao determinar a Derivada de uma função por meio de uma representação algébrica, uma representação mais completa para manipulação, um aluno pode se apropriar das diferenças que uma representação gráfica lhe proporciona, como a visualização da continuidade da imagem e a variação do coeficiente angular dos pontos que a compõem.

Restringir, por sua vez, é fornecer para o estudante uma representação familiar ou de fácil compreensão visando a interpretação de outra representação menos familiar e/ou mais ambígua. Exemplificando, um estudante de Cálculo Diferencial e Integral irá ser introduzido ao conceito da Derivada de uma função e deverá determinar a inclinação de “ $f(x) = x^2$ ” no ponto  $(-2, 4)$ . A Figura 7 ilustra à esquerda que, para determinar a inclinação, será necessário encontrar o coeficiente angular em cálculos de representação algébrica (menos familiar) e, à direita, a representação familiar gráfica dessa inclinação.

Figura 7 – Exemplo da função Restringir no conceito de Derivada.



Fonte: adaptado de Larson (2010, p.111).

A terceira e última função pedagógica, aprofundar, sugere o uso de duas ou mais representações de modo integrado para a promoção de uma compreensão maior do conteúdo. Ainsworth (2014) afirma que, quando o estudante integra o uso da Diversidade Representacional, dada as circunstâncias, este obtém uma melhor percepção do objeto do que visualizando uma única representação. Ao fazer uso desta, nasce a capacidade de identificar os recursos invariantes que cada domínio representacional compartilha, bem como, suas características individuais. A título de exemplo, ao integrar a representação gráfica da Derivada, como a inclinação da reta tangente ao gráfico da função, com a algébrica, o resultado que confirma esta inclinação, o aluno pode ver claramente a conexão entre o cálculo algébrico da Derivada e a interpretação geométrica.

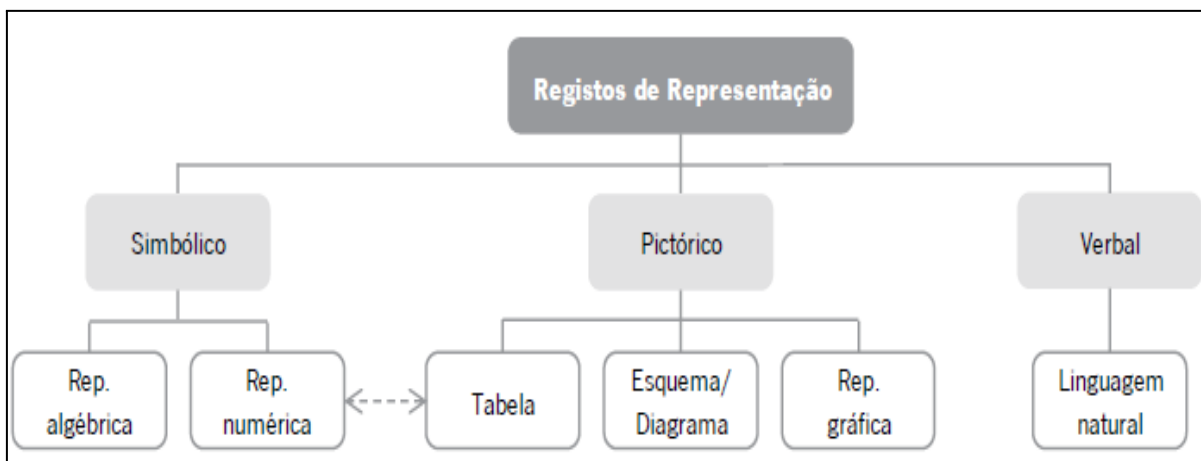
Diante do exposto, Ainsworth deixa claro que o uso de MR pode oferecer oportunidade para que estudantes abstraíam e obtenham melhores e mais aprofundadas compreensões.

### 2.3 VANTAGENS E DESVANTAGENS NO USO DE REGISTROS

Como já apresentado em seções anteriores, os registros de representação semióticos na aprendizagem Matemática se diferem de outras áreas do conhecimento, pois nesta, os objetos de estudo são abstratos e inacessíveis sem o auxílio de uma representação (Duval, 2009).

Um registro para Raymond Duval (2009) é um sistema semiótico com regras bem estabelecidas quanto à natureza dos elementos que a compõem e as manipulações que o mesmo permite. Embora ele defina quatro tipos de registros (algébrico, numérico, visual e verbal), seguiremos a classificação presente na Figura 8, adaptada de Bento (2022), que separa os registros em três categorias: Simbólico, Pictórico (chamaremos de imagético) e Verbal, seguido de suas subcategorias.

Figura 8 – Categorias de registros de representação semióticos.



**Fonte:** Bento (2022, p. 16).

Para além disso, surge o questionamento de quais possíveis registros poderíamos utilizar para a elaboração do nosso Produto Educacional, de maneira que pudéssemos aplicar os referenciais supracitados. Nesse sentido, adotamos a visão de Bento (2022), que fez uma releitura de diversas obras a respeito da utilização de cada um desses registros categorizados pela Figura 8. Assim, ela constrói um esquema que relaciona possíveis vantagens e desvantagens de representações específicas. Em outras palavras, o que se ganharia e perderia, na utilização de cada tipo de registro de representação semiótico em atividades matemáticas.

Complementando as indicações de vantagens e desvantagens do uso de representações de Bento (2022), acrescentamos as referências de Barros (2014), Lemke (1998a; 1998b) e Laburú; Silva (2011). O Quadro 3 apresenta tal leitura, mostrando, na primeira coluna, o registro, seguido da representação, das vantagens e das desvantagens nas colunas seguintes, respectivamente. Gostaríamos de ressaltar que as informações presentes no Quadro 3 foram utilizadas para fundamentar a elaboração e implementação das atividades presentes no Produto Educacional desta pesquisa. A escolha de cada registro presente na sequência de atividades foi fundamentada neste referencial de vantagens e desvantagens, pensando nas especificidades de cada representação e suas consequências para o processo de ensino e aprendizagem.

Quadro 3 – Possíveis vantagens e desvantagens dos registros representacionais semióticos (domínio das funções).

Registro	Representação	Vantagens	Desvantagens
Imagético (Pictórico)	Algébrica	V01 - É facilmente manipulável <sup>[a]</sup> ; V02 - Em muitos casos é a única representação que permite provar rigorosamente <sup>[a]</sup> ; V03 - Maior eficácia no cálculo da derivada num valor do domínio da função <sup>[b]</sup> ; V04 - Complementa a informação de outra representação (p.ex., da representação gráfica) <sup>[b]</sup> .	D01 - A precipitação para esta representação como um fim desprovê-a de propósito/sentido, devido ao elevado nível de abstração necessário para a compreender <sup>[a]</sup> ; D02 - Revela menos informação <sup>[b]</sup> ; D03 - Um uso com sentido requer a compreensão de conceitos ambíguos (p. ex., distinção entre variável, parâmetro, incógnita, etc.) e das “regras” (p. ex., das operações) <sup>[a]</sup> .
	Tabular	V05 - Pela sua estrutura são úteis para consultas pontuais ou na determinação de padrões e regularidade <sup>[a]</sup> ; V06 - Ajudam na atribuição de significado a conceitos algébricos (p. ex., a noção de variável dependente ou expressão) <sup>[a]</sup> ;	D04 - Oferece poucos dados da natureza da função <sup>[a]</sup> ; D05 - Pode sugerir generalizações erradas ao testar apenas alguns valores <sup>[a]</sup> e ao omitir valores “raros”.
	Gráfica	V07 - Permite “testar” mais casos que as representações numéricas ou tabulares <sup>[a]</sup> ; V08 - É intuitiva e de fácil interpretação até para os alunos com dificuldades em Álgebra <sup>[a]</sup> ; V09 - Auxilia a compreensão e visualização dos conceitos <sup>[b]</sup> ; V10 - Permite comparar a função com a sua derivada <sup>[b]</sup> ;	D06 - Não proporciona necessariamente valores exatos <sup>[a]</sup> ; D07 - Pode induzir conclusões precipitadas <sup>[a; b]</sup> ; D08 - Implica saber utilizar a calculadora gráfica <sup>[b]</sup> ; D09 - Uso isolado pode não ser suficiente para a aprendizagem <sup>[b]</sup> .
	Figural	V11 - Melhor indicadas para estabelecerem referências quantitativas que necessitem expressar grau <sup>[e]</sup> .	D10 - São pobres em expressarem significados em termos de categorias <sup>[c; d]</sup> .

<b>Verbal</b>	Linguagem natural	<p>V12 - Possibilita o estabelecimento de relações entre a Matemática e outras áreas, motivando os alunos <sup>[a]</sup>;</p> <p>V13 - Ajuda na passagem do concreto para o abstrato descrevendo os conceitos ambíguos <sup>[a]</sup>;</p> <p>V14 - Poderosa para expressar raciocínios semânticos, qualificar ideias ou realizar relações entre categorias <sup>[e]</sup>.</p>	<p>D11 - O fato de existirem termos específicos da Matemática comuns aos usados no dia a dia pode confundir os alunos, sobretudo quando o significado coloquial não for diretamente transponível <sup>[a]</sup>;</p> <p>D12 - Não permite efetuar manipulações de modo eficiente/claro e, em alguns casos, realizar qualquer transformação <sup>[a]</sup>;</p> <p>D13 - É pobre em descrever variações contínuas, questões complexas de relação quantitativa e de movimentos no espaço <sup>[c; d]</sup>.</p>
---------------	-------------------	---	---

Nota: <sup>[a]</sup> Bento (2022); <sup>[b]</sup> Barros (2014); <sup>[c]</sup> Lemke (1998a); <sup>[d]</sup> Lemke (1998b); <sup>[e]</sup> Laburú; Silva, (2011);

**Fonte:** adaptado de Bento (2022); Barros (2014); Lemke (1998a, 1998b) e Laburú; Silva.

### 3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Esta seção do trabalho é destinada a expor os métodos utilizados na pesquisa, o perfil dos participantes, o mapeamento de Produtos Educacionais e os procedimentos de coleta e análise dos dados.

#### 3.1 NATUREZA DA PESQUISA

O desenvolvimento desta pesquisa seguiu uma abordagem qualitativa, com o pesquisador atuando diretamente no ambiente cotidiano dos participantes. Isso permite que a coleta de dados seja guiada pela compreensão, utilizando ferramentas que proporcionaram um entendimento mais profundo do objeto de estudo (Vosgerau; Meyer; Contreras, 2017).

A pesquisa qualitativa possui algumas características como: o contato direto do pesquisador com o local de sua pesquisa para realizar observações, entrevistas, anotações, na busca por produzir dados; os dados recolhidos são descritivos, ou seja, em forma de palavras, transcrições de entrevistas, imagens, etc.; maior interesse pelo processo (procedimento) que pelos dados e resultados; não há necessidade de elaboração de hipóteses que virão a se confirmar no procedimento; e, por fim, a necessidade de trabalhar com a atribuição de significado dos participantes de uma abordagem qualitativa aos fatos e interpretações particulares (Bogdan; Biklen, 1994).

A pesquisa ocorreu por meio da implementação do Produto Educacional via um curso de formação inicial realizado no Campus de Jacarezinho da Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP)<sup>6</sup>. Tal curso foi constituído por etapas presenciais, síncronas<sup>7</sup> e assíncronas<sup>8</sup> e, os dados foram coletados a partir dos registros produzidos pelos participantes durante as atividades propostas na sequência e por meio da aplicação de questionário eletrônico via *Google Forms*.

---

<sup>6</sup> Para mais detalhes consultar a seção posterior denominada “Relato de Implementação do Produto Educacional”.

<sup>7</sup> Comunicação em tempo real, permitindo interação entre os interlocutores sem necessidade da presença física.

<sup>8</sup> Sem a necessidade de interações em tempo real, existindo um tempo maior para a comunicação dos interlocutores.

### 3.2 PARTICIPANTES DA PESQUISA

Quanto aos participantes, realizamos esta pesquisa com 10 professores em formação inicial do curso de Matemática com mais de 18 anos, que foram convidados presencialmente no próprio campus da instituição.

Os motivos pelos quais os participantes da pesquisa são professores em formação inicial foram, além do fornecimento de meios que auxiliem a aprendizagem de Derivadas com base nos referenciais adotados, a apresentação e introdução destes, fundamentados nos registros de representação, que se mostram extremamente relevantes para suas futuras práticas como professores de Matemática.

Para garantir o sigilo e a confidencialidade dos participantes nesta pesquisa, foi adotado um sistema de codificação alfanumérica. Cada um dos participantes foram identificados com um código único composto por uma letra seguida de números sequenciais, sem qualquer relação direta com dados pessoais que possam identificá-los como, por exemplo, "P01", "P02", "P03", e assim por diante. Essa codificação permitiu que os dados fossem organizados de forma clara e objetiva, preservando o anonimato e garantindo a proteção das informações pessoais durante todas as etapas da investigação.

Além disso, todas as informações pessoais que pudessem identificar os participantes foram armazenadas separadamente em um arquivo confidencial, acessível apenas à equipe de pesquisa responsável. Em nenhum momento os nomes ou outras informações identificáveis dos participantes foram associados diretamente aos dados coletados. Assim, todas as análises e interpretações dos resultados foram feitas com base nos códigos atribuídos, assegurando que a identidade dos participantes permanecesse protegida durante a realização e apresentação dos resultados da pesquisa.

Vale salientar que todos os participantes assinaram o TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice A). Além disso, o protocolo de pesquisa foi submetido e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP) sob o parecer nº 6.541.969.

### 3.3 DESENVOLVIMENTO DO PRODUTO EDUCACIONAL

A presente seção aborda a sistematização do Produto Educacional (PE) da pesquisa, disponível na íntegra em: <https://www.uenp.edu.br/mestrado-ensino>. Para mais informações, entrar em contato com pesquisador via e-mail: "gui\_sxw@hotmail.com".

### 3.3.1 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES PARA O ENSINO DE DERIVADA: UM MAPEAMENTO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS

Visto o aporte teórico apresentado nas seções anteriores e o objetivo principal da pesquisa de entender os benefícios e modos de utilização da TRRS e MR na aprendizagem de Cálculo (mais especificamente do conteúdo de Derivadas), realizamos um mapeamento dos PE criados com essas referências para auxiliar o entendimento do uso dessas teorias e o que já se tem publicado a seu respeito.

#### 3.3.1.1 JUSTIFICATIVA DO MAPEAMENTO

Visto a dificuldade de aprendizagem de conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral levantada por Viseu (2017) e, motivados pelos pressupostos da TRRS e pelas MR, apresentados nas sessões teóricas desta dissertação, a presente sessão buscou realizar um Mapeamento Sistemático procurando responder à seguinte questão investigativa: *Quais Produtos Educacionais utilizam a TRRS e/ou as MR para o ensino das Derivadas de uma função?*

Para responder esta indagação, delimitamos como objetivo mapear a presença destes pressupostos em PE elaborados em programas de Pós-Graduação Profissionais do Brasil, cujo procedimento metodológico é descrito em detalhes na próxima seção.

#### 3.3.1.2 MATERIAIS E MÉTODOS DO MAPEAMENTO

O mapeamento utilizou a abordagem qualitativa que, segundo Bogdan e Biklen (1994), possui algumas características como: o contato direto do

pesquisador com o local de sua pesquisa para realizar observações, entrevistas, anotações, na busca por produzir dados; os dados recolhidos são descritivos, ou seja, em forma de palavras, transcrições de entrevistas, imagens, etc.; maior interesse pelo processo (procedimento) que pelos dados e resultados; não há necessidade de elaboração de hipóteses que virão a se confirmar no procedimento; e, por fim, a necessidade de trabalhar com a atribuição de significado dos participantes de uma abordagem qualitativa aos fatos e interpretações particulares.

Para tanto, foram utilizados os pressupostos do Mapeamento Sistemático de Literatura (MSL) de Kitchenham e Charters (2007) para o desenvolvimento da investigação proposta.

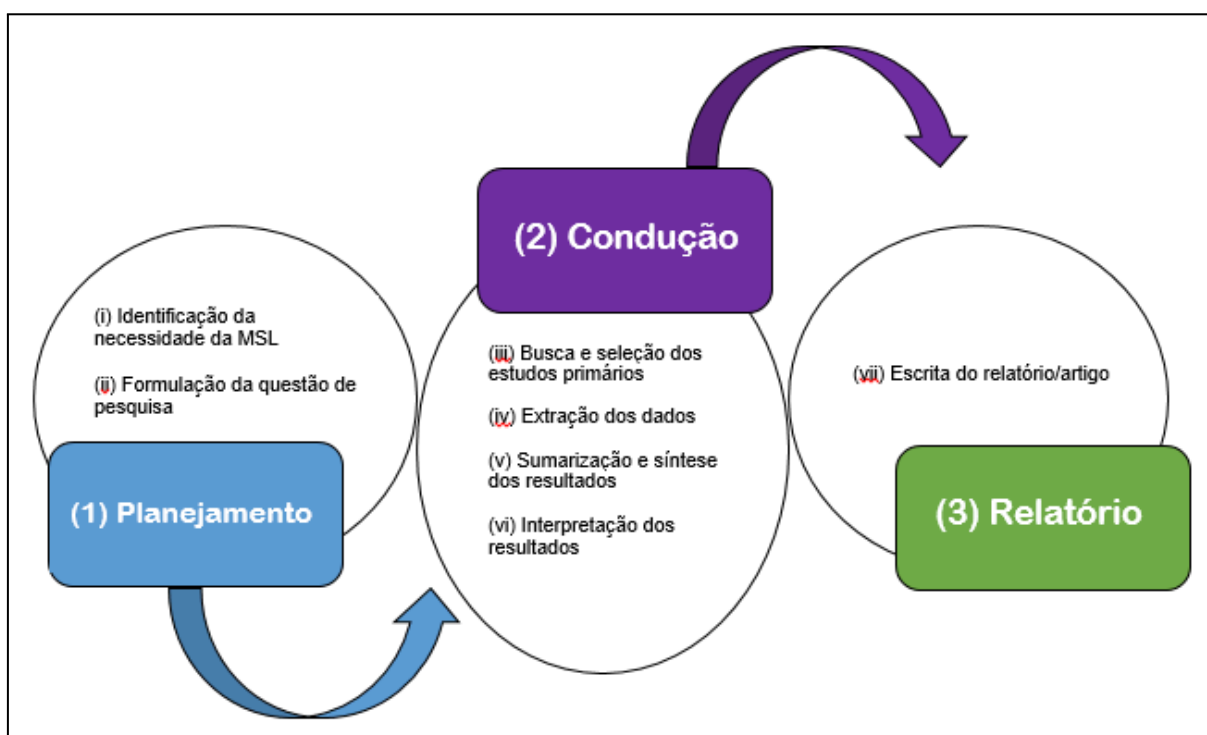
Segundo esses autores, o MSL é um método estruturado de investigação que visa identificar, classificar e sintetizar evidências disponíveis sobre um determinado tema de pesquisa, proporcionando uma visão geral da área estudada. Diferente de uma revisão sistemática, que busca responder a uma questão específica e aprofundada, o MSL tem como objetivo mapear o estado da arte, identificando tendências, lacunas e oportunidades para futuras investigações. Essa abordagem é especialmente útil quando há poucas evidências consolidadas ou quando se deseja obter um panorama amplo antes de formular estudos mais focados. No presente trabalho, o protocolo do MSL foi adaptado para contemplar a busca, seleção, categorização e análise de PE relacionados ao ensino de Derivadas fundamentados na TRRS e/ou MR no contexto dos Programas de Pós-Graduação Profissionais no Brasil.

De acordo com Moher, Stewart e Shekelle (2015), o MSL foi pensado como uma forma de visitar a bibliografia produzida na intenção de obter uma visão mais ampla da área de pesquisa, direcionando assim seu foco para uma categorização de tópicos que despertam o interesse de possíveis novas pesquisas.

Entende-se também que o método de MSL é viabilizado para a condução de trabalhos que contêm tópicos de pesquisa com poucas evidências disponíveis na bibliografia para o pesquisador (Kitchenham; Charters, 2007).

A Figura 9 resume o protocolo por meio do qual se tem três etapas principais, cada uma delas com suas atividades particulares, sendo elas: (1) Planejamento, (2) Condução e (3) Relatório.

Figura 9 – Fases e atividades do processo de execução do Mapeamento Sistemático da Literatura.



