

Universidade Estadual do Norte do Paraná

Repositório Institucional UENP

<https://repositorio.uenp.edu.br>

Programa de Pós-Graduação em Ensino

Dissertações

2023

Modelagem matemática nos anos iniciais: um design usando uma sequência de atividades

Selleti, Maria Cláudia Silva Jardim

Universidade Estadual do Norte do Paraná

<https://repositorio.uenp.edu.br/handle/123456789/435>

Baixado de Repositório Institucional UENP



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE
DO PARANÁ**

Campus Cornélio Procópio

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO**

MARIA CLÁUDIA SILVA JARDIM SELLETI

**MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS: UM
DESIGN USANDO UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES**

MARIA CLÁUDIA SILVA JARDIM SELLETI

**MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS: UM
DESIGN USANDO UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná – Campus Cornélio Procópio, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino.

Orientador(a): Prof(a). Dr(a). Lourdes Maria Werle de Almeida.

Coorientador(a): Prof(a). Dr(a). Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa.

Ficha catalográfica elaborada por , através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UENP

Silva Jardim Selletti, Maria Cláudia

Modelagem matemática nos anos iniciais: um design usando uma sequência de atividades. / Maria Cláudia Silva Jardim Selletti; orientadora Lourdes Maria Werle de Almeida; co-orientador Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa - Cornélio Procópio, 2023.
112 p. :il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino) - Universidade Estadual do Norte do Paraná, Centro de Ciências Humanas e da Educação, Programa de Pós Graduação em Ensino, 2023.

1. Ensino Fundamental. 2. Modelagem Matemática. 3. Geometria. 4. Medidas. 5. Medições. I. Werle de Almeida, Lourdes Maria, orient. II. Palharini Alvim Sousa, Bárbara Nivalda, co-orient. III. Título.
CDU: S586m

MARIA CLÁUDIA SILVA JARDIM SELLETI

MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS: *UM DESIGN* USANDO UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná – Campus Cornélio Procópio, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino.

Após realização de defesa o trabalho foi considerado:

BANCA EXAMINADORA

Orientador(a): Prof(a). Dr(a). Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual do Norte do Paraná - UENP

Coorientador(a): Prof(a). Dr(a). Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa
Universidade Estadual Norte do Paraná – UENP

Prof. Dr. Emerson Tortola
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Prof(a). Dr(a). Magna Natália Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Cornélio Procópio, maio de 2023.

Dedico este trabalho à *minha filha Beatriz, por ter me tornado uma mãe mais forte!* Ao meu filho Pedro, por ter *compartilhado das minhas angústias e me incentivado a prosseguir!* Para *vocês e por vocês! Sempre!*

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao bom Deus todo poderoso que me carregou em seus braços em toda esta trajetória. Obrigada por me amar tanto e nunca desistir de mim!

Aos meus pais, que incessantemente oram por mim; deles vêm toda minha resiliência frente às lutas. Gratidão por ainda tê-los comigo!

Aos meus filhos, Beatriz e Pedro que são a razão dos meus dias, agradeço pelo brilho em seus olhos, quando pediam para que eu não parasse de tentar. Tudo por vocês, meus amores!

Ao meu esposo, que sempre apoiou meus estudos e compreendeu os momentos de ausência e exaustão! “Você não solta minha mão e eu não solto a sua!”

Agradeço a um anjo que atende pelo nome de Kelly Pfahl que foi minha conselheira, amiga, irmã e ainda orava por mim, sempre me fazendo acreditar que eu era capaz. Gratidão sem fim!

À minha amiga de profissão, Cláudia Valéria, que sempre me socorreu nos momentos de trabalho em que eu me afastava para as coletas de dados.

À minha diretora e amiga Zenilda, por toda paciência e compreensão dispensada nos momentos em que se exigia cobrança no trabalho e ela os substituía por compreensão.

À querida professora Márcia do 4º ano em que coletei os dados da pesquisa, sempre disposta e serena a me emprestar seu celular para auxiliar nas gravações em grupos.

Agradeço, com muito carinho, aos 25 alunos do 4º ano onde coletei os dados! Uma turma que foi alfabetizada no 1º ano e após dois anos de pandemia voltou às aulas presenciais, ávida pelo retorno à escola! Foi gratificante a colaboração dos alunos na realização dessa pesquisa.

De maneira especial, agradeço à profª Dr(a). Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa, minha coorientadora, que proporcionou essa oportunidade para que eu realizasse esse tão sonhado mestrado. Deus abençoe você, professora!

Agradeço, com muito carinho, minha orientadora, profª Dr(a). Lourdes Maria Werle de Almeida, por todo carinho e paciência! Levarei para sempre sua dedicação ao me receber por várias vezes na sua casa para me orientar! Me tomou pela mão, como só os gigantes de coração fazem! Me fez acreditar na frase do

professor Lucken em uma de suas aulas iniciais do mestrado: “O ensino deve ser belo!”

Estendo meus agradecimentos à honrosa banca de qualificação que tanto contribuiu e me animou para que eu concluísse este trabalho: querida professora Dra. Magna Natália Marin Pires e professor Dr. Emerson Tortola. Que orgulho, conhecê-los! E também às secretárias que me auxiliaram durante as prorrogações realizadas e documentações em atrasos no SUAP.

Enfim, agradeço a todos os professores do PPGEN, que me ensinaram tanto durante o mestrado: João Coelho Neto; Lucken Bueno Lucas; Rudolph dos Santos Gomes Pereira; Marília Bazan Blanco; Simone Luccas e Letícia Storto. Tenho muito orgulho em ter passado pelas mãos de cada um de vocês! Sucesso e paz, sempre!

Ah, já ia me esquecendo, agradeço imensamente a menina pobre que apanhava da professora em meio aos colegas na primeira série (hoje, primeiro ano) por não saber responder oralmente os resultados das “continhas” no quadro. A menina passou a usar óculos um ano depois (a dificuldade era porque não enxergava) e hoje, 43 anos depois, em meio a tantos obstáculos, conseguiu vencer a Matematicafobia e concluir este tão sonhado mestrado! Essa menina sou eu!

Tudo posso naquele que me fortalece.
Filipenses 4.13

SELLETI, Maria Cláudia Silva Jardim. **Modelagem matemática nos anos iniciais: um *design* usando uma sequência de atividades.** 2023. 112 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino) – Universidade Estadual do Norte do Paraná, Cornélio Procopio, 2023.

RESUMO

Na dissertação se investiga como alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental lidam com medidas e medições em uma sequência de atividades de modelagem matemática. O quadro teórico traz à tona a problemática do ensino de geometria, particularmente no Ensino Fundamental, e aponta para a relevância de metodologias para fomentar a aprendizagem dos alunos. A modelagem matemática, por meio de uma sequência de atividades de modelagem como caracterizada na literatura, é apresentada como possibilidade para o ensino de conceitos geométricos. Uma pesquisa empírica é realizada com uma turma do quarto ano do Ensino Fundamental em que cinco atividades de modelagem foram desenvolvidas por 25 alunos, proporcionando a abordagem de medidas e medições e a introdução de conceitos matemáticos ativados nas ações dos alunos. Os resultados apontam que as atividades proporcionaram o uso de diferentes instrumentos de medidas, a realização de medições com finalidades específicas visando a construção de uma solução para um problema não matemático que emergiu em cada atividade de modelagem matemática.

Palavras-chave: Ensino Fundamental. Modelagem Matemática. Geometria. Medidas. Medições.

SELLETI, Maria Cláudia Silva Jardim. **Mathematical modeling in the early years: a design using activity sequence**. 2023. 112 f. Dissertation (Professional Master in Teaching) – Northern Paraná State University, Cornélio Procópio, 2023.

ABSTRACT

The dissertation investigates how students of the first school years deal with measures and measurements in a sequence of mathematical modelling activities. The theoretical framework brings up the problem of teaching geometry, particularly in elementary school, and points to the relevance of methodologies to encourage student learning. Mathematical modelling and a sequence of modelling activities as characterized in the literature are presented as a possibility for teaching geometric concepts. An empirical research is carried out with a class of the fourth year of Elementary School in which five modeling activities are developed by 25 students, providing the approach of measures and measurements and the introduction of mathematical concepts activated in the actions of the students. The results point out that the activities provided the use of different measure instruments, the realization of measurements with different purposes aiming at the construction of a solution for a non-mathematical problem that emerged in each mathematical modelling activity.