**Fonte:** Adaptado de Demerval, Coelho e Bittencourt (2020, p. 5).

Durante a etapa inicial de planejamento, o primeiro passo a se tomar é identificar a necessidade da elaboração de uma revisão ou mapeamento, para que, como em toda pesquisa, ocorra a formulação das questões que despertam essa necessidade. Assim, o atual mapeamento se justifica pois busca entender nos Programas de Pós-Graduação Profissionais (mestrado e doutorado) do Brasil, quais são os PE que versam sobre os referenciais teórico-metodológicos descritos anteriormente, para que possamos analisar e mapear como foram desenvolvidos na finalidade do ensino de Derivadas de uma função.

Concluída a etapa de planejamento, começamos propriamente a condução da revisão/mapeamento com a etapa de busca e seleção dos estudos primários através do estabelecimento de critérios que irão definir os trabalhos que fazem ou não parte da hipótese levantada na pergunta de pesquisa.

Segundo Moreira (2004), um PE é, juntamente com a pesquisa (dissertação ou tese), um pré-requisito de conclusão de um curso de Pós-Graduação Profissional (mestrado ou doutorado).

É possível identificar nos PE um caráter autônomo em relação à pesquisa, mesmo sendo elaborado a partir dela, a produção educacional possui autonomia e replicabilidade, com a finalidade de compartilhar experiências com profissionais da área (Niezer *et al.*, 2015).

Um PE precisa possuir relevância às práticas presentes nos contextos educacionais de nosso país ou região. Na Ficha de Ensino (Brasil, 2020), a CAPES orienta 10 possíveis tipologias para as produções técnicas: PTT1 – Material didático/instrucional; PTT2 – Curso de formação profissional; PTT3 – Tecnologia social; PTT4 – *Software*/aplicativo; PTT5 – Evento organizado; PTT6 – Relatório técnico; PTT7- Acervo; PTT8 – Produto de comunicação; PTT9 – Manual/protocolo; PTT10 – Carta, mapa ou similar (Pinheiro; Aires, 2022).

Com relação à busca e seleção dos PE, tal tarefa se constituiu um desafio pois, nem todos os programas de Pós-Graduação Profissionais utilizam o *EduCapes* como repositório principal. Além disso, o próprio *EduCapes*, durante o período de coleta dos dados (coleta prévia exploratória realizada em novembro de 2023; coleta oficial dos dados realizada em março de 2024), apresentou-se como uma ferramenta contraprodutiva na obtenção dos PE relacionados à nossa pesquisa. Assim, para a obtenção dos dados, decidimos encontrar, primeiramente, dissertações e/ou teses de Programas de Pós-Graduação Profissionais que abordassem os descritores escolhidos para depois obtermos os respectivos PE associados a eles.

Destarte, para a busca e seleção dos PE, utilizamos a Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD – IBICT)<sup>9</sup> e o Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES<sup>10</sup> como base de dados para as dissertações e teses e, em ambas as bases, utilizamos descritores que dizem respeito aos referenciais da TRRS e/ou MR aplicadas ao ensino de Derivadas de uma função que desejávamos mapear. Em outras palavras, utilizamos as seguintes *strings*<sup>11</sup>: (i) “Semiótica Duval”; (ii) “Semiótica” and “Cálculo”; (iii) “Semiótica” and “Derivada”; (iv) “Múltiplas Representações” and “Derivada”; (v) “Múltiplas Representações” and “Cálculo”.

---

<sup>9</sup> Disponível em: <https://bdt.d.ibict.br/vufind/>, acesso em 02 de setembro de 2024.

<sup>10</sup> Disponível em: <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#/>, acesso em 02 de setembro de 2024.

<sup>11</sup> Em programação, uma string (cadeia de caracteres, ou ainda, junção de descritores) é um tipo de dado que representa uma sequência de caracteres alfanuméricos, como letras, números e símbolos, útil na realização de investigações de revisão e/ou mapeamento em pesquisas científicas.

Após a estruturação das *strings* por meio dos descritores escolhidos e remoção das duplicatas presentes nas bases de busca, delimitamos quais seriam os critérios de inclusão e exclusão dos estudos buscados, para que assim, pudéssemos aplicá-los em cada estudo retornado e identificar quais estavam atrelados à questão norteadora da pesquisa.

Para tanto definimos como *critérios de inclusão ao corpus* do mapeamento os PE de dissertações e/ou teses de Programas Profissionais que versassem sobre o ensino do conteúdo de Derivadas de uma função e utilizassem como referencial a TRRS e/ou as MR publicadas nos últimos 20 anos.

Por sua vez, os *critérios de exclusão* foram: possuir links inacessíveis ou acesso restrito; não ser uma dissertação e/ou tese de Programa de Pós-Graduação Profissional; não possuir um PE; não versar sobre o ensino do conteúdo de Derivadas de uma função; não versar sobre os referenciais teórico-metodológicos da TRRS e/ou das MR; ter um ano de publicação superior a 20 anos da data desta pesquisa.

Assim, para responder à questão levantada inicialmente, investigamos cada PE para entendermos como se utilizavam dos referenciais teórico-metodológicos para o ensino de Derivada de uma função, bem como, a tipologia do PE. A etapa final de síntese e análise dos dados está presente na sessão posterior.

### 3.3.1.3 RESULTADOS E DISCUSSÕES DO MAPEAMENTO

Durante a etapa da busca e seleção de dados nas bases de busca encontramos, dentre todas as *strings* utilizadas, um total de 235 estudos na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD – IBICT) e 147 estudos no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, totalizando 382 estudos.

O Quadro 4 mostra quantos trabalhos foram retornados na aplicação de cada um dos descritores em cada base de busca (BDTD e CAPES), apresentando na primeira coluna as *strings*, seguido do nº de trabalhos encontrados na base da BDTD, nº de trabalhos encontrado na base da CAPES e a somatória de ambas as bases nas colunas seguintes, respectivamente.

Quadro 4 – Quantitativo de Dissertações e Teses (BDTD e CAPES) verificados no mapeamento.

<b>Strings</b>	<b>Nº de trabalhos na BDTD - IBICT</b>	<b>Nº de trabalhos no Catálogo da CAPES</b>	<b>Ambas bases de busca</b>
“Semiótica Duval”	12	7	19
“Semiótica” e “Derivada”	125	77	202
“Semiótica” e “Cálculo”	91	53	144
“Múltiplas Representações” e “Derivada”	4	5	9
“Múltiplas Representações” e “Cálculo”	3	5	8
<b>Total de resultados</b>	<b>235</b>	<b>147</b>	<b>382</b>

**Fonte:** os autores.

Aplicados todos os critérios de inclusão e exclusão de trabalhos (delimitados na sessão anterior) o número de trabalhos que compuseram o *corpus* foi de 4 PE. O Quadro 5 sintetiza os PE pertencentes ao *corpus* do mapeamento que apresenta, na primeira coluna o nº sequencial (aleatório) do PE, seguido do(s) autor(es), título do PE, nome do Programa de Pós-Graduação Profissional e tipologia do PE nas colunas seguintes, respectivamente.

Quadro 5 – PE que compuseram o *corpus* da pesquisa de mapeamento.

<b>Nº</b>	<b>Autor(es) (ANO)</b>	<b>Título do PE</b>	<b>Programa</b>	<b>Tipologia</b>
[1]	WAIDEMAN ; CARGNIN (2018a)	Do papel à tela do celular: um aplicativo para os estudos de derivadas.	(UTFPR-LONDRINA) Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática	PTT4-Software/ Aplicativo

[2]	WAIDEMAN ; CARGNIN (2018b)	Caderno de questões para o estudo de derivadas	(UTFPR-LONDRIN A) Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática	PTT1- Material didático/ instrucional
[3]	MARQUES; SILVA (2009)	Sobre a utilização do livro didático no estudo de Derivadas Parciais	(PUC-SP) Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática	PTT1- Material didático/ instrucional
[4]	MATEUS; AG ALMOULOU D (2006)	Cálculo Diferencial e Integral nos livros didáticos: uma análise do ponto de vista da organização praxeológica	(PUC-SP) Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática	PTT1- Material didático/ instrucional

**Fonte:** os autores.

Como visto pelo Quadro 5, é possível identificar uma predominância da tipologia PTT1 – Material didático/instrucional em 3 estudos e, somente um PTT4 – Software/aplicativo. Tais números apontam uma tendência das pesquisas da área da pesquisa em Ensino. Segundo a Capes, o PTT1 – Material didático/instrucional:

[...] são propostas de ensino, envolvendo sugestões de experimentos e outras atividades práticas, sequências didáticas, propostas de intervenção, roteiros de oficinas; material textual, como manuais, guias, textos de apoio, artigos em revistas técnicas ou de divulgação, livros didáticos e paradidáticos, histórias em quadrinhos e similares, dicionários; mídias educacionais, como vídeos, simulações, animações, vídeo aulas, experimentos virtuais e áudios; objetos de aprendizagem; ambientes de aprendizagem; páginas de internet e *blogs*; jogos educacionais de mesa ou virtuais, e afins (Brasil, 2020, p. 13).

Já o PTT4 – Software/aplicativo, compreende-se por

[...] aplicativos de modelagem, aplicativos de aquisição e análise de dados, plataformas virtuais e similares, programas de computador, entre outros (Brasil, 2020, p. 13).

Todos os quatro PE pertencentes ao *corpus* do mapeamento fundamentaram seus respectivos referenciais teórico-metodológicos na TRRS de Raymond Duval relacionados à Derivada de uma função. Tal fato aponta que, apesar da fundamentação teórica e as demais pesquisas justificadas em nossa seção introdutória indicarem as MR como um referencial efetivo para as pesquisas em ensino de Derivadas, nenhum dos PE mapeados se pautou formalmente nela, estando de acordo com o constatado em pesquisa recente envolvendo artigos da área, que concluíram que poucas investigações dessa linha de pesquisa o fazem (Fregonesi; Trevisan Sanzovo, 2024).

Analisando os PE mapeados percebemos que [1] e [2] pertencem a uma mesma dissertação de mestrado profissional, sendo produções complementares de uma mesma pesquisa. Em [1] as autoras desenvolveram um aplicativo móvel para o estudo de Derivadas fundamentado em Duval e a TRRS. Este último sendo composto por duas fases, a primeira chamada de *Questões de Aquecimento* com perguntas que englobam conceitos gerais da Derivada de uma função real de variável real, já a segunda fase, *Questões de Aprofundamento*, busca trabalhar diferentes conceitos de Derivadas, enfocando a representação gráfica, tratamentos e conversões com problemas desenvolvidos à luz de Duval.

O produto destacado como [2] se mostra um produto auxiliar a [1], demonstrando quais as questões que estão presentes no aplicativo. Nele, encontramos as mesmas duas etapas descritas pelo aplicativo anteriormente, nota-se uma grande tendência pela utilização do registro gráfico na visualização dos problemas das Derivadas presentes nas questões, problemas estes que envolvem temas como: as definições de Derivada na forma geométrica, de velocidade instantânea, de taxa de variação instantânea, utilizando funções reais, problemas de crescimento e decrescimento, pontos críticos de máximo local e mínimo local, etc.

Em [3] identificamos que o PE se enquadra na categoria de PTT1 por ser uma análise fundamentada em Duval sobre a utilização de livros didáticos em alunos na aprendizagem de Derivadas parciais. A pesquisa revelou que os estudantes priorizam o registro algébrico em suas resoluções, sendo essa representação tida como o principal registro, mostrando um papel auxiliar às demais. A maioria dos alunos apresentou um desempenho relativamente bom nos

tratamentos dos registros algébricos, porém foram expressas grandes dificuldades quando o objeto era representado em língua natural.

Nesse mesmo sentido, observamos em [4] uma análise de livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral pautada tanto na TRRS de Duval, quanto na Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999) e na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1997). Duval foi utilizado, nesse caso, para avaliar o grau de articulação entre os registros presentes nos livros selecionados, a análise mostrou que os registros monofuncionais são mais recorrentes, visto que os tratamentos destes são algoritmizáveis, sendo a representação discursiva (língua natural) de sistemas de escrita algébrica a predominante. Por fim, os livros não asseguram a realização plena da coordenação entre os registros de representação semiótica. E, como consequência, podem não proporcionar a compreensão genuína dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral ou levar a confundir os objetos matemáticos em causa com suas representações, pois eles são acessíveis por meio da representação semiótica, sendo assim a distinção entre a representação e o objeto representado só é possível se tal representação é diversificada.

#### 3.3.1.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO MAPEAMENTO

Percebemos a presença da TRRS no ensino de Derivadas em quatro trabalhos que compuseram nosso *corpus* do mapeamento. Destes, identificamos a produção de um aplicativo fundamentado em Duval (TRRS) para o ensino de Derivadas; um material auxiliar à utilização deste aplicativo; e duas análises de livros de Cálculo quanto aos Registros de Representações Semiótica.

Quanto ao conteúdo do *corpus* do mapeamento, pudemos perceber questões de extrema importância no que diz respeito ao Ensino e Aprendizagem de Derivadas à luz da TRRS, questões como em [1] e [2] a abordagem dos conceitos formais de uma Derivada utilizando uma predominância de registros gráficos, também a predominância, em [3], da escolha dos alunos pelo uso do registro algébrico na resolução de questões desse conteúdo específico, e por fim, em [4], além de perceber o protagonismo do registro em língua natural em atividades presentes em livros didáticos, aponta o problema da não coordenação de registros

nestes materiais analisados, o que leva à não distinção entre o objeto matemático e suas representações, questão essa tida como fundamental na TRRS.

Foi observado também, uma escassez significativa de materiais fundamentados nas teorias que nos propomos a mapear. Embora a TRRS seja amplamente reconhecida por destacar a importância da coordenação entre diferentes registros de representação semiótica para a compreensão matemática, como gráficos, tabelas e expressões algébricas, poucos produtos educacionais abordam explicitamente o estudo das Derivadas a partir dessa perspectiva. Esse cenário revela uma lacuna importante no desenvolvimento de recursos didáticos que possam auxiliar os alunos a transitar entre diferentes formas de representação no contexto do cálculo diferencial.

Destacamos também o fato de nenhum PE neste mapeamento abordar as MR, apesar desta se alinhar à ideia de coordenação entre diferentes modos de representar os objetos matemáticos. A ausência de tais recursos em materiais educacionais voltados para o ensino de Derivadas limita as possibilidades de promover uma compreensão mais profunda e diversificada desse conceito matemático, especialmente no que diz respeito à habilidade dos alunos de traduzir e conectar diferentes formas de representação. Pensando nessa lacuna e, visto a necessidade do desenvolvimento de materiais que integrem estas teorias que, à primeira vista, se mostram complementares, embasamos a realização desta pesquisa.

### 3.3.2 Sistematizando a Sequência de Atividades do PE

A estruturação da Sequência de Atividades (SA) do PE associado a esta dissertação levou em consideração os referenciais da TRRS e das MR. Assim, foi pensada num sentido de oferecer uma aprendizagem em que, inicialmente, o estudante compreendesse o conceito formal do que é uma Derivada, como aplicá-lo para a obtenção de diversas Derivadas de funções matemáticas usuais, aprofundar o conteúdo com a análise de pontos críticos e, por fim, aplicar em situações problema contextualizadas.

Assim, elaboramos a SA conforme sintetizada pelo Quadro 6, que mostra, em sua primeira coluna suas etapas, bem como a atividade que será

desenvolvida, seguido dos objetivos, das representações que foram utilizadas na atividade em questão, e a quantidade de aulas previstas para a aplicação nas colunas seguintes, respectivamente.

Quadro 6 – Estrutura geral das etapas da sequência de atividades do PE.

<b>Etapas</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Representações</b>	<b>Aulas</b>
Atividade 1: Construção do conceito formal da Derivada como um limite	Interpretar o conceito formal de uma Derivada através da conversão de um registro gráfico para um registro algébrico	Algébrico Gráfico Língua natural	2
Atividade 2: Regras de Derivação das funções matemáticas	Identificar e utilizar as regras de derivação de algumas funções matemáticas	Algébrico Gráfico Língua natural Tabular	2
Atividade 3: Máximos e mínimos de uma função contínua (Pontos críticos)	Aplicar os conceitos de Derivada a fim de encontrar pontos de máximos e mínimos numa função contínua	Algébrico Gráfico Língua natural	2
Atividade 4: Otimização do volume de uma caixa	Utilização do conceito de Derivada aplicado ao máximo de uma função volume do sólido geométrico	Algébrico Figural Língua natural	2
Atividade 5: Otimização do lucro de uma empresa	Utilização do conceito de Derivada aplicado ao máximo de uma função lucro de uma empresa	Algébrico Gráfico Língua natural	2

**Fonte:** os autores.

A primeira etapa desenvolvida é justamente a construção do conceito formal da Derivada utilizando um limite. Com o auxílio do *software* GeoGebra, é apresentado o conceito geométrico com uma representação gráfica de dois pontos de uma parábola, explanando a aproximação destes pontos até tenderem a zero. Construído esse conceito, os participantes devem resolver problemas ao final do encontro para encontrar algebricamente e graficamente as Derivadas de funções.

Para a continuação da etapa seguinte, é importante que ocorra o *feedback* da primeira atividade, pois o mesmo pode auxiliar na continuidade da sequência. Assim, é proposto a criação de uma tabela com algumas funções polinomiais e suas Derivadas, utilizando o conhecimento da Etapa 1. Ressaltando sempre a necessidade da promoção de diversidade representacional, nesta atividade espera-se que o aluno crie vínculo com as principais Derivadas e, ao mesmo tempo, desprenda do conceito de limite, que por vezes se mostra trabalhoso, para a notação direta de uma Derivada.

Nesse momento, já familiarizado com a obtenção da Derivada de funções, partimos na terceira atividade para a conceitualização de pontos críticos das funções (máximos e mínimos), uma aplicação direta à Geometria desse conteúdo visitado durante a SA.

Nas duas atividades seguintes (4 e 5) são utilizadas aplicações práticas dos pontos críticos de uma função, estabelecendo relações com o fenômeno de otimização. A otimização é um ramo fundamental da Matemática aplicada e da Ciência da Computação que se dedica a encontrar as melhores soluções para problemas de decisão. Em termos simples, ela busca maximizar ou minimizar uma determinada função objetivo, que depende de um conjunto de variáveis. Nos problemas de otimização, frequentemente utilizamos Derivadas para encontrar máximos e mínimos de funções. Para isso, é sugerido que se encontre a Derivada da função objetivo e a iguale a zero para a determinação dos pontos críticos. Dessa forma, na atividade 4 podem surgir problemas de otimização das dimensões de sólidos geométricos e, na última etapa, é possível relacionar a otimização com o cálculo de lucro de uma empresa, promovendo uma abordagem interdisciplinar com conceitos financeiros.

Seguindo os princípios dos referenciais das MR e TRRS, os trechos extraídos na sessão de análise das atividades "Construção do conceito formal da Derivada como um limite", "Regras de Derivação das funções matemáticas", "Máximos e mínimos de uma função contínua (Pontos críticos)", "Otimização do volume de uma caixa" e "Otimização do lucro de uma empresa" gerando um total de 113 registros produzidos pelos participantes.

### 3.3.3 Relato de Implementação do Produto Educacional

O desenvolvimento deste PE ocorreu por meio de um processo articulado de organização e planejamento entre os autores (orientando e orientador) e os professores da universidade na qual a SA foi validada. Esses docentes disponibilizaram o espaço de suas aulas para a realização da pesquisa junto aos estudantes do primeiro ano do curso de Matemática (Licenciatura). Ressalta-se que a escolha desse grupo de participantes se justifica pelo fato de ainda não terem cursado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, prevista na grade curricular apenas a partir do segundo ano, o que garante que a experiência vivenciada estivesse livre de influências prévias relacionadas ao conteúdo investigado.

A implementação da sequência ocorreu em quatro encontros presenciais, um encontro síncrono via *Google Meet* e uma atividade assíncrona. As cinco atividades propostas na sequência foram todas desenvolvidas presencialmente em sala de aula. Os dois primeiros encontros tiveram caráter introdutório, com foco em uma abordagem mais teórica e explicativa do conteúdo. No terceiro encontro, buscou-se mobilizar as habilidades trabalhadas anteriormente, direcionando-as para a prática do conceito de Derivada. Já o quarto e último encontro, realizado em um período estendido de quatro aulas cedidas pelo professor responsável, foi dedicado à resolução das duas últimas etapas, centradas em situações-problema aplicadas ao tema das Derivadas.