Keywords: Elementary Education. Mathematical Modelling. Geometry. Measures. Measurements.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Tabela de medidas padronizadas.....	21
Figura 2 – Ciclo das fases da modelagem matemática	28
Figura 3 – Esquema organizacional para sequências de atividades de modelagem.....	30
Figura 4 – Seis dimensões da aprendizagem geométrica em práticas de modelagem.....	35
Figura 5 – Uso do molde de cartolina.....	45
Figura 6 – Resolução dos alunos do grupo G1	46
Figura 7 – Resolução dos alunos do grupo G2	47
Figura 8 – Modelo matemático do grupo G2	48
Figura 9 – Resolução dos alunos do grupo G3	49
Figura 10 – Resolução dos alunos do grupo G4	50
Figura 11 – Modelo Matemático construído pelos alunos	53
Figura 12 – Exibição de vídeo	54
Figura 13 – Resolução dos alunos do grupo G1	56
Figura 14 – Resolução das alunas do grupo G1	58
Figura 15 – Resolução dos alunos do grupo G2	59
Figura 16 – Alunos do grupo G3 realizando medições.....	60
Figura 17 – Resolução dos alunos do grupo G3	61
Figura 18 – Resolução dos alunos do grupo G4	62
Figura 19 – Resolução dos alunos do grupo G5	63
Figura 20 – Resolução dos alunos do grupo G1	67
Figura 21 – Resolução dos alunos do grupo G1	69
Figura 22 – Resolução dos alunos do grupo G2	70
Figura 23 – Resolução dos alunos do grupo G5	71
Figura 24 – Representação de m^2 em malha quadriculada.....	72
Figura 25 – Resolução dos alunos do grupo G3	73
Figura 26 – Molde do pé traçado pelos alunos.....	75
Figura 27 – Resolução dos alunos do grupo G2	76
Figura 28 – Resolução dos alunos do grupo G3	77
Figura 29 – Resolução dos alunos do grupo G4	78
Figura 30 – Resolução dos alunos do grupo G5	78
Figura 31 – Resolução dos alunos do grupo G1	80

Figura 32 – Foto do Estacionamento da escola	81
Figura 33 – Resolução dos alunos do grupo G1	83
Figura 34 – Resolução dos alunos do grupo G2	84
Figura 35 – Resolução dos alunos do grupo G2	85
Figura 36 – Resolução dos alunos do grupo G3	86
Figura 37 – Resolução dos alunos do grupo G4	87
Figura 38 – Resolução dos alunos do grupo G5	88
Figura 39 – Resolução dos alunos do grupo G5	89

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – As atividades de modelagem desenvolvidas	39
Quadro 2 – Atividade 1 – Como determinar alturas?.....	43
Quadro 3 – É possível medir a beleza de uma pessoa?	55
Quadro 4 – A reforma do Estádio	67
Quadro 5 – Descobrindo o número do calçado	74
Quadro 6 – Informações históricas sobre a numeração do calçado.....	74
Quadro 7 – Atividades desenvolvidas pelos alunos	95

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CENSE II	Centro de Socioeducação de Londrina
CNMEM	Conferência Nacional sobre modelagem e Educação Matemática
COVID	Corona Vírus Disease
DCE	Diretrizes Curriculares Estaduais
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
DICIO	Dicionário Online de Língua Portuguesa
EJA	Educação de Jovens e Adultos
EPMEM	Encontro Paranaense de modelagem na Educação Matemática
EPREM	Encontro Paranaense de Educação Matemática
EUA	Estados Unidos da América
FAFIG	Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava
ICTMA	Grupo Internacional de modelagem matemática e aplicações
LDBEN	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação e Cultura
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SI	Sistema Internacional de Unidades
UEL	Universidade Estadual de Londrina
UGB/FERP	Centro Universitário Geraldo Di Biase
UNESP	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
UNICENTRO	Universidade Estadual do Centro Oeste