Dado o caráter mais prático dos últimos encontros, realizamos, ao final do quarto encontro, uma entrevista com os participantes da pesquisa. O objetivo dessas entrevistas foi observar e compreender as escolhas feitas por cada participante quanto aos registros utilizados na resolução das atividades, buscando, assim, inferir possíveis Funções Pedagógicas das MR na realização dos problemas matemáticos. Destaca-se que a opção por esse encontro específico se deu pelo fato de os encontros iniciais apresentarem um caráter predominantemente teórico, uma vez que os alunos ainda não conheciam previamente o conteúdo.

Quanto ao encontro síncrono, após finalizar a implementação da sequência de atividades, foi realizada uma aula expositiva à respeito das teorias que fundamentam esse estudo (TRRS e MR). O objetivo principal que permeia esta aula é de introduzir os participantes do estudo – futuros professores – a essas teorias da

aprendizagem matemática, para que assim possam expandir seus conhecimentos metodológicos para a profissão a qual estão licenciando.

Por fim, a última etapa da implementação foi uma lista de exercícios enviada de forma assíncrona visando reforçar as habilidades trabalhadas na sequência. Vale ressaltar que essa lista está prevista como meio avaliativo da quinta e última etapa do PE.

De modo geral, o processo transcorreu conforme o planejado: a maioria dos participantes desenvolveu as atividades propostas com elevado engajamento, contribuindo para tornar as aulas mais dinâmicas por meio de dúvidas, questionamentos e discussões. O principal desafio enfrentado, entretanto, foi a evasão e a ausência de alguns estudantes ao longo dos encontros. Parte dos licenciandos faltou em um dos dias da aplicação, não fazendo parte da pesquisa, assim como uma outra parte compareceu apenas no primeiro encontro e, por motivos diversos, desistiram posteriormente.

### 3.4 INSTRUMENTO PARA COLETA E ANÁLISE DOS DADOS

A coleta dos dados ocorreu por meio da implementação da SA do PE associado a esta dissertação, tendo como principal via de dados os registros produzidos pelos participantes durante as atividades propostas por ela.

Também foram coletados dados em entrevistas após o desenvolvimento de algumas atividades do PE, que dizem respeito à possibilidade de inferência das funções pedagógicas das MR no uso e/ou conversão dos registros de representação semióticos de algumas uma etapas da SA. Por fim, alguns dados foram coletados em etapas *on-line* utilizando questionários eletrônicos via *Google Forms*.

O processamento e armazenamento desses dados estão estritamente condicionados ao pesquisador de modo que não se possa fazer a identificação de suas respectivas grafias, os endereços de e-mail dos participantes foram salvos em arquivo separado das respostas do questionário e, em ambos arquivos, o participante foi identificado pelo mesmo código.

Quanto aos dados coletados, o pesquisador armazenou em um computador de controle pessoal e em uma nuvem virtual de arquivos, sendo que

estes serão arquivados por um período de 5 anos seguindo a resolução CNS 466/12, e, em sequência, os dados produzidos em folha durante a pesquisa foram fragmentados e descartados assim como os dados virtuais também serão completamente excluídos tanto do computador, quanto da nuvem de armazenamento do pesquisador. Os participantes têm direito de indenização e ressarcimento por qualquer e eventual dano não previsto.

Para a análise dos dados utilizamos os pressupostos das TRRS e das Funções Pedagógicas das MR.

## 4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

A seguir, apresentamos a análise dos dados obtidos separados por cada uma das etapas da SA, apontando registros, conversões e trechos da entrevista produzidos pelos participantes durante a aplicação do PE.

### 4.1 ETAPA 1

Na Etapa 1, a temática abordada foi: “A construção do conceito formal de uma Derivada por meio de um limite”. Sendo assim, uma situação inicial envolvendo o problema da velocidade instantânea foi introduzido aos participantes para que, durante o processo de construção do conceito, pudessem compreender com maior efetividade a teoria e o cálculo de uma Derivada por um limite de um intervalo tendendo a zero.

O Quadro 7 resume nossa análise das resoluções da situação-problema da Etapa 1 de cada um dos participantes no formato de categorias, relacionando o uso adequado e inadequado das operações de tratamento e conversão dos registros usados. Na primeira coluna do Quadro 7 estão as categorias emergentes da análise dos dados produzidos por cada participante, nas colunas seguintes, respectivamente, estão a definição da categoria, os participantes que se enquadraram e os tipos de registros que utilizaram.

Quadro 7 – Síntese da análise geral da Etapa 1

<b>Categoria</b>	<b>Definição</b>	<b>Participantes</b>	<b>Registros</b>
C1 – Conversão Adequada	O participante realizou um processo adequado de conversão de registros	P05	-Algébrico; -Língua natural.
C2 – Tratamento Adequado	O participante realizou um processo adequado de tratamento de um registro e obteve o resultado corretamente	P10	-Algébrico.

C3 – Tratamento Inadequado I	O participante cometeu equívocos relacionados à aplicação do conceito de limite nos processos de tratamento de registro e obteve um resultado incorreto	P01; P03; P04; P06; P07; P08; P09	-Algébrico.
C4 – Tratamento Inadequado II	O participante cometeu equívocos relacionados aos processo algébrico de retirada da indeterminação do limite e obteve um resultado incorreto	P02; P06; P09	-Algébrico

**Fonte:** os autores.

Cada um dos 10 participantes da pesquisa realizou suas resoluções do problema de velocidade instantânea proposto. Abaixo estão as análises das resoluções de cada integrante. As setas azuis indicam as operações de tratamento e as setas amarelas as conversões de registros que cada estudante realizou ao longo das resoluções.

Começando pelo P01 que fez uso de um registro algébrico apresentado pela Figura 10. Notamos que P01 cometeu equívocos de tratamento algébrico durante a resolução do problema. Em seu tratamento, quando vai trabalhar o conceito de limite da função tendendo a zero, a substituição do domínio da função está incorreto ( $t^2+t$ ), interferindo no resultado final da solução. Dessa forma, devido ao tipo de equívoco deste participante, torna-se parte da Categoria 3 da análise (Tratamento Inadequado I), entendida por englobar os participantes que cometeram equívocos relacionados à aplicação do conceito de limite nos processos de tratamento de registro e obteve um resultado incorreto.

Figura 10 – Resolução da Etapa 1 do P01

$s(t) = t^2 + t$   
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h)^2 - t}{h}$   
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{t^2 + 2 \cdot t \cdot h + h^2 - t}{h}$   
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2t \cdot h + h^2}{h}$   
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2t+h)}{h}$   
 $\lim_{h \rightarrow 0} 2t + h$   
 $\rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} 2t$   
 $\Delta = \frac{300 + 30}{30}$   
 $\Delta = \frac{330}{30} = 11 \text{ m/s}$

Fonte: Dados da Pesquisa.

Em seguida, analisando a resolução do P02 que, assim como o P01, também fez uso somente dos tratamentos de registro algébrico para obter o resultado e, também observamos um equívoco, como nos ilustra a Figura 11.

Figura 11 – Resolução da Etapa 1 do P02

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$   
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h) - (x^2) - (x)}{h}$   
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh + x + h - x^2 - x}{h}$   
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh + h}{h}$   
 $\lim_{h \rightarrow 0} h(2x + h^2 + h)$   
 $\lim_{h \rightarrow 0} 2x + h^3$   
 $\lim_{h \rightarrow 0} 2x$   
 $2 \cdot 10 = 20$

Fonte: Dados da Pesquisa.

Na realização de seu tratamento do registro algébrico, o participante P02 comete um equívoco algébrico no momento de retirar a indeterminação do limite colocando “h” em evidência (lado esquerdo, quarta linha da Figura 11), o que também prejudicou sua resposta final ao problema. Dada a maneira incorreta que optou em sua resolução, enquadra-se em nossa análise de dados na Categoria 4 (Tratamento Inadequado II).

Analisando os registros elaborados por P03 fica evidente que, assim como P01, cometeu equívoco de tratamento como mostra a Figura 12, que apresenta seu registro algébrico.

Figura 12 – Resolução da Etapa 1 do P03

Handwritten mathematical work for the limit of  $S(T) = T^2 + T$  as  $T \rightarrow x$ . The work shows several steps with algebraic errors. A vertical blue arrow on the left is labeled "TRATAMENTO" and points downwards. A blue arrow at the bottom right points to the final result.

$$S(T) = T^2 + T$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{(x+h)^2 + (x+h) - x^2 - x}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 + x + h - x^2 - x}{2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{2xh + h^2 + 2x + h}{h} = \frac{h \cdot (2x+h) + 2x+h}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = (2x+h) + 2x + h = 4x + 2h = 4x + 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = 4x$$

Fonte: Dados da Pesquisa.

No momento de realizar a substituição do domínio da função no cálculo do limite, P03 em seu tratamento, na terceira linha algébrica da Figura 12, erra a propriedade distributiva do sinal negativo no momento que substitui  $f(x)$ , fazendo que o resultado do seu limite esteja incorreto por uma incoerência algébrica no tratamento de registro. Seguindo a categorização criada para esta análise, P03 pertence à Categoria 3 (Tratamento Inadequado I).

Dando continuidade, o P04 também comete erros no registro algébrico, conforme nos mostra a Figura 13.

Figura 13 – Resolução da Etapa 1 do P04

Handwritten mathematical work for the limit of a function  $S(t) = t^2 + t$  as  $t \rightarrow 10$ . The work shows several steps with errors and corrections:

- Initial function:  $S(t) = t^2 + t$
- Step 1:  $\lim_{h \rightarrow 0} = (10+h)^2 + 10 - 10^2$
- Step 2:  $\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{10^2 + 2 \cdot 10 \cdot h + h^2 - 10^2}{h}$  (with  $10^2$  crossed out)
- Step 3:  $\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{2 \cdot 10 \cdot h + h^2}{h}$
- Step 4:  $\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{h(2 \cdot 10 + h)}{h}$
- Step 5:  $\lim_{h \rightarrow 0} = 2 \cdot 10 + h$
- Final result:  $\lim_{h \rightarrow 0} = h = 20$  (boxed)

**Fonte:** Dados da Pesquisa.

Neste caso, ao realizar a substituição, além de cometer os erros algébricos de desconsiderar a parte negativa do domínio da função na segunda linha de tratamento, ele também se utiliza do valor “10” para o cálculo da variável “t”, causando incoerência no resultado final. Perante o teor de análise, P04 se encaixa na Categoria 3 (Tratamento Inadequado I).

Já o participante P05 além de realizar os tratamentos de maneira adequada, realiza uma conversão (seta amarela) do registro algébrico para um registro em língua natural escrita, conforme nos ilustra a Figura 14. P05 realiza corretamente os tratamentos do limite algébrico em seu registro, fazendo as substituições dos domínios adequadamente, assim como o processo de evidenciar o termo “h” do limite em todos os termos. Em seu tratamento no registro algébrico, quando obtido o valor correto da velocidade instantânea da situação problema, o mesmo descreve em língua natural o acontecimento que acabara de calcular algebricamente. Com isso, em nossa análise, P05 faz parte da Categoria 1 (Conversão Adequada).

Figura 14 – Resolução da Etapa 1 do P05

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{(t+h)^2 + (t+h) - (t^2 + t)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{t^2 + 2th + h^2 + t + h - t^2 - t}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{2th + h^2 + h}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = 2t + h + 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = 2t + 1$$

TRATAMENTO  $\rightarrow$   $2t + 1$   
 $2 \cdot 10 + 1$   
 $20 + 1$   
 $21$

b) Resposta: João possuía uma velocidade de 21 m/s, no instante 10 segundos.

Fonte: Dados da Pesquisa.

Por sua vez, P06, conforme nos ilustra a Figura 15, se equivocou em seu tratamento no registro algébrico.

Figura 15 – Resolução da Etapa 1 do P06

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t^2 + t) - t^2}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{t^2 + t - t^2}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = t$$

TRATAMENTO  $\rightarrow$   $2t$   
 $2 \cdot 10$   
 $20 = 20 \text{ m/s}$

Fonte: Dados da Pesquisa.

Quando P06 faz a substituição dos domínios na primeira linha de tratamento, se esquece da segunda substituição negativa e, além disso, ainda cancela termos algébricos de maneira equivocada, não obtendo a resposta ao problema. Dessa forma, podemos enquadrar o P06 em duas categorias de equívocos, Categorias 3 e 4 (Tratamento Inadequado I e Tratamento Inadequado II, respectivamente).

Já o registro algébrico de P07 é relatado pela Figura 16.

Figura 16 – Resolução da Etapa 1 do P07

Handwritten mathematical work for the limit of  $s(t) = t^2 + t$  as  $t \rightarrow 0$ . The work shows several steps of algebraic manipulation, including a final incorrect result of  $3T$ . Annotations "TRATAMENTO" with arrows point to the first and second lines of the derivation.

$$s(t) = t^2 + t$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{(T+h)^2 - (T^2 + T)}{h}$$

$$= \frac{T^2 + 2 \cdot T \cdot h + h^2 - T^2 + T}{h}$$

$$= \frac{2 \cdot T \cdot h + h^2 + T}{h}$$

$$= \frac{h(2T + h) + T}{h}$$

$$= 2T + h + T$$

$$= 3T$$

$T = 10 \text{ segundos}$   
 $3T = 30 \text{ m/s}$

Fonte: Dados da Pesquisa.

P07 realiza inadequadamente seus tratamentos algébricos durante a substituição de domínio e, assim como os participantes P01, P03, P04 e P06, se esquece de que o sinal negativo da função  $f(x)$  no limite é para todo seu domínio, obtendo assim uma resposta incorreta ao problema. Assim, pertence à Categoria 3 (Tratamento Inadequado I).

Dando sequência à análise, P08, em seu registro algébrico expõe a solução retratada pela Figura 17.

Figura 17 – Resolução da Etapa 1 do P08

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{(110+h)^2 - 0^2}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{12100 + 220h + h^2 - 0}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{220h + h^2}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = 110 + h = 110$$

Fonte: Dados da Pesquisa.

P08, assim como P04, tentou realizar o cálculo do limite fazendo a substituição da variável tempo nas funções presentes no limite, mas também com incoerências de substituições no registro algébrico, obtém um resultado equivocado e inclui-se na Categoria 3 (Tratamento Inadequado I).

Nesse mesmo sentido, P09 realiza a substituição do valor da variável durante o limite algébrico, como nos mostra a Figura 18.

Figura 18 – Resolução da Etapa 1 do P09

$$f(x) = t^2 + t$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{f(t^2+t+h) - f(t^2+t)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t^2+t+h) - t^2+t}{h}$$

$$\frac{(x^2+x+h) - (x^2+x)}{h}$$

$$\frac{(10^2+10+h) - (10^2+10)}{h}$$

$$\frac{(110 h) - (110)}{h}$$

Fonte: Dados da Pesquisa.

Inicialmente, quando substitui os domínios, faz o tratamento algébrico inadequado, se esquece também do sinal negativo para todo o domínio da  $f(x)$  e, de maneira similar ao participante P04 e P08, faz a substituição numérica do valor da variável tempo (segunda linha do lado direito da Figura 18), mas não finaliza seus cálculos, não obtendo uma resposta ao problema. Sendo assim, pertence às Categorias 3 e 4 (Tratamento Inadequado I e Tratamento Inadequado II, respectivamente)..

Por fim, a Figura 19 retrata a resolução de P10 na situação-problema sobre o cálculo da velocidade instantânea de um ciclista por meio do tratamento do registro algébrico.

Figura 19 – Resolução da Etapa 1 do P10

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h)^2 + (t+h) - t^2 - t}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{t^2 + 2th + h^2 + t + h - t^2 - t}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2th + h^2 + h}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2t + h + 1)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} 2t + 1 + h = 2t + 1$$

$$s'(t) = 2t + 1$$

$$s'(1) = v(1) = 2t + 1$$

$$v(10) = 21 \text{ m/s}$$

Fonte: Dados da Pesquisa.

Percebemos que P10 iniciou a resolução do problema diretamente com o conceito de derivada por limite exposto no início do encontro. Utilizando-se de tratamento, no caso o algébrico, consegue obter corretamente a solução do problema, percebendo em seu quinto tratamento que a velocidade instantânea do ciclista, nada mais é que a variação tendendo a zero do momento “10 segundos” do deslocamento. Devido ao fato de que P10 não realizou conversões entre registros,

mas promoveu seu tratamento de maneira correta, integra a Categoria C2 (Tratamento Adequado).

#### 4.2 ETAPA 2

Nessa fase da SA, após a introdução da Derivada, trouxemos, por meio de um registro tabular, a prática da construção de uma tabela comparativa, envolvendo de um lado algumas funções polinomiais, e do outro, suas respectivas funções Derivadas. O objetivo central desta etapa foi que os participantes da pesquisa pudessem perceber nos registros produzidos que, para funções polinomiais, as Derivadas possuíam uma regra geral intuitiva, dessa forma, o cálculo dos limites se tornaram opcionais.

Durante a análise dos dados apresentados nesta etapa, podemos categorizar as resoluções de cada um dos participantes conforme síntese apresentada pelo Quadro 8, que nos apresenta na primeira coluna as categorias emergentes da maneira com o qual cada participante resolveu o problema da etapa, seguido da definição do que entendemos pela categoria descrita e dos participantes que se encaixaram durante a análise nas colunas seguintes, respectivamente.

Quadro 8 – Síntese da análise geral da Etapa 2

<b>Categoria</b>	<b>Definição</b>	<b>Participantes</b>
C5 – Álgebra Completa e Tabela Correta	Realizaram todas as operações de tratamento algébrico das Derivadas por limite para completar o registro tabular de maneira correta.	P05; P10
C6 – Álgebra Incompleta e Tabela Correta	Participantes que não registraram todas as operações de tratamento algébrico das Derivadas solicitadas, mas obtiveram o registro tabular completo e correto.	P01; P02; P03; P04; P08
C7 – Álgebra Incompleta e Tabela Incorreta	Participantes que não registraram todas as operações de tratamento algébrico das Derivadas solicitadas e não obtiveram o registro tabular completo e correto.	P06; P07; P09

**Fonte:** os autores.

A resolução de P01 é retratada pela Figura 20, que nos mostra, em seu lado esquerdo, seus cálculos algébricos realizados corretamente e, em seu lado direito, a conversão de suas resoluções algébricas para o registro tabular.

Figura 20 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P01

Handwritten mathematical work showing the derivation of a derivative table. On the left, three examples of the limit definition of a derivative are shown for  $f(x)=x$ ,  $f(x)=2x$ , and  $f(x)=x^2$ . A yellow arrow labeled "Conversão" points to a table on the right that lists  $f(x)$  and  $f'(x)$  for these functions.

$f(x)$	$f'(x)$
$x$	$1$
$2x$	$2$
$x^2$	$2x$
$x^2+2x$	$2x+2$
$x^3$	$3x^2$
$x^3+x^2+x$	$3x^2+2x+1$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Notamos que P01 apresenta corretamente seu registro tabular, porém não completou todos os cálculos algébricos necessários para a obtenção do registro algébrico, sendo então este incluído à Categoria C6 (Álgebra Incompleta e Tabela Correta).

P02 apoiou-se também nos registros algébricos para a conversão de valores na tabela, conforme nos mostra a Figura 21. Notamos que, apesar de seu registro tabular estar completo e correto, P02 não realizou o cálculo algébrico do último limite da tabela (referente à  $f(x) = x^3+x^2+x$ ), assim como o feito no recorte algébrico ilustrado pelo lado esquerdo da Figura 21 [que mostra o cálculo algébrico do  $f(x) = x^2$ ]. Ainda assim inseriu corretamente seu resultado, sendo identificado como Categoria C6 (Álgebra Incompleta e Tabela Correta).

Figura 21 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P02

Handwritten mathematical work for P02 showing the derivation of the derivative of  $x^2$  using the limit definition and a conversion to a table.

Left side (limit definition steps):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} 2x+h$$

Right side (conversion to table):

Conversão

$f(x)$	$f'(x)$
$x$	$1$
$2x$	$2$
$x^2$	$2x$
$x^2 + 2x$	$2x + 2$
$x^3$	$3x^2$
$x^3 + x^2 + x$	$3x^2 + 2x + 1$

Fonte: Dados da pesquisa.

Por sua vez, a Figura 22 ilustra os registros algébricos de P03 e sua conversão para a tabela.

Figura 22 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P03

Handwritten mathematical work for P03 showing the derivation of the derivative of  $x^2$  using the limit definition and a conversion to a table.

Left side (limit definition steps):

$$f(x) = x^2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

Right side (conversion to table):

Conversão

$f(x)$	$f'(x)$
$x$	$1$
$2x$	$2$
$x^2$	$2x$
$x^2 + 2x$	$2x + 2$
$x^3$	$3x^2$
$x^3 + x^2 + x$	$3x^2 + 2x + 1$

Fonte: Dados da pesquisa.

A Figura 22 nos apresenta apenas um trecho da resolução de P03, no qual se nota a conversão direta de expressões algébricas para a organização dos dados em forma de tabela. P03 pertence, desta maneira, à Categoria C6 (Álgebra Incompleta e Tabela Correta).

Já o P04 evidencia, também, o uso de procedimentos algébricos como suporte para a construção da tabela, como pode ser visto na Figura 23.

Figura 23 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P04

(1)  $f(x) = x^2 + 2x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) - (x^2 + 2x)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - x^2 - 2x}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h + 2)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x + 2}{1} = 2x + 2$$

Conversão

$f(x)$	$f'(x)$
$x$	$1$
$2x$	$2$
$x^2$	$2x$
$x^2 + 2x$	$2x + 2$
$x^3 + x^2 + x$	$3x^2 + 2x + 1$
$x^3$	$3x^2$

(2)  $f(x) = x^3$       (3)  $f(x) = x^3 + x^2 + x$

$3x^2$        $3x^2 + 2x + 1$

Fonte: Dados da pesquisa.

Nota-se que, assim como alguns participantes anteriores, P04 realizou as conversões para a tabela corretamente, mas seus últimos tratamentos algébricos não utilizam dos conceitos de Derivada por limite para sua compreensão do processo de conversão. Sendo assim, P05 se encaixa na Categoria C6 (Álgebra Incompleta e Tabela Correta).

P05, por sua vez, conforme nos ilustra a Figura 24, realizou todos os registros algébricos de Derivada por limite necessários para a construção do registro tabular.

Figura 24 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P05

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{(x+h)^3 + (x+h)^2 + (x+h) - x^3 - x^2 - x}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + x^2 + 2xh + h^2 + x + h - x^3 - x^2 - x}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2xh + h^2 + h}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 + 2x + h + 1)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = 3x^2 + 3xh + h^2 + 2x + h + 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = 3x^2 + 2x + 1$$

$f(x)$	$f'(x)$
$x$	$1$
$2x$	$2$
$x^2$	$2x$
$x^2 + 2x$	$2x + 2$
$x^3$	$3x^2$
$x^3 + x^2 + x$	$3x^2 + 2x + 1$

Conversão

Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 24 podemos ver o exemplo do longo processo necessário para a obtenção do limite tendendo a zero da última função algébrica. Sendo assim, P05 pertence à Categoria C5 (Álgebra Completa e Tabela Correta).

Entretanto, P06 dá indícios de dificuldades algébricas, conforme podemos verificar na Figura 25.

Figura 25 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P06

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - (x)^3}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h \cdot x+h \cdot x+h - x \cdot x \cdot x}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (x+h) = x+h}{h} \quad \lim_{h \rightarrow 0} = 3x$$

$f(x)$	$f'(x)$
$x$	<del>1</del> $1$
$2x$	$2$
$x^2$	$2x$
$x^2 + 2x$	$2x + 2$
$x^3$	$3x$
$x^3 + x^2 + x$	$3x^2 + 2x + 1$

Conversão

Fonte: Dados da pesquisa.

A resolução algébrica apontada na Figura 25 nos mostra que P06 não obteve sucesso em sua resposta para a resolução da Derivada de “ $x^3$ ”,

aparentando certa dificuldade de manipulação com registros algébricos e, sendo assim, pertence à Categoria C7 (Álgebra Incompleta e Tabela Incorreta).

P07, apesar de ser assertivo nas derivadas que realizou os cálculos, não completou seu registro tabular, como nos ilustra a Figura 26.

Figura 26 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P07

Handwritten work for the limit of  $x^3$ :

$$f(x) = x^3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{(x+h)^2 \cdot (x+h) - x^3}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{(x^2 + 2xh + h^2) \cdot (x+h) - x^3}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{x^3 + x^2h + 2x^2h + 2xh^2 + h^2x + h^3 - x^3}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{h(x^2 + 2x^2 + 2xh + h^2)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = x^2 + 2x^2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} = 3x^2$$

Table:

F(x)	F'(x)
x	1
2x	2
x <sup>2</sup>	2x
x <sup>2</sup> +2x	2x+2
x <sup>3</sup>	3x <sup>2</sup>
x <sup>3</sup> +x <sup>2</sup> +x	

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Na Figura 26 vemos que P07 realizou os procedimentos de tratamento da Derivada de “ $x^3$ ” corretamente, porém não foi capaz de completar a tabela com a última função presente para Derivação. Assim, pertence, também, à Categoria C7 (Álgebra Incompleta e Tabela Incorreta).

Por sua vez, P08, conforme nos mostra a Figura 27, assim como outros exemplos, completou seu registro tabular sem o auxílio de todos os registros algébricos de Derivada por limite. Vemos ao lado direito, da Figura 27, o registro tabular completo e correto com as funções e suas respectivas derivadas. Porém P08, em seus registros algébricos (lado esquerdo da Figura 27) não realizou todos os cálculos presentes na situação problema da etapa. Com isso, pertence à Categoria C6 (Álgebra Incompleta e Tabela Correta).

Figura 27 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P08

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) - (x^2 + 2x)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x \cdot h + h^2 + 2x + 2h - x^2 - 2x}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x \cdot h + h^2 + 2h}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h + 2)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (2x + h + 2) = 2x + 2$$

$f(x)$	$f'(x)$
$x$	$1$
$2x$	$2$
$x^2$	$2x$
$x^2 + 2x$	$2x + 2$
$x^3$	$3x^2$
$x^3 + x^2 + x$	$3x^2 + 2x + 1$

Fonte: Dados da pesquisa.

Seguindo com a Figura 28, observamos que, assim como P06 e P07, P09 não completou seu registro tabular.

Figura 28 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P09

$$4) f(x) = x^2 + 2x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) - (x^2 + 2x)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - x^2 - 2x}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h + 2)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (2x + h + 2) = 2x + 2$$

$f(x)$	$f'(x)$
$x$	$1 + 2$
$2x$	$2$
$x^2$	$2x$
$x^2 + 2x$	$2x + 2$
$x^3$	
$x^3 + x^2 + x$	

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao lado esquerdo da Figura 28, observamos que sua quarta resolução da Derivada das funções não possuiu nenhum equívoco algébrico, porém o mesmo não completou os demais cálculos algébricos para converter ao registro

tabular final, fazendo assim, parte da Categoria C7 (Álgebra Incompleta e Tabela Incorreta).

Por fim, a Figura 29 nos mostra uma das conversões algébrica-tabular de P10 na construção do registro tabular das Derivadas.

Figura 29 – Recorte da resolução da Etapa 2 do P10

The image shows a handwritten mathematical derivation of the derivative of  $f(x) = x^3 + x^2 + x$ . The derivation starts with the definition of the derivative as a limit:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 + (x+h)^2 + (x+h) - x^3 - x^2 - x}{h}$$

The next step shows the expansion of the numerator:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + x^2 + 2xh + h^2 + x + h - x^3 - x^2 - x}{h}$$

The terms  $x^3$ ,  $x^2$ , and  $x$  cancel out, leaving:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2xh + h^2 + h}{h}$$

Factoring out  $h$  from the numerator:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h(3x^2 + 3xh + h^2 + 2x + h + 1)$$

As  $h \rightarrow 0$ , the terms with  $h$  go to zero, resulting in the final derivative:

$$= 3x^2 + 2x + 1$$

A yellow arrow labeled "Conversão" points to a tabular representation of the function and its derivative:

$f(x)$	$f'(x)$
$x$	$1$
$2x$	$2$
$x^2$	$2x$
$x^2 + 2x$	$2x + 2$
$x^3$	$3x^2$
$x^3 + x^2 + x$	$3x^2 + 2x + 1$

Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 29, podemos verificar a resolução do último limite fornecido pelo problema proposto. P10 conseguiu realizar todas as conversões de registros algébricos para tabular com coerência e, assim como P05, pertence à Categoria C5 (Álgebra Completa e Tabela Correta).

Durante a análise dos dados obtidos nesta Etapa da pesquisa, percebemos que, ao longo da construção do registro tabular por meio das conversões do registro algébrico, a grande parte dos participantes notou a regra de derivação das funções polinomiais e, com isso, não fizeram a resolução algébrica da última função: " $x^3 + x^2 + x$ ", inserindo diretamente ao registro tabular a respectiva derivada.

### 4.3 ETAPA 3

A terceira atividade desenvolvida na pesquisa foi a análise do comportamento gráfico da Derivada de algumas funções por meio de Pontos Críticos (Máximos e Mínimos). Dessa forma, os participantes produziram registros que permitissem compreender e visualizar esses pontos de transição de algumas curvas, com foco principal em curvas de terceiro grau. As figuras pertencentes a esta etapa

da análise apontam as resoluções de cada participante para a situação dada neste encontro, no qual as setas azuis indicam a direção das operações de tratamento algébrico realizadas por cada participante e, da mesma forma, as setas amarelas indicam o sentido das conversões utilizadas por cada um deles.

Inicialmente, a resolução de P01 ao problema proposto nesta etapa é ilustrada pela Figura 30.

Figura 30 – Recorte da resolução da Etapa 3 do P01

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

$$f(x) = 3x + 6x$$

$$f(x) = 9x$$

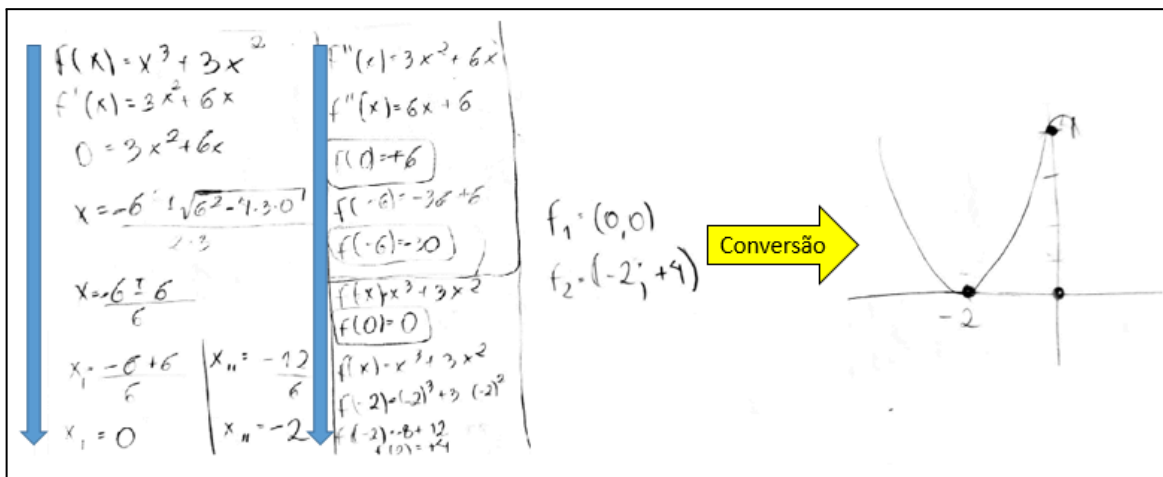
$$f(9)$$

**Fonte:** Dados da Pesquisa.

P01 não foi capaz de realizar a proposta final deste terceiro encontro, sendo perceptível um erro de derivação e nomenclatura no tratamento da segunda linha deste registro algébrico.

Já o P02 realizou o processo de conversão de registros, conforme nos mostra a Figura 31.

Figura 31 – Recorte da resolução da Etapa 3 do P02

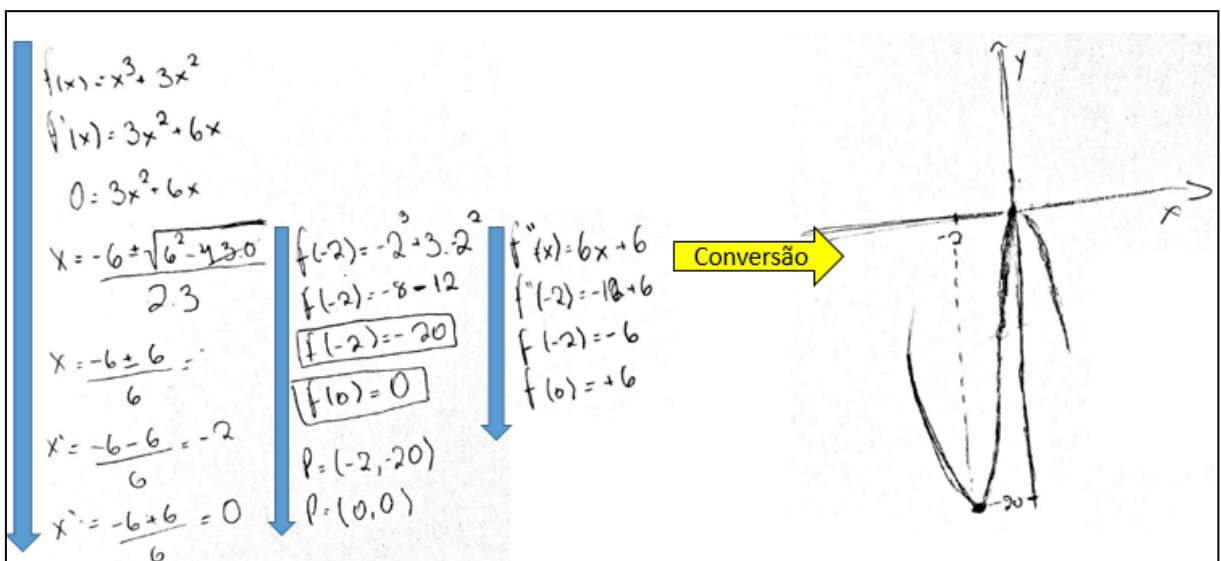


**Fonte:** Dados da Pesquisa.

A Figura 31 evidencia que as operações de tratamento algébrico de P02 estão corretas, visto que obteve os dois pontos críticos da função. Porém, P02 cometeu um erro durante a conversão para o registro gráfico, no qual inseriu, de maneira equivocada, as coordenadas cartesianas dos pontos críticos.

Por sua vez, a resolução de P03 ao problema proposto nesta etapa é ilustrada pela Figura 32.

Figura 32 – Recorte da resolução da Etapa 3 do P03

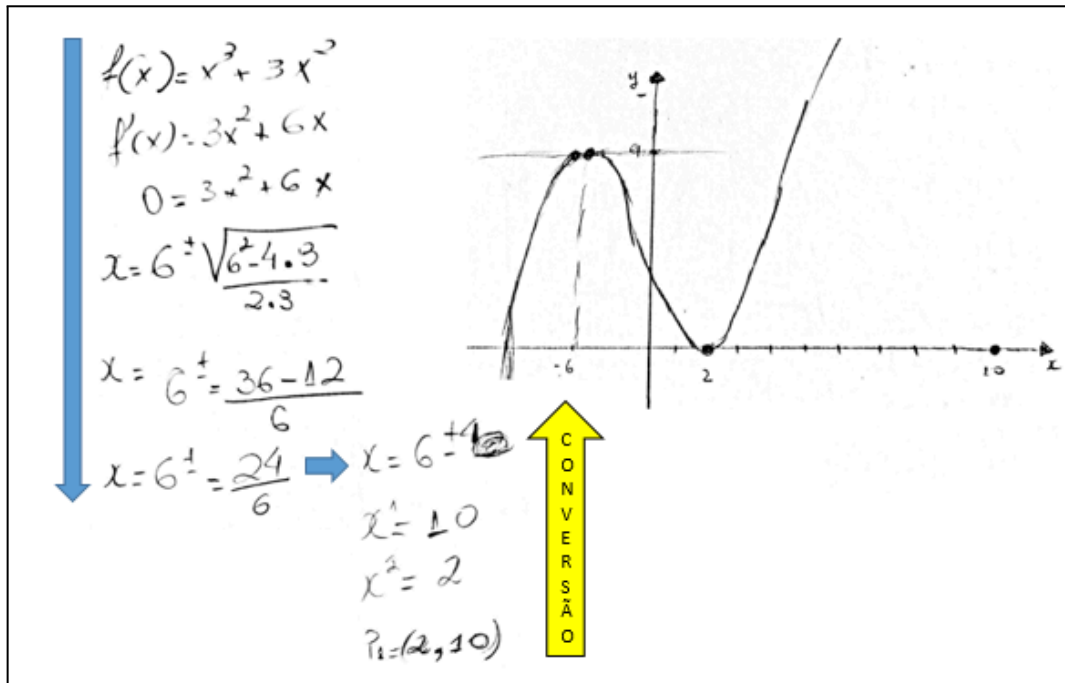


Fonte: Dados da Pesquisa.

P03 realizou todos os processos de resolução corretamente, porém seu procedimento de cálculo dos pontos críticos teve um resultado equivocado por um erro algébrico na obtenção dos pontos. Quando P03 foi obter a correspondência “y” para seu  $x = -2$ , sua conversão gráfica não obteve sucesso na resolução do problema.

Já o P04 resolveu de maneira assertiva o procedimento de obtenção de pontos críticos, conforme nos mostra a Figura 33. Mesmo apresentando um procedimento inicial de obtenção dos pontos de máximo e/ou mínimo de maneira coerente, P04 teve dificuldades com a obtenção das raízes da equação quadrática que resultou de sua derivação. Com isso, ambos os registros utilizados estão equivocados, tanto o algébrico com a obtenção dos pontos errados, quanto a conversão gráfica destes pontos.

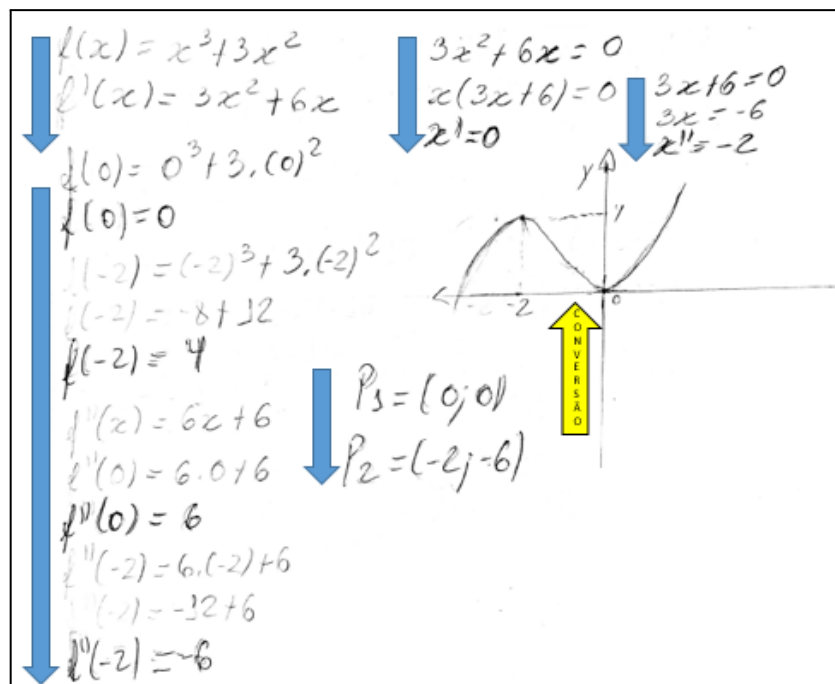
Figura 33 – Recorte da resolução da Etapa 3 do P04



Fonte: Dados da Pesquisa.

Por sua vez, a Figura 34 nos ilustra a resolução de P05 a esta etapa.

Figura 34 – Recorte da resolução da Etapa 3 do P05



Fonte: Dados da Pesquisa.

Observa-se na Figura 34 (lado esquerdo) que o tratamento se inicia corretamente com a derivação da função proposta. Logo em sequência (lado direito da Figura 34), vemos a derivada igualada a zero para o encontro das coordenadas  $x$ , no qual a curva tem inclinação igual a zero. Assim, P05, após encontrar as correspondências “ $y$ ” dos pontos críticos, corretamente faz a aplicação da derivada segunda nestes, para que assim possa estudar o sinal referente a inclinação da função nos pontos desejados.

Além de cumprir adequadamente todos os tratamentos e resoluções para obter a solução do problema, P05 converteu sua resposta algébrica para o registro gráfico, podendo visualizar esta função e seus pontos críticos em um outro tipo de registro.