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	A MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL E O ENSINO DE GEOMETRIA	15
2.1	SOBRE A MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL	15
2.2	A GEOMETRIA E SEU ENSINO	17
2.2.1	ASPECTOS HISTÓRICOS.....	17
2.2.2	A GEOMETRIA NO CONTEXTO ESCOLAR	188
2.2.3	O CONCEITO DE MEDIDA NA GEOMETRIA	20
3	MODELAGEM MATEMÁTICA	24
3.1	HISTÓRICO	24
3.2	MODELAGEM MATEMÁTICA: UM ENTENDIMENTO	25
3.3	MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA DOS ANOS INICIAIS.....	28
3.4	SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA	30
3.5	MODELAGEM MATEMÁTICA E O ENSINO DE GEOMETRIA.....	32
4	ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA	38
4.1	ABORDAGEM METODOLÓGICA DA PESQUISA.....	38
4.2	OS PARTICIPANTES DA PESQUISA E A COLETA DE DADOS.....	38
4.3	A ANÁLISE DOS DADOS.....	40
5	DESCRIÇÃO E ANÁLISE LOCAL DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA	42
5.1	ATIVIDADE 1 – COMO DETERMINAR ALTURAS?	42
5.1.1	Medidas, medições e as ações dos alunos na atividade 1.....	51
5.2	ATIVIDADE 2 – É POSSÍVEL MEDIR A BELEZA DE UMA PESSOA?.....	54
5.2.1	Medidas, medições e as ações dos alunos na atividade 2.....	64
5.3	ATIVIDADE 3 – A REFORMA DO ESTÁDIO.....	66
5.3.1	Medidas, medições e as ações dos alunos na atividade 3.....	72
5.4	ATIVIDADE 4 – DESCOBRINDO O NÚMERO DO CALÇADO	73
5.4.1	Medidas, medições e as ações dos alunos na atividade 4.....	79
5.5	ATIVIDADE 5 – O ESTACIONAMENTO DA ESCOLA	80

5.5.1	Medidas, medições e as ações dos alunos na atividade 5.....	90
6	ANÁLISE GLOBAL E RESULTADOS	93
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	97
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	99
	ANEXOS	105
	ANEXO A – Termo de assentimento livre e esclarecido.....	106
	ANEXO B – Termo de consentimento livre e esclarecido.....	108

1 INTRODUÇÃO

A Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental constitui base para os demais anos, considerando a introdução de conceitos, operações e problemas com que o aluno vai se deparar ao longo de sua vida escolar.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017, p. 262) destaca que “a Matemática cria sistemas abstratos que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não, a fenômenos do mundo físico”. Conforme a BNCC, deve-se valorizar as vivências cotidianas dos estudantes com números, formas e espaço, para iniciar uma sistematização dessas noções (BRASIL, 2017).

Uma das áreas da matemática em que a associação com fenômenos físicos permite elucidar o que o aluno precisa aprender é a geometria (VAN DE WALLE, 2009). Segundo Brito e Almeida (2022), em termos gerais, a geometria se mostra como um estudo do mundo real ou do espaço físico uma vez que modelos geométricos permitem expressar uma compreensão acerca da mensuração e relações espaciais dos objetos físicos.

No contexto educacional, há o consenso de que modelos geométricos estão presentes, no cotidiano de diferentes maneiras e o ensino da geometria pode se valer dessa possibilidade de medir e de visualizar na aula de matemática. Os documentos oficiais enfatizam a relevância do ensino de geometria, sugerindo que ela “desenvolve um tipo especial de pensamento que permite ao aluno compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vive” (BRASIL, 2001, p. 55).

Neste contexto, uma aprendizagem esperada, por exemplo nos anos iniciais do Ensino Fundamental segundo a BNCC, é a percepção de que medições podem levar ao uso de diferentes unidades e instrumentos de medida. Este uso pode ser estimulado mediante diferentes metodologias e práticas diversificadas do professor. Na presente pesquisa nos referimos à modelagem matemática.