P06, por sua vez, apresentou os registros ilustrados pela Figura 35.

Figura 35 – Recorte da resolução da Etapa 3 do P06

$F(x) = 3x^3 + 3x^2$   
 $F'(x) = 3x^2 + 6x$   
 $0 = 3x^2 + 6x$   
 $x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3}$   
 $x = \frac{6 \pm 6}{6}$   
 $x_1 = \frac{6+6}{6} = \frac{12}{6} = 2$   
 $x_{II} = \frac{6-6}{6} = 0$

$F(0) = 3x^2 + 6x$   
 $F(0) = 3 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0$   
 $F(0) = 0 + 0$   
 $F(0) = 0 y_{II}$

$F(2) = 3x^2 + 6x$   
 $F(2) = 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2$   
 $F(2) = 3 \cdot 4 + 12$   
 $F(2) = 12 + 12$   
 $F(2) = 24 y_I$

Conversão

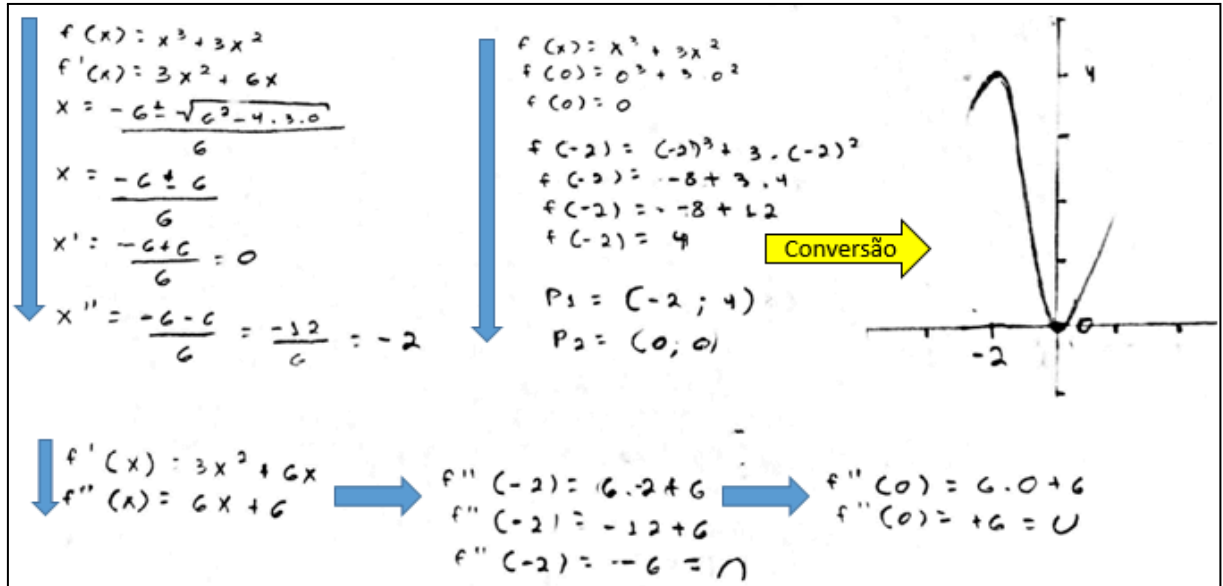
Fonte: Dados da pesquisa.

Quanto ao registro algébrico, nota-se que P06 realizou o processo de derivação corretamente, assim como a obtenção da coordenada  $x$  dos pontos críticos, porém no momento de obter as coordenadas “ $y$ ” errou seus tratamentos. Dessa forma, consideramos equivocado ambos os registros utilizados para resolução, tanto o algébrico na obtenção dos pontos, quanto na conversão para o

registro gráfico, no qual o mesmo inseriu pontos cartesianos que não correspondem com os cálculos desempenhados.

Já a Figura 36 mostra a resolução do participante P07.

Figura 36 – Recorte da resolução da Etapa 3 do P07



Fonte: Dados da pesquisa.

Percebemos pela Figura 36 que o processo algébrico da derivação e obtenção dos pontos foi feito de maneira correta via registro algébrico. Destacamos também que, neste mesmo registro, P07 fez também os testes da derivada segunda, checando assim a angulação (direção) de ambos os pontos críticos obtidos, dessa forma, facilitando a conversão gráfica desta função polinomial de grau 3.

Já a Figura 37 ilustra os registros produzidos por P08 nesta etapa. P08 demonstra, a partir do registro algébrico presente na Figura 37, que a derivação da função foi feita corretamente. Porém, neste mesmo registro, no momento no qual iguala a função derivada à zero para obter os pontos de máximo/mínimo, tem um grande equívoco ao calcular os zeros da função derivada para os valores “y”, comprometendo toda resolução da atividade. Constatamos, também, o uso de somente um registro para responder, não fazendo uso de um registro gráfico auxiliar.

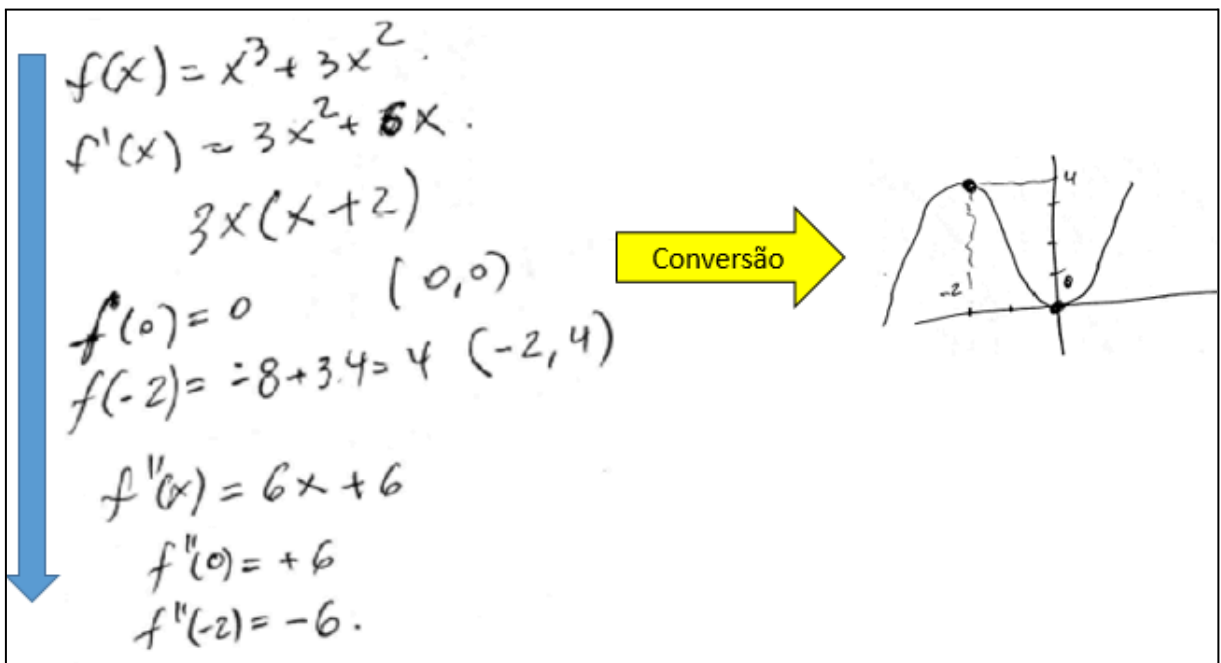
Figura 37 – Recorte da resolução da Etapa 3 do P08



Derivando corretamente, apesar de não sinalizar em seus tratamentos, P09 igualou a derivada à zero para obter as coordenadas x e y dos pontos críticos, testou a angulação da derivada nos pontos obtidos por meio da derivada segunda e, converteu corretamente para um registro gráfico sem equívocos.

Analogamente, P10 realizou corretamente a conversão do registro algébrico dos pontos críticos para o registro gráfico da função, conforme podemos verificar pela Figura 39.

Figura 39 – Recorte da resolução da Etapa 3 do P10



**Fonte:** Dados da Pesquisa.

Obtendo algebricamente a derivada primeira da função, os pontos de inclinação igual a zero e, o teste da derivada segunda para obter as inclinações, P10 constrói uma representação gráfica dos pontos de máximo local e mínimo local dessa curva de terceiro grau corretamente. Ponto de destaque é opção algébrica de evidenciar a função do segundo grau ao invés de calcular a fórmula de Bháskara.

#### 4.4 ETAPA 4

Nesta etapa, englobamos todos os conhecimentos construídos até o

momento para apresentar aos participantes o tema da otimização na Matemática, fenômeno amplamente estudado utilizando-se dos conhecimentos de Cálculo Diferencial. Em específico, apresentamos um problema de otimização do volume de um sólido geométrico (uma caixa), sendo assim, quais dimensões (segundo uma área superficial como base) produzem o sólido de maior volume.

Assim como nas demais etapas, as figuras da etapa 4 ilustram as operações de conversão com setas amarelas, enquanto as azuis, os tratamentos.

P01 apresentou a resolução ilustrada pela Figura 40.

Figura 40 – Resolução da Etapa 4 do P01

$$\begin{aligned}
 A_S &= x^2 + 4 \cdot x \cdot h \\
 100 &= 2x + 4 \cdot 2 \cdot h \\
 0 &= 2x + 20 \\
 x &= \frac{\pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10}}{2 \cdot 2} \\
 x &= \frac{\pm \sqrt{80}}{4} \\
 x &= \frac{\pm 8,94}{4} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{8,94}{4} = 8,94 \cdot 4 = 35,76 \\ x_2 = \frac{-8,94}{4} = -8,94 \cdot 4 = -35,76 \end{cases} \\
 h &= \frac{100 - 35,76^2}{4 \cdot 35,76} \quad h = \frac{64,24}{243,04} = 2,226 \dots
 \end{aligned}$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Notamos na solução de P01 que o mesmo não utilizou as noções de maximização de volume expostas nesta etapa, derivando valores errados e tomando como base somente o registro algébrico para solucionar. Sendo assim, P01 apresentou um resultado incoerente ao problema de maximização proposto.

Quando perguntado sobre o uso majoritário do registro algébrico não somente neste encontro, mas também em anteriores, P01 respondeu:

Eu **prefiro fazer pelas contas** que **eu consigo visualizar melhor** sobre as perguntas, tenho um pouco de dificuldade em fazer gráficos, prefiro fazer contas que eu entendo mais sobre o assunto (P01, grifo nosso).

Assim, identificamos no registro algébrico de P01 a Função Pedagógica **restringir**, pois P01 menciona visualizar melhor por meio de contas, isto é, este tipo de representação lhe é familiar.

Outro detalhe que vale destaque é que o P01 dá indícios de aprendizagem mecanizada da derivação de funções polinomiais, a famosa “regra do tombo”:

[...] Eu não finalizei a última função porque **eu não lembrava como terminar**, eu **aprendi mais sobre a derivada com a regrinha do tombo** que facilita mais sobre as funções [...] (P01, grifo nosso).

Por sua vez, a resolução feita por P02 é ilustrada pela Figura 41.

Figura 41 – Recorte da resolução da Etapa 4 do P02

$V = x^2 \cdot h$ $S = x^2 + 4 \cdot x \cdot h$ $100 = x^2 + 4 \cdot x \cdot h$ $-h = \frac{-100 - x^2}{4 \cdot x} \quad (-x)$ $h = \frac{100 - x^2}{4 \cdot x}$ $V = x^2 \left( \frac{100 - x^2}{4 \cdot x} \right)$ $V = \frac{100x^2 - x^3}{4 \cdot x}$ $V = \frac{x(100x - x^2)}{4 \cdot x}$	$V = 25x - \frac{x^2}{4}$ $V = 25 - \frac{3}{4}x \quad   \quad V = -\frac{3}{4}x + 25$ $x = \frac{+3 \pm 3}{2 \cdot 0}$ $x_1 = \frac{6}{4}$ $x_2 = 0$ $h = \frac{100 - \left(\frac{6}{4}\right)^2}{4 \cdot \frac{6}{4}}$ $h = \frac{100 - 2,25}{6}$ $h = \frac{100 - 0,375}{6}$ $h = \frac{99,625}{6}$ $h = 16,60916667$
--	--

Fonte: Dados da pesquisa.

P02 utiliza, novamente, somente o registro algébrico, e seu tratamento é feito de maneira equivocada e sem o auxílio de nenhum outro tipo de

registro. Apesar de ter utilizado a função que representa o volume do sólido para maximizar por meio da derivada (diferentemente do realizado por P01, por exemplo), P02 apresenta erros algébricos em seus tratamentos e obteve, assim, uma solução discrepante com a situação promovida. Ao realizarmos questionamentos acerca do uso predominantemente de registros algébricos, P02 responde:

[...] Eu **prefiro registro algébrico, porque no próprio registro algébrico eu consigo me entender futuramente**. Através do desenho eu também consigo fazer essa visualização. Só que eu acho que demora um pouco mais. Aí, querendo ou não, você vai ter que fazer [o registro algébrico] (P02, grifo nosso).

Dessa maneira, é possível identificar, pela fala de P02, o uso da Função Pedagógica **restringir**, pois P02 faz o uso de um registro familiar (o registro algébrico) para a obtenção do registro gráfico que, segundo P02, “demora um pouco mais”, indicando ser uma representação mais complexa para ele.

Por sua vez, P03 também apresenta uma resolução somente utilizando o registro algébrico, conforme nos mostra a Figura 42.

Figura 42 – Recorte da resolução da Etapa 4 do P03

Handwritten mathematical work showing the derivation of the volume function and its maximization:

$$V = x^2 \cdot h$$

$$V = x^2 \cdot \left(\frac{100-x^2}{4x}\right)$$

$$V = \frac{200x^2 - x^4}{4x}$$

$$V = 25x - \frac{x^3}{4}$$

$$V = 25x - \frac{1}{4}x^3$$

$$V' = 25 - \frac{3}{4}x^2$$

$$0 = -\frac{3}{4}x^2 + 25$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot (-\frac{3}{4}) \cdot 25}}{2 \cdot (-\frac{3}{4})}$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{75}}{-\frac{6}{4}}$$

Additional calculations on the right side of the page:

$$S = (\text{area da base}) \cdot (\text{area quatro lados})$$

$$S = x^2 + 4xh$$

$$100 = x^2 + 4xh$$

$$\frac{100-x^2}{4x} = h \rightarrow h = \frac{100-33,29}{23,08}$$

$$h = 2,89$$

$$V = 33,29 \cdot 2,89$$

$$\frac{8,660}{-\frac{6}{4}} = -5,77$$

$$\frac{-8,660}{-\frac{6}{4}} = 5,77$$

$$-8,660 \cdot \frac{-4}{6} = \sqrt{5,77}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Diferentemente dos participantes anteriores, P03 não cometeu nenhum equívoco algébrico em seu tratamento e, utilizando somente um registro, conseguiu obter a solução correta do problema de maximização enunciado. P03 fez uso tanto dos conceitos de otimização do volume visitados nesta quarta etapa, quanto dos conceitos de derivação presentes nos encontros anteriores.

Ao ser questionado acerca dos passos tomados para a resolução, P03 evidencia ter dificuldades de interpretação Matemática do texto, isto é, ao traduzir do texto (verbal textual) à álgebra, explicando que

**A parte complicada para mim** é eu pegar o enunciado e desmanchar ele de uma forma que eu possa fazer o cálculo. **Porque eu fico perdida.** De onde eu coloco esse número? Esse número vai para onde? O que eu faço com esse número? O que eu faço com as informações? **Essa é a minha parte com maior dificuldade** (P03, grifo nosso).

Para a análise de P04, dividimos suas resoluções em duas figuras: a primeira delas, Figura 43, aponta os tratamentos algébricos que P04 realizou inicialmente em sua solução. A segunda, Figura 44, apresenta os resultados finais de tratamento algébrico para solucionar e uma conversão para o registro figural.

Figura 43 – Recorte I da Etapa 4 do P04

The image shows handwritten mathematical work for P04. On the left, a vertical blue arrow points downwards through the following steps:

$$V = x^2 \cdot \left( \frac{100 - x^2}{4x} \right)$$

$$V = \cancel{x} \left( \frac{100x - x^3}{4x} \right)$$

$$V = 25x - \frac{1}{4}x^3$$

$$V = 25 - \frac{3}{4}x^2$$

$$V = -\frac{3}{4}x^2 + 25$$

$$0 = -\frac{3}{4}x^2 + 25$$

On the right, a vertical blue arrow points downwards through the following steps:

$$x = \pm \sqrt{\frac{0^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 25}{2 \cdot \frac{3}{4}}}$$

$$x' = \frac{8,66}{-3/2} = -5,77$$

$$x'' = \frac{-8,66}{-3/2} = +5,77$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Atentando ao tratamento presente na Figura 43, P04 inicia sua solução obtendo a função volume do sólido, a derivada desta função e os valores otimizados da dimensão  $x$  da figura espacial, respectivamente.

Em seguida, como pode ser visto na Figura 44, além de encontrar o valor da dimensão altura do sólido maximizado, realiza um teste com os valores obtidos em seus cálculos para checar o valor da superfície da caixa. Ao final, realiza uma conversão de suas respostas em registro algébrico para o registro figural, inserindo os valores obtidos nas respectivas dimensões de um sólido representado.

Figura 44 – Recorte II da Etapa 4 do P04

The image shows handwritten mathematical work. On the left, there are equations:  $S = x^2 + 4x \cdot h$ ,  $100 = x^2 + 4x \cdot h$ ,  $h = \frac{100 - 5,77^2}{4 \cdot 5,77}$ ,  $h = \frac{66,71}{23,08}$ , and  $h = 2,89 \text{ m}$ . A blue arrow points from the first equation to the right. In the middle, there are more equations:  $S = 5,77^2 + 4 \cdot 5,77 \cdot 2,89$ ,  $S = 5,77^2 + 66,70$ ,  $S = 33,29 + 66,70$ , and  $S = 99,99$ . A blue arrow points from the middle equations down to the final result. A yellow arrow labeled 'Conversão' points from the final result to a 3D diagram of a rectangular prism on the right. The diagram has dimensions  $x = 5,77$  and  $h = 2,89$ .

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao explicar sua resolução e passos que tomou, P04 disse:

É, eu vi que eu tinha lá as formas [se referindo a seu registro figural], fiz as substituições pelo que eu tinha, né, e fui debruçando. Consegui, né, você dilui ela [função volume], né, pra [...] faz a jogadinha lá do, como é que fala, do que o menino falou na sala lá, você dá o tombo, dá o tombo [Derivada], aí você, tendo a função mais simplificada, aí você vai pra resolução (P04).

Podemos identificar, pela Figura 44 e pela fala de P04, a Função Pedagógica **complementar**, ao P04 elaborar uma figura para apoiar a compreensão da resolução do problema, aproveitando as diferenças existentes entre o registro figural e a representação algébrica.

Por sua vez, a resolução de P05 é ilustrada pela Figura 45.

Figura 45 – Recorte da resolução da Etapa 4 do P05

Handwritten mathematical work showing the resolution of a problem. The work is divided into two columns by a vertical line. A blue arrow on the left points downwards, and a blue arrow on the right points downwards.

**Left Column:**

$$V' = 25 - \frac{3}{4}x^2$$

$$V' = \frac{-3x^2 + 25}{4}$$

$$\frac{-3}{4}x^2 + 25 = 0$$

$$x = \pm 5\sqrt{3} \div \frac{(-6)}{4}$$

$$x' = \frac{-20\sqrt{3}}{-6} \quad x'' = \frac{-120\sqrt{3}}{-6}$$

$x = 5,77$        $x'' = -5,77$

**Right Column:**

$$h = \frac{300 - 33,29}{4 \cdot 5,77}$$

$$h = \frac{66,71}{23,08}$$

$h = 2,890$

Altura = 2,89 m  
 Comprimento = 5,77 m  
 Volume Máximo = 96,21 m<sup>3</sup>

Fonte: Dados da Pesquisa

P05 utilizou somente o registro algébrico para analisar e solucionar o problema proposto. Seguindo a direção dos seus tratamentos, P05 obtém a função que determina a capacidade do sólido e sua maximização. Corretamente chega ao conjunto dos valores dimensionais que maximizam a caixa, fazendo também a verificação de quanto é esse volume maximizado.

Ao ser questionado por optar representar suas respostas a enunciados na forma escrita (registro em língua natural), caso visto em etapas anteriores e até mesmo um esboço ao final desta, P05 disse:

Depende muito, na verdade, depende mais da questão. **Se a questão geralmente pergunta mais objetivamente assim, eu geralmente coloco.** Mas geralmente quando eu lembro (P05, grifo nosso).

Assim podemos identificar a Função Pedagógica **restringir** para o registro forma escrita (língua natural) de P05 que geralmente a utiliza (mas somente quando lembra).

Da mesma forma, P06 também obteve uma resolução adequada ao problema proposto, como nos ilustra a Figura 46.

Figura 46 – Recorte da resolução da Etapa 4 do P06

$$\begin{aligned}
 &V = x^2 \cdot h \\
 &V = 25x - \frac{1}{4}x^3 \\
 &V' = -\frac{3}{4}x^2 + 25 \\
 &0 = -\frac{3}{4}x^2 + 25 \\
 &x^2 + 3,6602 \cdot \frac{-4}{6} = -5,7734 \\
 &x^2 - 8,6602 \cdot \frac{-4}{6} = 5,7734
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &h = \frac{100 - x^2}{11x} \\
 &h = \frac{100 - 5,7734^2}{4 \cdot 5,7734} \\
 &h = \frac{66,6678}{23,0956} \\
 &h = 2,8863 \\
 &V = 5,7734^2 \cdot 2,886 \\
 &V = 96,2232
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da Pesquisa

Seguindo as direções dos cálculos no registro algébrico, o P06 foi capaz de maximizar as dimensões do sólido, e demonstrou aptidão quanto às operações matemáticas necessárias para obtenção de uma solução.

O P06, quando perguntado sobre a resolução desta etapa somente pelos cálculos algébricos, descreve da seguinte forma:

Então, sobre a álgebra, para mim, eu sinto que eu tenho dificuldade em álgebra. Então, eu gosto de praticar ela sempre que eu posso. Eu tento não me apoiar nesses recursos [outros registros], nesses outros recursos também, porque eu também não tenho muito domínio de gráficos e formas geométricas. Eu sinto que eu não tenho esse domínio, **mas eu tenho um pouquinho mais em álgebra**, e aí eu gosto de tentar expandir o domínio que tenho (P06, grifo nosso)

Desta forma, apesar de P06 dizer que tem dificuldades com a álgebra, podemos perceber que é a representação que ele mais se sente à vontade, pois ele tem “um pouquinho mais [de domínio] em álgebra”. Em outras palavras, podemos dizer que a representação algébrica lhe é familiar e identificamos, desta maneira, a Função Pedagogia **restringir** nas resoluções de P06.

Por sua vez, identificamos em P07 um meio de resolução diferente dos demais, conforme nos mostra a Figura 47.

Figura 47 – Recorte da resolução da Etapa 4 do P07

$$V = x^2 \cdot h$$

$$S = x^2 + 4 \cdot x \cdot h$$

$$100 = x^2 + 4 \cdot x \cdot h$$

$$\frac{100 - x^2}{4x} = h$$

Conversão

$$V = 25x - \frac{3}{4}x^3$$

$$V' = 25 - \frac{3}{4}x^2$$

$$0 = 25 - \frac{3}{4}x^2$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{75}}{4} \quad x' = -5,7735 \quad x'' = 5,7735$$

$$h = \frac{100 - (5,7735)^2}{4 \cdot 5,7735}$$

$$h = 2,886$$

Fonte: Dados da Pesquisa

O P07, ao invés de iniciar pelo registro algébrico, assim como os demais participantes, inicia sua resolução a partir de um registro figural, que elucida o sólido ao qual a situação problema pede a maximização de volume. Partindo então de uma análise figural do enunciado, o participante realiza uma conversão do registro figural para o registro algébrico.

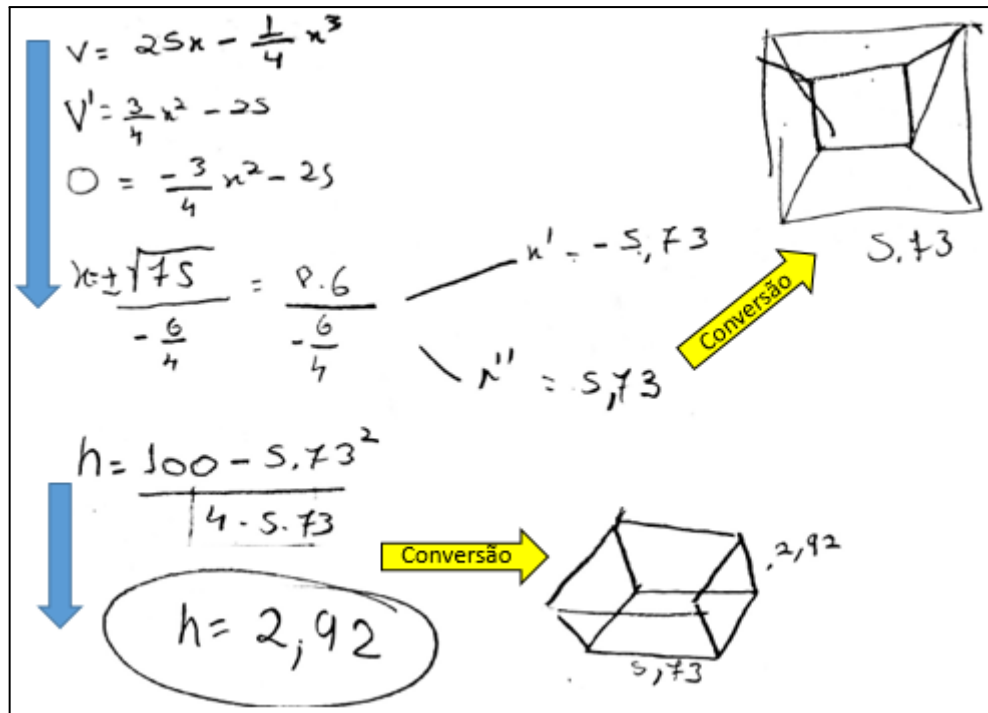
Perguntado sobre sua resolução iniciar com um registro figural, P07 explicita:

No começo aqui, **eu achei mais fácil fazer o cubinho para conseguir visualizar, porque eu sou muito a pessoa que tem que visualizar [...]** Mas foi o jeito que eu consegui visualizar (P07, grifo nosso).

Assim, identificamos a Função Pedagógica **restringir** no registro figural, pois usa uma representação (figura) como guia para a interpretação de outra (algébrica). Realizados os devidos tratamentos algébricos com os cálculos operacionais, diferenciais e de otimização, o participante fornece uma resposta correta ao problema.

Analisando agora P08, vemos na Figura 48 os mesmos registros (algébrico e figural) utilizados pelo participante anterior, porém, em ordem de conversão distinta.

Figura 48 – Recorte da resolução da Etapa 4 do P08



Fonte: Dados da Pesquisa

P08 corretamente parte de um registro algébrico derivando e igualando a zero a função correspondente ao volume do sólido para maximizá-lo. Ao obter as respostas que satisfazem a enunciação do problema, realiza a conversão para um registro figural com as respectivas dimensões da caixa maximizada. Na figura, apesar de serem destacadas duas setas de conversão (amarelas), consideramos que o aluno realizou somente uma conversão de sentido algébrico-figural.

Ao ser questionado, P08 descreve sua resolução da seguinte forma:

Eu comecei pelo Pitágoras, né? Aí ali a gente vai achando  $x_1$  e  $x_2$ . Aí ali você vai conseguir os dois pontos. Se ele for negativo a gente vai excluir ele, se ele for positivo a gente pega o positivo. [...] Então a altura vai ser 100 menos o valor do  $x_2$  ao quadrado, dividido por 4 vezes a, né? Que foi o nosso valor de  $x$ . Aí tudo isso vai dar o valor de  $h$  que a gente vai ter o nosso resultado pra gente maximizar a caixa. (P08)

Na sequência, ao ser questionado acerca da utilização da figura da caixa (registro figural), P08 responde:

Foi uma tentativa de caixa e percebemos que deu muito errado na primeira. **Porque eu acho que eu consigo visualizar mais as**

**coisas** quando elas estão... Quando elas estão fisicamente, entre todas as opções possíveis, **em um lugar que eu consiga ver**. Então como não tinha nenhuma caixa exatamente na minha **frente eu desenhei ela pra poder ficar um pouco mais explícito pra mim o que eu tava fazendo**. (P08, grifo nosso)

Assim, identificamos na representação figural a Função Pedagógica **restringir** pois P08 consegue visualizar “mais as coisas”, isto é, utiliza uma representação que lhe é familiar como guia para a interpretação de outra representação (algébrica).

Por sua vez, P09 toma a representação figural do sólido como base para entender o que estaria sendo calculado na representação algébrica, conforme pode ser visto na Figura 49.

Figura 49 – Recorte da resolução da Etapa 4 do P09

$V = x^2 \cdot h$   
 $100 = x^2 + 4x \cdot h$   
 $\frac{100 \cdot x^2}{4x} = h$

$h = \frac{100 \cdot 5,7735^2}{4 \cdot 5,7735}$   
 $h = 2,88675$

$V = 25x - \frac{3}{4} \cdot x^3$   
 $V' = 25 - \frac{3}{4} \cdot x^2$   
 $0 = 25 - \frac{3}{4} \cdot x^2$

$\pm \sqrt{\frac{100}{3}}$   
 $-\frac{6}{4}$

$\pm 5,7735$   
 $-\frac{3}{2}$

$x' = -5,7735$   
 $x'' = +5,7735$

$V = 5,7735^2 \cdot 2,88675$   
 $V = 96,2250448639$

Sketch of a rectangular box with dimensions  $5,7735$  and  $2,88675$ .

Fonte: Dados da pesquisa.

P09, quando perguntado sobre o uso dos registros figurais e gráficos, nos respondeu:

Eu coloquei a parte do gráfico, desenhos e figuras **para ter uma visão melhor do que eu estou vendo**, porque, por exemplo, **eu gosto bastante de imaginar o que eu estou vendo**, o que eu quero resolver. [...] Eu consigo, como posso dizer? Consigo mais manipular mentalmente essas coisas (P09, grifo nosso).

Verificamos então, por meio da entrevista, que o P09 fez uso de uma

representação familiar (figural) para compreender uma representação mais abrangente e complexa (algébrica), desempenhando assim a Função Pedagógica **restringir**.

Por fim, P10 trouxe, conforme nos ilustra a Figura 50, a representação algébrica da solução para uma interpretação em registro gráfico, tornando possível comparar a relação do aumento e diminuição dos valores de volume em relação às dimensões do sólido que o formava.

Figura 50 – Recorte I da Etapa 4 do P10

$$100 = x^2 + 4xh \rightarrow \frac{100 - x^2}{4x} = h$$

$$V = x^2 \cdot h$$

$$V = x^2 \cdot \left( \frac{100 - x^2}{4x} \right) = \frac{100x^2 - x^4}{4x} = 25x - \frac{1}{4}x^3$$

$$V' = 25 - \frac{3}{4}x^2$$

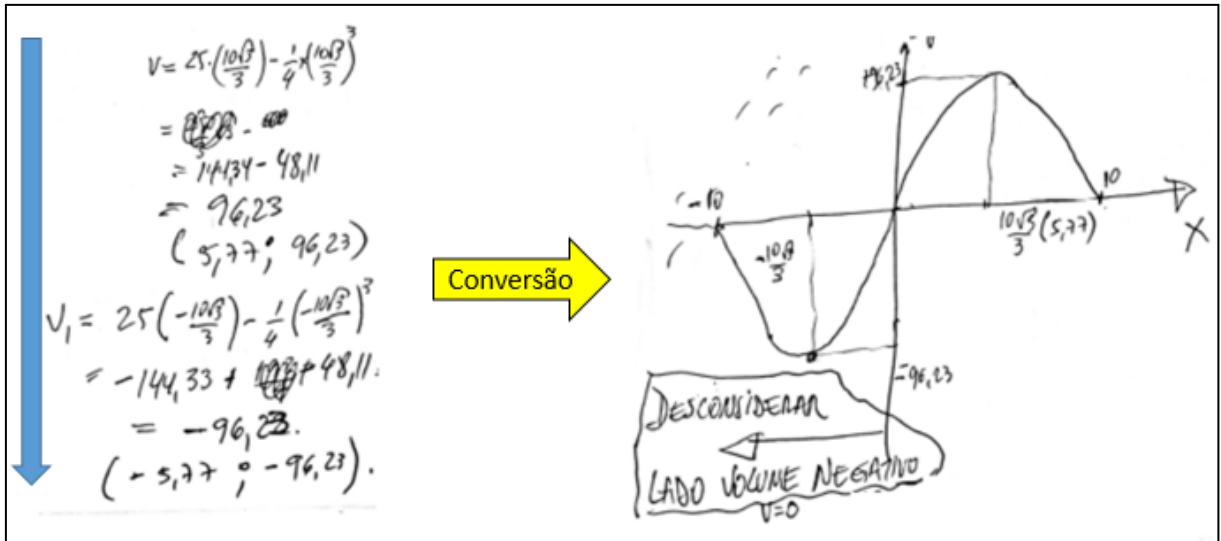
$$V' = 0 \quad 25 = \frac{3}{4}x^2 \quad \frac{100}{3} = x^2 \quad x = \frac{10\sqrt{3}}{3} = \cancel{10} = 5,77$$

$$h = \frac{100 - \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2}{4 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3}} = \frac{100 - \frac{100}{3}}{4 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{200}{3}}{\frac{40\sqrt{3}}{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \quad h = \frac{5\sqrt{3}}{3} = 2,88$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

O P10 realiza suas operações de tratamento dentro do registro algébrico para solucionar o problema de maximização de volume proposto pela etapa. Observe, a partir da Figura 51, que P10 traz os resultados de suas operações à prova por meio do registro algébrico novamente.

Figura 51 – Recorte II da Etapa 4 do P10



**Fonte:** Dados da pesquisa.

Com isso, realiza uma conversão para o registro gráfico, onde o mesmo estabelece uma relação entre os valores dimensionais que o sólido geométrico pode assumir em relação ao volume que o mesmo produzirá, inserindo assim os pontos de maximização calculados algebricamente, em uma interpretação gráfica. Vale ressaltar também a noção gráfica do P10 ao destacar em seu registro que segundo sua interpretação de dimensão e volume, o lado negativo que sua função produziu no gráfico seria desconsiderada.

Perguntado sobre a maneira a qual optou resolver a situação proposta, os registros e os meios utilizados o mesmo afirma:

[...] uma forma de você fazer é **você desenhando**, você rabiscando um papel, entendeu? **Eu fiz pela forma algébrica também**, e no final você **coloca graficamente** isso daí. Aí você consegue estar visualizando, tendo uma visão geral como um todo, de como se comporta a função, de como se comporta o volume, o volume, ou a velocidade, ou qualquer outra, ou o custo, entendeu? (P10, grifo nosso).

Dessa maneira, podemos identificar a Função Pedagógica **aprofundar**, pois P10 faz a integração de representações (figural+algébrica+gráfica) para levar a um conhecimento mais profundo do conceito estudado.

Além disso, P10 disse:

Você tem que saber conhecer a matemática de várias óticas. Você sabendo fazer um desenho [...] Eu acho que é muito importante,

principalmente naquelas atividades de elaboração de física, problemas de física, alguns problemas de matemática, alguns problemas de lógica, **você tem que desenhar, entendeu?** Eu sempre falo isso para as minhas filhas, para todo mundo, porque eu já ensinei matemática também para o pessoal, não profissionalmente, mas **primeiro você precisa desenhar, você tem que entender** (P10, grifo nosso).

Assim, identificamos na representação figural (desenho) a Função Pedagógica **restringir**, pois, para P10, ela é uma representação que lhe é familiar e a utiliza para guiar a interpretação de outras representações.

#### 4.5 ETAPA 5

Por fim, em nossa última etapa, seguimos com os conceitos de otimização no estudo do comportamento de funções Derivadas. Nesta, o problema de valor ótimo foi proposto pensando na maximização do lucro de uma empresa num contexto de produção e venda de calçados. Assim, possibilitando, por meio da produção de registros de representação matemáticos, outra aplicação prática dos conhecimentos e conceitos adquiridos nos encontros anteriores.

Tomando como início de análise o P01, observamos em etapas anteriores a opção de resolução somente por meio de registros algébricos e, assim como visto também nas demais, P01 não obteve sucesso em sua solução. A Figura 52 apresenta os detalhes de sua resolução, destacando a seta azul como a direção de seus tratamentos.

Figura 52 – Resolução da Etapa 5 do P01

$$L(x) = 20x - x^3 + 6x^2 - 15x$$

$$\overbrace{L(x) = -x^3 + 6x^2 + 5x}$$

$$L(x) = 20x - 27x = 7x$$

$$R(x) = P \cdot x$$

$$20x = P \cdot 7$$

$$P = \frac{7}{20} = 0,35$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

P01 não fez uso dos conceitos de otimização explanados nos dois últimos encontros da pesquisa. Com isso, não foi capaz de apresentar uma solução coerente com a problemática exposta, assim como, não fez uso em momento algum de diferenciações, conteúdo que baseia toda a pesquisa decorrente.

Adiante, atentamos ao resultado obtido por P02 ao problema de otimização, conforme ilustrado pela Figura 53.

Figura 53 – Resolução da Etapa 5 do P02

$$\begin{aligned}
 R(x) &= 20x \\
 C(x) &= x^3 - 6x^2 + 15x \\
 L(x) &= 20x - (x^3 - 6x^2 + 15x) \\
 L(x) &= 20x - x^3 + 6x^2 - 15x \\
 L(x) &= -x^3 + 6x^2 + 5x \\
 L(x) &= -3x^2 + 12x + 15 \\
 x &= \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 15}}{2 \cdot (-3)} \\
 x &= \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 60}}{-6} \\
 x &= \frac{-12 \pm \sqrt{204}}{-6} \\
 x &= \frac{-12 \pm 14,28285686}{6} \\
 x_1 &= 2,282856857 \\
 x_2 &= -1,380476113
 \end{aligned}$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

O tratamento até a maximização da função lucro, sua obtenção e o processo de derivação de P02 estão corretos, porém no momento de obter a quantidade “x” de sapatos vendidos que maximizaria o lucro da empresa, comete equívocos algébricos que custam a solução correta do contexto.

Atentamente, percebe-se que em seu tratamento final de obtenção dos valores de “x” o P02 erra os sinais operatórios. Com um erro relativamente simples, custa toda sua resolução da etapa.

De maneira um tanto semelhante, observamos nesta etapa a resolução de P03 alguns equívocos semelhantes ao visto na análise do participante anterior. Os passos tomados por P03 estão ilustrados pela Figura 54.

Figura 54 – Resolução da Etapa 5 do P03

$$\begin{aligned}
 R(x) &= 20x \\
 C(x) &= x^3 - 6x^2 + 15x \\
 L(x) &= 20x - (x^3 - 6x^2 + 15x) \\
 L(x) &= -x^3 + 6x^2 + 5x \\
 L'(x) &= -3x^2 + 12x + 5 \\
 x &= \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5}}{2 \cdot (-3)} \\
 x &= \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 60}}{-6} \\
 x &= \frac{-12 \pm \sqrt{84}}{-6} \\
 x &= \frac{-12 - 9.16}{-6} = 3.52 \\
 x &= \frac{-12 + 9.16}{-6} = 0.47
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Seguindo a direção das setas de tratamento, P03 realizou corretamente todos os procedimentos algébricos de obtenção tanto da função lucro, como de sua maximização. Mas novamente, em seus passos finais de obtenção da quantidade de vendas, comete equívocos operacionais que lhe custam a solução correta da situação apresentada.

Esta mesma situação é vista na análise do P04 (Figura 55), tomando para solução somente o registro algébrico.

Figura 55 – Resolução da Etapa 5 do P04

$$\begin{aligned}
 R(x) &= 20x \\
 C(x) &= x^3 - 6x^2 + 15x \\
 L(x) &= 20x - (x^3 - 6x^2 + 15x) = l(x) = 20x - x^3 + 6x^2 - 15x \\
 L(x) &= -x^3 + 6x^2 + 5x \\
 l(x) &= -3x^2 + 12x + 5 \\
 0 &= -3x^2 + 12x + 5 \\
 x &= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 20^2}}{2} \\
 x &= \frac{12 \pm 16i}{2} \\
 x' &= 134 \\
 x'' &= -110
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Corretamente, P04 realiza os cálculos e tratamento em direção à solução do problema de maximização, chegando corretamente à função lucro, sua derivada e a otimização igualando a derivada a zero. Contudo, novamente verificamos erros operacionais básicos na solução final e obtenção do resultado.

Equívocos estes que não estão presentes nos registros de P05, como a Figura 56 nos apresenta.

Figura 56 – Resolução da Etapa 5 do P05

$L(x) = R(x) - C(x)$   
 $L(x) = 20x - (x^3 - 6x^2 + 35x)$   
 $L(x) = 20x - x^3 + 6x^2 - 35x$   
 $L(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$   
 $L'(x) = -3x^2 + 12x + 5$   
 $-3x^2 + 12x + 5 = 0$   
 $x' = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 60}}{-6}$   
 $x' = \frac{-26,28}{-6}$   
 $x' = 4,38$   
 Conversão

$L(x) = -(4,38)^3 + 6(4,38)^2 + 5(4,38)$   
 $L(x) = -84,03 + 6 \cdot 19,1844 + 21,9$   
 $L(x) = -84,03 + 115,11 + 21,9$   
 $L(x) = 52,98$

Ela atingirá seu lucro máximo na venda de 4,38 milhões de sapatos. O lucro máximo será de 52,98 milhões de reais.

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Sua solução está correta e, apesar dos cálculos se apresentarem de maneira bastante resumida, nenhum equívoco algébrico foi visualizado. Ao final, o participante não aponta a outra possibilidade de resposta (negativa) para “x”, que seria desconsiderada no contexto da problemática.

Após sua solução, P05 aplica sua resposta à função lucro, para assim entender quanto será o lucro relativo à maximização de vendas. Finalizando sua solução, ainda realiza uma operação de conversão de suas respostas algébricas para um registro em língua natural escrita, explicando sua solução.

Por sua vez, a resolução de P06 é ilustrada na Figura 57. Assim como outros participantes, nesta etapa P06 realizou os procedimentos necessários para obtenção de um valor otimizado (que era a proposta da etapa), porém

novamente observamos erros operacionais na obtenção dos pontos de otimização da função lucro.

Figura 57 – Resolução da Etapa 5 do P06

Handwritten mathematical work for Figure 57:

$$L(x) = 20x - (x^3 - 6x^2 + 15x)$$

$$L(x) = 20x - x^3 + 6x^2 - 15x$$

$$L'(x) = -x^3 + 6x^2 + 5x$$

$$L'(x) = -3x^2 + 12x + 5$$

$$0 = -3x^2 + 12x + 5$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5}}{2 \cdot (-3)}$$

$$x = -12 \pm \frac{14}{-6}$$

$$x_1 = -12 + \frac{14}{-6} = -12$$

$$x_2 = -12 - \frac{14}{-6} = 12$$

Derivatives on the right side:

$$L'(x) = -3x^2 + 12x + 5$$

$$L''(x) = -3 \cdot 2x + 12$$

$$L''(x) = -6x + 12$$

$$L''(x) = -6 \cdot 12 + 12$$

$$L''(x) = -60$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Erros estes que não foram observados em P07, como nos mostra a Figura 58.

Figura 58 – Resolução da Etapa 5 do P07

Handwritten mathematical work for Figure 58:

$$L'(x) = -3x^2 + 12x + 5$$

$$0 = -3x^2 + 12x + 5$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{204}}{2 \cdot (-3)}$$

$$x = \frac{-12 \pm 14,282}{-6}$$

$$x' = \frac{-12 + 14,282}{-6} = \frac{2,282}{-6} = -0,3803$$

$$x'' = \frac{-12 - 14,282}{-6} = \frac{-26,282}{-6} = 4,3803$$

Derivatives on the right side:

$$L'(x) = -3x^2 + 12x + 5$$

$$L''(x) = -6x + 12 + 5$$

$$L''(x) = -6x + 17$$

$$L''(-0,3803) = 14,7182$$

$$L''(4,3803) = -9,2818$$

Final points:

$$P_1 = (-0,3803; 14,7182)$$

$$P_2 = (4,3803; -9,2818)$$

Fonte: Dados da pesquisa.

P07, utilizando somente o registro algébrico, realiza corretamente as operações de tratamento do registro a fim de obter o fenômeno de maximização do lucro da empresa descrita no enunciado. P07 chega a uma resposta correta à situação proposta, e realiza o teste da derivada segunda, tanto para a resposta obtida, quanto para o valor de vendas negativo (de acordo com o enunciado, seria desconsiderado). Nesse sentido, enuncia dois pontos e suas coordenadas a partir dos resultados da Derivada segunda. Apesar de ter sido apto à resolução do problema, parece ter usado de forma equivocada o conceito da Derivada segunda em sua análise de resposta.

Já o P08 utilizou em sua resolução tratamentos algébricos, conforme nos mostra a Figura 59.

Figura 59 – Resolução da Etapa 5 do P08

$$L(x) = 20x - (x^3 - 6x^2 + 15x)$$

$$L(x) = 20x - x^3 + 6x^2 - 15x$$

$$L(x) = -x^3 + 6x^2 + 5x$$

$$L(x) = -3x^2 + 12x + 5$$

$$L(0) = -3 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$$

$$L''(x) = -6x + 12 + 5$$

$$L(x) = 37$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5}}{2 \cdot (-3)}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 60}}{-6}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{84}}{-6}$$

$$x = 3,51$$

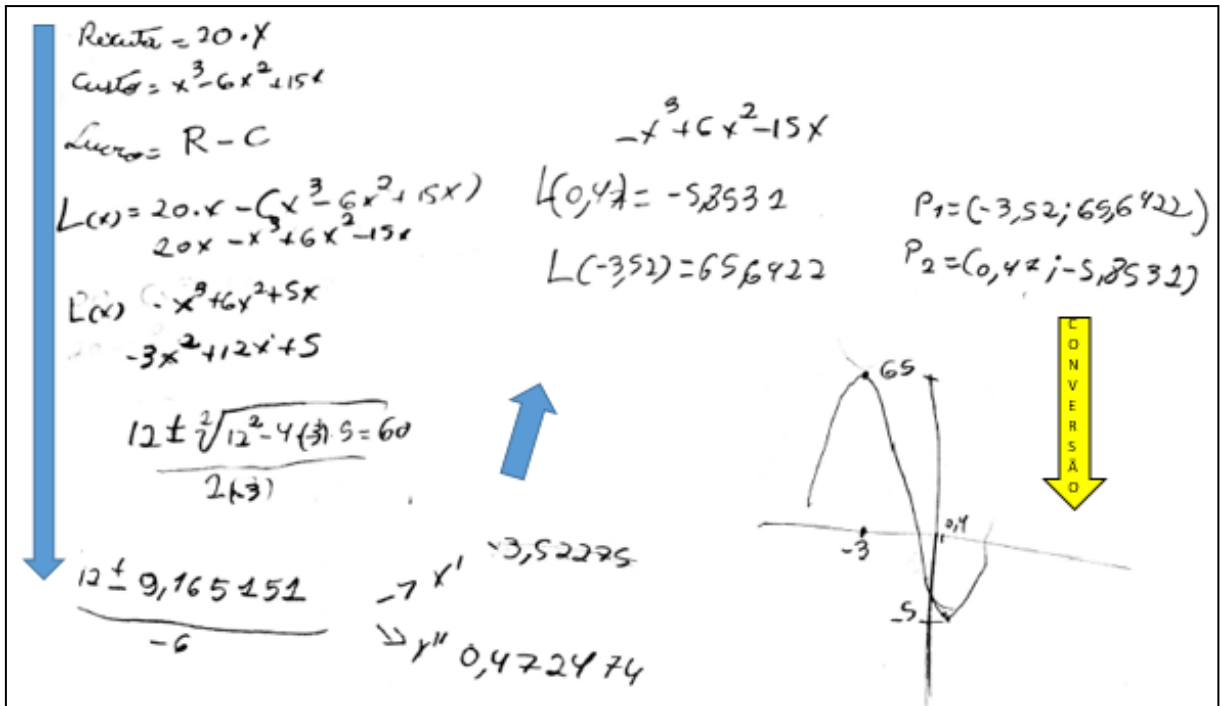
$$x = 0,48$$

Fonte: Dados da pesquisa.

O caminho de resolução tomado pelo participante foi correto, porém ocorreram diversos erros de tratamento, tanto na obtenção da derivada da função lucro, como erros operacionais básicos inerentes à realização do problema, como as raízes de uma equação de segundo grau para solucionar a maximização.

Por sua vez, a Figura 60 nos mostra a resolução efetuada por P09.

Figura 60 – Resolução da Etapa 5 do P09



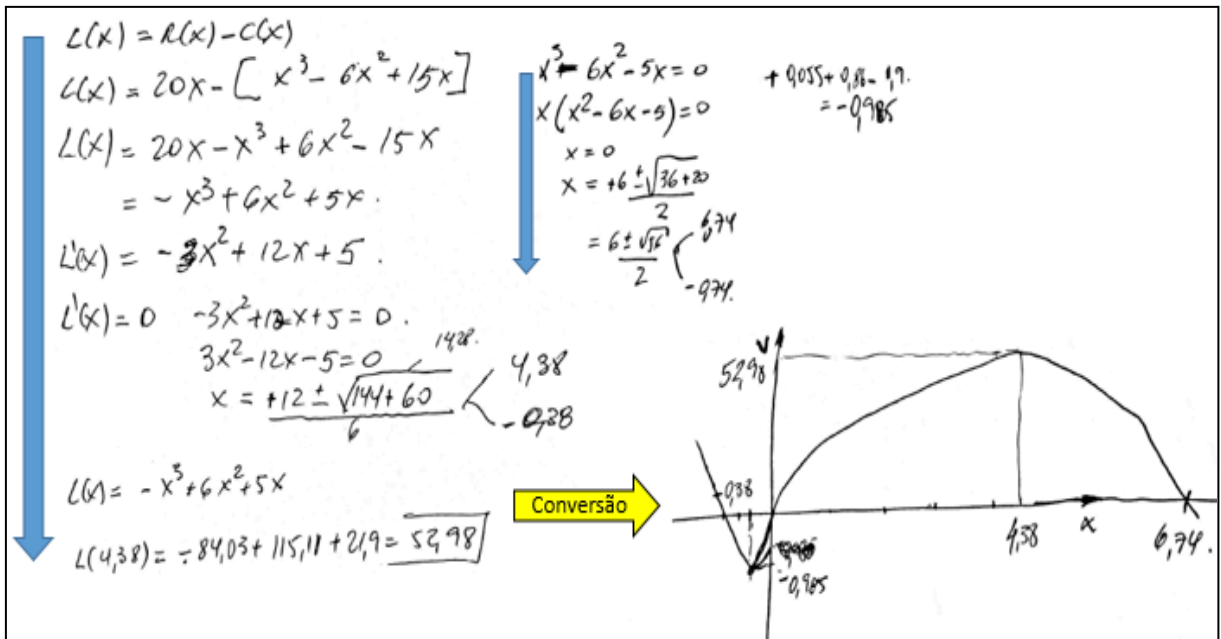
Fonte: Dados da pesquisa.

Atento ao sentido de tratamento tomado, P09 apresenta a mesma coerência de outros participantes no quesito de derivar corretamente a função lucro: igualando a zero e obtendo as raízes da função Derivada, toma o caminho correto também, mas, assim como tantos outros participantes, comete equívocos operacionais quando procura a solução do problema algebricamente.

Ao final de sua resolução, realiza uma operação de conversão para uma representação gráfica de seu resultado equivocado e, também comete equívocos ao nomear pontos bastante aproximados para os valores que obteve matematicamente pelo registro algébrico.

Por fim, e não menos importante, P10, da mesma forma que a resolução do participante anterior, traz o sentido registro algébrico-gráfico para o problema, conforme ilustrado pela Figura 61.

Figura 61 – Resolução da Etapa 5 do P10



**Fonte:** Dados da pesquisa.

Obtendo a Derivada da função lucro e maximizando a mesma, P10 tem sucesso em sua resposta a proposição do problema de otimização. Ao encontrar a quantidade de vendas de sapato que maximizaria os lucros da empresa, o P10 converte a situação-problema para uma análise em registro gráfico, obtendo uma relação entre o lucro da empresa em correspondência à quantidade vendida pela mesma.

Assim, o Quadro 9 nos mostra uma síntese das análises realizadas nas 5 etapas da pesquisa, apresentando os participantes na primeira coluna, e a síntese dos Encontros 1, 2, 3, 4 e 5 nas colunas seguintes, respectivamente.

Quadro 9 – Síntese das análises da pesquisa

Part.	E1 representação; atividade	E2 representação; atividade	E3 representação; atividade	E4 representação; atividade; Função Pedagógica Identificada	E5 representação; atividade
P01	representação algébrica; O participante cometeu equívocos relacionados à aplicação do conceito de limite nos processos de tratamento de registro e obteve um resultado incorreto	representação algébrica e tabular; O participante não registrou todas as operações de tratamento algébrico das Derivadas solicitadas, mas obteve o registro tabular completo e correto	representação algébrica; O participante não conseguiu resolver (erro de derivação)	representação algébrica; O participante não conseguiu resolver (erro de derivação) Restringir (algébrica)	representação algébrica; somente atividade de tratamento; não conseguiu resolver (não utilizou conceitos de otimização visto anteriormente)
P02	representação algébrica; O participante cometeu equívocos relacionados à aplicação do conceito de limite nos processos de tratamento de registro e obteve um resultado incorreto; O participante cometeu equívocos relacionados aos processo algébrico de retirada da indeterminação do limite e obteve um resultado incorreto;	representação algébrica e tabular; O participante não registrou todas as operações de tratamento algébrico das Derivadas solicitadas, mas obteve o registro tabular completo e correto	representação algébrica e gráfica; O participante conseguiu resolver parcialmente (erro conversão álgebra > gráfico)	representação algébrica; O participante não conseguiu resolver (erro tratamento); Restringir (algébrica)	representação algébrica; somente atividade de tratamento; não conseguiu resolver (equívocos de tratamento)
P03	representação algébrica; O participante cometeu equívocos relacionados à aplicação do conceito de limite nos processos de tratamento de registro e obteve um resultado incorreto	representação algébrica e tabular; O participante não registrou todas as operações de tratamento algébrico das Derivadas solicitadas, mas obteve o registro tabular completo e correto	representação algébrica e gráfica; O participante conseguiu resolver parcialmente (erro tratamento algébrico)	representação algébrica; O participante não conseguiu resolver (erro tratamento); Relatou dificuldades em traduzir de texto > álgebra	representação algébrica; somente atividade de tratamento; não conseguiu resolver (equívocos de operações - Matemática básica)
P04	representação algébrica; O participante cometeu equívocos relacionados à aplicação do conceito de limite nos processos de tratamento de registro e obteve um resultado incorreto	representação algébrica e tabular; O participante não registrou todas as operações de tratamento algébrico das Derivadas solicitadas, mas obteve o registro tabular completo e correto	representação algébrica e gráfica; O participante não conseguiu resolver (erro tratamento - obtenção raízes equação quadrática)	representação algébrica e figural; O participante não conseguiu resolver (erro tratamento); Complementar (figural)	representação algébrica; somente atividade de tratamento; não conseguiu resolver (equívocos de operações - Matemática básica)
P05	representação algébrica e textual; O participante realizou um processo adequado de conversão de registros	representação algébrica e tabular; Realizou todas as operações de tratamento algébrico das Derivadas por limite para completar o registro tabular de maneira correta	representação algébrica e gráfica; O participante conseguiu resolver	representação algébrica; Resolveu corretamente, com tratamentos adequados e conversão coerente; Restringir (língua natural)	representação algébrica e textual; tratamento e conversão; conseguiu resolver

P06	representação algébrica; O participante cometeu equívocos relacionados à aplicação do conceito de limite nos processos de tratamento de registro e obteve um resultado incorreto	representação algébrica e tabular; O participante não registrou todas as operações de tratamento algébrico das Derivadas solicitadas e não obteve o registro tabular completo e correto	representação algébrica e gráfica; O participante não conseguiu resolver (erro tratamento - obtenção coordenadas $v$ )	representação algébrica; Resolveu corretamente, com tratamentos adequados; Restringir (algébrica)	representação algébrica; somente atividade de tratamento; não conseguiu resolver (equívocos operacionais - extremos da função)
P07	representação algébrica; O participante cometeu equívocos relacionados à aplicação do conceito de limite nos processos de tratamento de registro e obteve um resultado incorreto	representação algébrica e tabular; O participante não registrou todas as operações de tratamento algébrico das Derivadas solicitadas e não obteve o registro tabular completo e correto	representação algébrica e gráfica; O participante conseguiu resolver	representação algébrica e figural; Resolveu corretamente, com tratamentos adequados e conversão coerente; Restringir (algébrica)	representação algébrica; somente atividade de tratamento; conseguiu resolver (porém demonstrou equívocos operacionais - derivada segunda)
P08	representação algébrica; O participante cometeu equívocos relacionados à aplicação do conceito de limite nos processos de tratamento de registro e obteve um resultado incorreto	representação algébrica e tabular; O participante não registrou todas as operações de tratamento algébrico das Derivadas solicitadas, mas obteve o registro tabular completo e correto	representação algébrica; O participante não conseguiu resolver (erro tratamento - obtenção dos pontos máximo e mínimo)	representação algébrica e figural; Resolveu corretamente, com tratamentos adequados e conversão coerente; Restringir (figural)	representação algébrica; somente atividade de tratamento; não conseguiu resolver (equívocos de tratamento)
P09	representação algébrica; O participante cometeu equívocos relacionados à aplicação do conceito de limite nos processos de tratamento de registro e obteve um resultado incorreto; O participante cometeu equívocos relacionados aos processo algébrico de retirada da indeterminação do limite e obteve um resultado incorreto;	representação algébrica e tabular; O participante não registrou todas as operações de tratamento algébrico das Derivadas solicitadas e não obteve o registro tabular completo e correto	representação algébrica e gráfica; O participante conseguiu resolver	representação algébrica e figural; Resolveu corretamente, com tratamentos adequados e conversão coerente; Restringir (figural)	representação algébrica e gráfica; não conseguiu resolver (equívocos de tratamento e de conversão)
P10	representação algébrica; O participante realizou um processo adequado de tratamento de um registro e obteve o resultado corretamente	representação algébrica e tabular; Realizou todas as operações de tratamento algébrico das Derivadas por limite para completar o registro tabular de maneira correta	representação algébrica e gráfica; O participante conseguiu resolver	representação algébrica e gráfica; Resolveu corretamente, com tratamentos adequados e conversão coerente; Aprofundar (figural+algébrica+gráfica) e Restringir (figural)	representação algébrica e gráfica; conseguiu resolver

Fonte: os autores

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo investigar de que modo a aplicação de uma Sequência de Atividades (SA), sistematizada à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e das Múltiplas Representações (MR), poderia contribuir para a compreensão do conceito de Derivada de funções por licenciandos em Matemática.

A proposta partiu de inquietações vivenciadas ao longo da trajetória acadêmica do pesquisador, bem como de evidências teóricas que apontam dificuldades recorrentes no ensino e aprendizagem de conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral, especialmente na articulação entre diferentes registros e modos representacionais.

O trabalho foi estruturado em duas frentes complementares: o Mapeamento Sistemático de Literatura sobre Produtos Educacionais (PE) voltados ao ensino de Derivadas com base na TRRS e/ou MR; e a elaboração e aplicação da SA que compôs o PE desta pesquisa.

O Mapeamento Sistemático de Literatura revelou que, embora a TRRS esteja presente em todos os quatro PE mapeados, nenhum deles fez uso formal das MR, assim como evidenciado em parte de artigos da área (Fregonezi; Trevisan Sanzovo, 2024). Observou-se ainda predominância de produções do tipo *material didático/instrucional* (PTT1) e apenas um *software/aplicativo* (PTT4). Os dados mostram uma lacuna na elaboração de materiais que estimulem intencionalmente a coordenação entre registros e modos representacionais, condição considerada fundamental por Duval (1995; 2003) para uma aprendizagem matemática aprofundada.

A SA elaborada e aplicada na presente pesquisa foi estruturada de modo a explorar intencionalmente diferentes registros — algébrico, gráfico, tabular e figural — e as Funções Pedagógicas das MR - complementar, restringir e aprofundar (Ainsworth, 1999; 2006). Ao longo das cinco etapas, os 10 participantes da pesquisa tiveram oportunidades de mobilizar registros variados, realizar conversões e refletir sobre as conexões entre formas distintas de representar o mesmo objeto matemático.

A análise dos registros produzidos permitiu identificar dois grupos

distintos quanto ao desenvolvimento das atividades: os que conseguiram realizar integralmente as tarefas, com domínio nos tratamentos e coerência nas conversões; e os que apresentaram dificuldades significativas, seja nos tratamentos internos aos registros, seja nas conversões.

A partir da avaliação dos registros produzidos, foi possível classificar os participantes em três grandes grupos. O primeiro grupo compreende aqueles que conseguiram realizar integralmente as tarefas propostas, demonstrando domínio tanto nos tratamentos internos aos registros quanto nas conversões entre eles. P05 e P10 ilustram esse cenário: o primeiro apresentou execuções corretas de tratamentos algébricos e conversões precisas para o registro figural, enquanto o segundo mobilizou, de forma articulada, registros algébrico, tabular e gráfico, mantendo coerência e explorando as funções pedagógicas das MR, como a complementaridade e o aprofundamento conceitual. Esses casos representam o que Duval (2012) define como coordenação efetiva de registros, evidenciando rapidez e espontaneidade na transição entre representações.

O segundo grupo refere-se aos participantes que, embora tenham iniciado a SA com dificuldades acentuadas, apresentaram avanços significativos ao longo do processo. P06, P08 e P09 são exemplos representativos: nas primeiras etapas, demonstraram limitações na compreensão dos enunciados e na realização de conversões, resultando em respostas incompletas ou incorretas. Entretanto, a retomada de conceitos em diferentes registros e a prática reiterada favoreceram a internalização progressiva das relações entre representações. Nas últimas atividades, conseguiram concluir as tarefas propostas de forma mais coerente e fundamentada, revelando evolução conceitual e maior autonomia na resolução. Esse resultado reforça a importância da continuidade e da prática sistemática em propostas pedagógicas baseadas na TRRS e nas MR.

Por outro lado, o terceiro grupo é composto por participantes que não conseguiram desenvolver a maioria das atividades, apresentando dificuldades persistentes ao longo de diferentes etapas. P01, P02 e P03 são exemplos que integram este grupo. P01 revelou limitações na aplicação de conceitos de derivada e otimização, resultando em respostas incompletas ou incorretas em etapas-chave. P02 apresentou erros recorrentes de tratamento e dificuldades na transposição entre registros, comprometendo a resolução das últimas atividades. P03 demonstrou

fragilidades na conversão de enunciados verbais para a linguagem algébrica e falhas em operações básicas, o que inviabilizou a finalização adequada de problemas mais complexos. Esses casos indicam a necessidade de estratégias pedagógicas individualizadas, que considerem o ritmo e as lacunas conceituais, promovendo mediações que auxiliem na construção de coordenações entre registros.

De forma geral, o desenvolvimento das atividades ocorreu conforme o previsto, com a maior parte dos participantes demonstrando alto nível de envolvimento nas tarefas propostas. Esse engajamento contribuiu para aulas mais participativas, marcadas por intervenções, questionamentos e momentos de discussão coletiva. Todavia, o principal obstáculo identificado ao longo do processo foi a evasão e a falta de assiduidade de alguns estudantes. Alguns licenciandos estiveram ausentes em determinados encontros, não integrando a pesquisa, enquanto outros participaram apenas do primeiro encontro e, por diferentes razões, optaram por não dar continuidade às atividades.

Em síntese, os resultados revelam que o êxito na execução das tarefas não depende exclusivamente do domínio técnico de um único registro, mas sim da capacidade de coordenar intencionalmente diferentes registros de representação. Os dados também indicam que, mesmo para alunos que iniciam com dificuldades, a prática estruturada e a retomada de conceitos em diferentes registros podem promover avanços efetivos. Por outro lado, para aqueles que mantêm dificuldades persistentes, intervenções pedagógicas mais direcionadas e atividades mediadas tornam-se imprescindíveis para viabilizar a apropriação das Funções Pedagógicas das MR. Assim, esta pesquisa reforça a relevância e potencial de propostas pedagógicas fundamentadas na TRRS e nas MR (De Goes et al., 2024), que desafiam o estudante a transitar entre registros e compreender suas especificidades, limites e potencialidades, contribuindo para uma aprendizagem matemática aprofundada e duradoura, além de desfazer a tendência dos aprendizes em vincularem os objetos a apenas uma forma de representação.

Essa distinção evidencia que o êxito na execução das tarefas não se limita ao domínio de um único registro de representação, mas está diretamente ligado à capacidade de coordenar diferentes registros de forma fluida, aspecto central na TRRS e fundamental para a aprendizagem matemática. O primeiro grupo

demonstrou não apenas competência técnica nos tratamentos, mas também compreensão das relações entre representações, explorando de forma ampla o potencial das MR. O segundo grupo confirma a necessidade de estratégias pedagógicas que enfatizem a conversão e a articulação entre registros, para superar abordagens fragmentadas que limitam a compreensão conceitual.

Além dos casos comparativos, é relevante mencionar que, ao longo das etapas, alguns participantes conseguiram explorar de forma parcial Funções Pedagógicas específicas. P03, por exemplo, mesmo com dificuldades de conversão, realizou com êxito tratamentos algébricos isolados; já P04, ao converter cálculos algébricos para uma representação figural, reforçou o caráter complementar entre registros. P10, ao coordenar registros diversos, atingiu um nível de aprofundamento conceitual esperado pelas hipóteses fundamentais da TRRS.

Os resultados indicam que a SA cumpriu seu papel de criar um ambiente de aprendizagem em que os participantes foram desafiados a transitar entre representações, compreender seus usos e refletir sobre limitações e potencialidades. A proposição de atividades que exploram intencionalmente a complementaridade, a restrição e o aprofundamento contribuiu para evidenciar indícios de aprendizagem e para desenvolver competências alinhadas às demandas do ensino contemporâneo de Matemática.

Este estudo alcançou seu objetivo de investigar indícios de aprendizagem a partir da aplicação de uma SA fundamentada em referenciais sólidos. Ele contribui para o campo da Aprendizagem de Matemática ao passo que identificou lacunas na produção de materiais que integrem TRRS e MR para a aprendizagem de Derivadas, além de propor uma SA estruturada que explora múltiplos registros e modos representacionais; e evidenciou, por meio de exemplos concretos, como diferentes perfis de mobilização representacional impactam em sua aprendizagem.

Como perspectivas futuras, recomenda-se ampliar a aplicação da SA para outros conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral, bem como adaptá-la a diferentes níveis de ensino. Além disso, torna-se pertinente aprofundar investigações que utilizem a TRRS e o trabalho com as MR como referenciais centrais, visando compreender de forma mais abrangente as condições que favorecem a coordenação espontânea entre registros e a superação de obstáculos na aprendizagem.

## REFERÊNCIAS

- AINSWORTH, S. The functions of multiple representations. **Computers & education**, v.33, p.131-152, 1999.
- AINSWORTH, S. DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. **Learning and instruction**, v.16, n.3, p.183-198, 2006.
- AINSWORTH, S. The educational value of multiple-representations when learning complex scientific concepts. In: GILBERT, J. K.; REINER, M.; NAKHLEH, M. **Visualization: Theory and practice in science education**. New York: Springer, p.191–208, 2008.
- AINSWORTH, S. The multiple representations principle in multimedia learning. In: MAYER, R. E. **The Cambridge handbook of multimedia learning**. Cambridge: Cambridge University Press. 2014. p.464–486.
- AINSWORTH, S.; BIBBY, P.; WOOD, D. Information technology and multiple representations: new opportunities–new problems. **Technology, Pedagogy and Education**, v. 6, n. 1, p. 93-105, 1997.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: **Porto Editora**, p.147-202, 1994.
- BRASIL. Ministério da Educação. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. **Ficha de avaliação: programas acadêmicos e profissionais - Área de Ensino**. Avaliação quadrienal 2017/2020. Brasília: MEC; CAPES, 2020. Disponível em: [https://www.gov.br/capes/pt-br/centrais-de-conteudo/FICHA\\_ENSINO.pdf](https://www.gov.br/capes/pt-br/centrais-de-conteudo/FICHA_ENSINO.pdf). Acesso em: 15 abr. 2024.
- BROUSSEAU, G. Theory of Didactical Situations in Mathematics. *Didactique des Mathématique*, 1970-1990. Dordrecht. **Kluwer Academic Publisher**. v.19, 1997.
- CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes em la teoria antropológica de lo didáctico. **Reserches em Didactique des Mathématique**, v.19, n.2, p.221-266, 1999.

DE GOES, A. L.; TREVISAN SANZOVO, D. LUCAS, L. B.; LUCCAS, S. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Múltiplas Representações na Educação Matemática: uma Revisão Sistemática de Literatura. **Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas**, v. 25, n. 2, p. 353-363, 2024.

DERMEVAL, D.; COELHO, J.; BITTENCOURT, I. Mapeamento Sistemático e Revisão Sistemática da Literatura em Informática na Educação. In: Metodologia de Pesquisa Científica em Informática na Educação: Abordagem Quantitativa. Porto Alegre: **Sociedade Brasileira de Computação (SBC)**, 2020.

DUVAL, R. **Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels**. 1 ed. Bern: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Aprendizagem em matemática. Campinas: Papyrus Editora, 2003.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano; registro semiótico e aprendizagens intelectuais**. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Maria Rosâni Abreu da Silveira – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R.; Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

FREGONEZI, L. R. M.; TREVISAN SANZOVO, D. Busca e relato de pesquisas acerca das múltiplas representações no ensino de Ciências e Educação Matemática presentes em periódicos nacionais. **Revista Educação Pública**, v. 24, n. 35, 2024.

KITCHENHAM, B.; CHARTERS, S. **Guidelines for performing Systematic Literature Reviews in Software Engineering**. Technical Report EBSE 2007-001, Keele University and Durham University Joint Report, 2007.

LABURÚ, C. E.; FARIA, R. A. Coordenação e Multiplicidade Representacional em uma atividade de Função do 1º grau. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 7, n. 13, p.61-86, 2018.

LABURÚ, C. E.; SILVA, O. H. M. Multimodos e múltiplas representações: fundamentos e perspectivas semióticas para a aprendizagem de conceitos científicos. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 16, n. 1, p. 7-33, 2011.

LABURÚ, C. E.; ZOMPERO, A. D. F.; BARROS, M. A. Vygotsky e múltiplas representações: leituras convergentes para o ensino de ciências. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v.30, n.1, p.7-24, 2013.

LARSON, R. Cálculo aplicado. São Paulo: **Cengage Learning**, 2010.

LEMKE, Jay L. Teaching all the languages of science: Words, symbols, images, and actions. In: **Conference on Science Education in Barcelona**. 1998a.

MARQUES, L.; SILVA, B. A. **Sobre a utilização do livro didático no estudo de derivadas parciais**. 2009. 81 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

MATEUS, P.; ALMOULOU, S. A. **Cálculo Diferencial e Integral nos Livros Didáticos: uma análise do ponto e vista da Organização Praxeológica**. 2006. 187 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

MOHER, D.; STEWART, L.; SHEKELLE, P. All in the family: systematic reviews, rapid reviews, scoping reviews, realist reviews, and more. **Systematic Reviews**, v.4, n.168, p.1-2, 2015.

MOREIRA, M. A. O (mestrado) profissional em ensino. **Revista Brasileira de Pós-Graduação (RBPG)**, v.1, n.1, p.131-142, 2004.

MORETTI, M. T. O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática. **Revista Contrapontos**, v. 2, n. 3, p. 343-362, 2002.

MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F.; ALMOULOU, S. A. Congruência semântica: um fenômeno semiótico e cognitivo a ser levado em conta na aprendizagem matemática. **Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática**, [s.], v. 31, n. 1, p. 92-112, 2022.

NIEZER, T. M.; *et al.* Caracterização dos produtos desenvolvidos por um programa de mestrado profissional na área de ensino de ciência e tecnologia. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v.8, n.3, 2015.

PRAIN, V.; WALDRIP, B. An exploratory study of teachers' and students' use of multi-modal representations of concepts in primary science. **International Journal of Science Education**, v.28, n.15, p.1843-1866, 2006.

PINHEIRO, F. F. P. S.; AIRES, J. P. Uma análise sobre os produtos técnicos e tecnológicos desenvolvidos na pós-graduação. **Educitec - Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico**, v. 8, 2022.

TREVISAN SANZOVO, D. **Níveis Interpretantes alcançados por estudantes de licenciatura em ciências biológicas acerca das Estações do Ano por meio da utilização da estratégia de Diversidade Representacional: uma Leitura Peirceana para sala de aula**. 2017. 192 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

VISEU, F. Representações na aprendizagem da derivada de uma função por alunos do ensino secundário. **Zetétike**, Campinas, v.25, n.2, p.265-288, 2017.

VOSGERAU, D. S. R.; MEYER, P.; CONTRERAS, R. Análise de dados qualitativos nas pesquisas sobre formação de professores. **Rev. Diálogo Educ.**, Curitiba, v.17, n.53, p.909-935, 2017.

WAIDEMAN, A. C.; CARGNIN, C. **Um aplicativo para o estudo de derivadas**. 2018. 173 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2018a.

WAIDEMAN, A. C.; CARGNIN, C. **Caderno de questões para o estudo de derivadas**. 2018. 42 f. Produto Educacional (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2018b.

## APÊNDICES

## APÊNDICE A

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido



### Universidade Estadual do Norte do Paraná – UENP

Lei no 15.300 – D.O.E. no 7.320, de 28 de setembro de 2006.

CNPJ 08.885.100/0001-54

Campus de Cornélio Procopio.



### PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (pesquisa com maiores)

Pesquisadora Responsável: Guilherme Augusto Bossi Tozo

Endereço: Rua Rui Barbosa, 320, Joaquim Távora-PR

CEP: 86.455-000 Fone: (43) 99950-8804 E-mail: [gui\\_sxw@hotmail.com](mailto:gui_sxw@hotmail.com)

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Este é um convite especial para você participar voluntariamente da pesquisa intitulada “Aprendizagem de Derivadas com base na Teoria dos Registros de Representações Semióticas e nas Múltiplas Representações”. Por favor, leia com atenção as informações abaixo antes de dar seu consentimento. Em caso de dúvidas entre em contato diretamente com o pesquisador responsável.

#### OBJETIVO E BENEFÍCIOS DO ESTUDO

Nosso objetivo, com esta pesquisa, consiste em investigar de que modo a aplicação de uma Sequência de atividades sistematizada pela teoria dos registros de representação semiótica (TRRS) e pelas Múltiplas Representações (MR) auxilia uma turma de professores de Matemática em formação inicial a compreender o conceito das Derivadas de funções. Por meio desta pesquisa você poderá obter maiores conhecimentos sobre Cálculo Diferencial Integral - I.

#### PROCEDIMENTOS/METODOLOGIA

Sua participação será muito importante. Ofertaremos um curso de forma híbrida (encontros presenciais, síncronos e assíncronos) via extensão, para todos professores de Matemática em formação inicial da Universidade Estadual do Norte do Paraná – Campus Jacarezinho. Os dados que utilizaremos em nossa pesquisa serão obtidos por meio de um questionário inicial de teor diagnóstico e também dos registros produzidos pelos participantes durante a aplicação da sequência de atividades. Para a utilização desses dados na pesquisa adotaremos nomes fictícios de modo que não seja possível a identificação dos participantes. O processamento e armazenamento desses dados estão estritamente condicionados ao pesquisador de modo que não se possa fazer a identificação de suas respectivas grafias, os endereços de e-mail dos participantes serão salvos em arquivo separado das respostas do questionário e, em ambos arquivos, o participante será identificado pelo mesmo código.

---

Rubrica do Pesquisador

---

Rubrica do Participante da Pesquisa

**DIFICULDADE DE ACESSO À INTERNET**

Os pesquisadores asseguram como forma de minimização que, as informações não fornecidas pelo participante (por exemplo, IP) não serão acessadas pelo pesquisador.

**DESPESAS/ RESSARCIMENTO E INDENIZAÇÃO**

Os participantes da pesquisa são isentos de qualquer custo e terão direito de ressarcimento a qualquer eventual despesa não prevista, além de indenização por qualquer dano que possa surgir.

**PARTICIPAÇÃO VOLUNTÁRIA**

Sua participação é *voluntária* e você terá total liberdade para desistir a qualquer momento, sem que isso acarrete a você qualquer prejuízo, caso algum participante sinta algum desconforto durante a realização da pesquisa tanto em suas etapas presenciais como as não presenciais, este poderá ficar à vontade para continuar em outro momento ou desistir sem prejuízo algum, caso ocorra a desistência de participação após responder ao questionário, não será possível a retirada de suas respostas do banco de dados, uma vez que o questionário é anônimo.

**GARANTIA DE SIGILO E PRIVACIDADE**

As informações relacionadas ao estudo são confidenciais e qualquer informação divulgada em relatório ou publicação será feita sob forma codificada (nome fictício), para que a confidencialidade seja mantida. O pesquisador garante que seu nome não será divulgado sob hipótese alguma.

**DADOS COLETADOS**

O pesquisador irá armazenar em um computador de controle pessoal e em uma nuvem virtual de arquivos, estes serão armazenados por um período de 5 anos seguindo a resolução CNS 466/12, e, em sequência, os dados produzidos em folha durante a pesquisa serão fragmentados e descartados assim como os dados virtuais também serão completamente excluídos tanto do computador, quanto da nuvem de armazenamento do pesquisador

**ESCLARECIMENTO DE DÚVIDAS**

Você pode fazer todas as perguntas que julgar necessárias durante e após a pesquisa. Caso você tenha alguma denúncia de cunho ético, poderá contatar o Comitê de Ética (CEP/UENP, Rod. BR 369, Km 54, Bandeirantes-PR, CEP 86360-000, Caixa Postal 261, Fone (43)3542-8056, e-mail: cep@uenp.edu.br), funcionamento de segunda a sexta-feira das 7h30min às 12h e das 13h30min às 17h. É assegurado ao participante a procura de indenização caso a pesquisa lhe cause algum dano.

---

Rubrica do Pesquisador

---

Rubrica do Participante da Pesquisa

Diante do exposto eu, \_\_\_\_\_, RG nº \_\_\_\_\_, após a explicação do pesquisador, concordo em participar da pesquisa em questão.

Cornélio Procópio, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2024.

\_\_\_\_\_  
Pesquisador

\_\_\_\_\_  
Participante da Pesquisa

**ANEXOS**

## ANEXO A

### Ementa da Disciplina de CDI-I da Universidade de aplicação

<b>Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I</b>					
<b>Carga horária:</b> <b>120</b>	<b>Teórica:</b> <b>120</b>	<b>Prática:</b>	<b>PCC:</b>	<b>AEX:</b>	<b>TICS/EAD:</b> <b>vide item 8</b>
<p><b>Ementa:</b> Limite e continuidade de funções reais. Diferenciação de funções reais e suas aplicações. A integral de funções de uma variável e suas aplicações. Técnicas de integração. Equações diferenciais simples: método da separação de variáveis.</p> <p><b>Bibliografia Básica:</b></p> <p>BOULOS, P. <b>Cálculo Diferencial e Integral, v.1.</b> São Paulo: MKRON Books, 1999.</p> <p>GUIDORIZZI, H. L. <b>Um Curso de Cálculo, Vol. I.</b> 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 2016.</p> <p>LEITHOLD, L. <b>O Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 1.</b> 3. ed. São Paulo. ed. Harbra. 2017.</p> <p>STEWART, J. <b>Cálculo, Vol. 1.</b> 8. ed. São Paulo: Cengage, 2017.</p> <p><b>Bibliografia Complementar:</b></p> <p>FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. <b>Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração.</b> 5. ed. São Paulo: Makron, 1992.</p> <p>IEZZI, G. <i>et al.</i> <b>Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. I a X,</b> (ou Série Compacta), São Paulo: Atual Editora Ltda1985.</p> <p>KAPLAN, W. <b>Cálculo Avançado.</b> 7. reimp. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1991.</p> <p>LARSON, R.; HOSTETLER, R. P.; EDWARDS, B. H. <b>Cálculo, v.1.</b> 8. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.</p> <p>SIMMONS, J. F. <b>Cálculo com Geometria Analítica.</b> São Paulo: Editora McGraw Hill, 1987.</p> <p>STEWART, J. <b>Calculus: Concepts and contexts.</b> Cengage Learning, 2009.</p>					