O entendimento de modelagem matemática aqui expresso está fundamentado em Almeida, Silva e Vertuan (2012) que concebem a modelagem matemática na sala de aula como alternativa pedagógica, na qual se faz uma abordagem, por meio da Matemática, de um problema não matemático. Particularmente, a modelagem matemática na presente pesquisa será usada como

uma alternativa para a abordagem do ensino de medidas e medições com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Atividades de modelagem matemática reúnem algumas das condições que favorecem a aprendizagem bem como envolve o aluno na investigação de temas do seu dia a dia, agregando qualidades cognitivas e sociais que ultrapassam o estrito domínio do conhecimento matemático (Almeida, 2018; Blum, 2015; Carreira, Baioa e Almeida, 2020; Ferri, 2018; Lesh et al., 2010).

Lesh et al. (2010), particularmente, ponderam que, embora a introdução de um novo conteúdo matemático possa ser realizado mediante atividades de modelagem matemática, uma atividade isolada raramente é suficiente para abarcar as diferentes nuances que este conteúdo pode ter em cada nível de escolaridade específico. Assim, estes autores propõem o que denominam de *sequência de atividades de modelagem*, classificando estas como atividades de *aquecimento* e atividades de *acompanhamento*, conforme é apresentado no Capítulo 3 do presente relatório.

Considerando essa indicação de Lesh et al. (2010), a presente pesquisa visa *investigar como alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental lidam com medidas e medições em uma sequência de atividades de modelagem matemática*. Para subsidiar nossa investigação, cinco atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas por 25 alunos do quarto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal do município de Andirá, PR. Em cada uma das atividades os alunos construíram respostas para a situação estudada mediante medições e medidas.

O relatório da pesquisa compreende, além da introdução, que situa a pesquisa e evidencia o seu objetivo, mais seis capítulos. No capítulo 2 são apresentadas considerações sobre a Matemática no Ensino Fundamental e o ensino de Geometria. No capítulo 3 elementos relativamente à modelagem matemática nesta pesquisa são apresentados. No capítulo 4 são apresentados os aspectos metodológicos da pesquisa e o contexto em que se deu a coleta de dados. O capítulo 5 inclui a descrição e a análise local das cinco atividades de modelagem matemática desenvolvidas. O capítulo 6 apresentamos a análise global os resultados da pesquisa. No capítulo 7, discorreremos acerca das considerações finais.

2 A MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL E O ENSINO DE GEOMETRIA

2.1 SOBRE A MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Indicações na literatura sugerem que as crianças chegam à escola com conhecimentos matemáticos oriundos do meio ao qual estão inseridas (SILVA; KLUBER, 2014). Isto porque é possível perceber que elas são capazes de reconhecer números, contar pequenas quantidades, efetuar comparações, etc.

No ambiente escolar, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, entretanto, a Matemática parece constituir um conjunto de conhecimentos que parecem mais ter em vista, conteúdos posteriores que podem se tornar relevantes para a vida das pessoas do que dar ênfase ao que os alunos podem aprender neste início de escolarização.

Orientações trazidas nos documentos oficiais relativos ao ensino de Matemática no Brasil, como é o caso dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), das Diretrizes Curriculares Estaduais (PARANÁ, 2008) e, mais recentemente, da BNCC (BRASIL 2017), são de que nos primeiros anos do Ensino Fundamental sejam propostas atividades que estimulem as progressões de capacidades que levem a estabelecer referências dos conteúdos matemáticos com situações reais do cotidiano do aluno.

Neste contexto, Nunes et al. (2005) destacam que exigem-se habilidades matemáticas na organização do pensamento, na tomada consciente de decisões, na compreensão de gráficos, na capacidade de fazer estimativas, entre outras, de modo que os estudantes sejam capazes de fazer uma leitura de mundo, além de encarar desafios e resolver problemas, levantando hipóteses e buscando soluções e emitindo opinião sobre fatos e fenômenos.

O ensino de Matemática a partir do século XX até nossos dias, passou por grandes transformações. A primeira delas foi a “expansão da escolaridade e o abandono de um sistema arcaico, seletivo e aristocrático de educação” (BASTOS, 2018, p. 18). Como consequência, houve uma reestruturação do ensino da Matemática, surgiram reestruturações curriculares para proporcionar aos alunos a habilidade de criar, resolver problemas, modelar, ler e interpretar o domínio da Matemática (BIEMBENGUT; HEIN, 2005).

De modo geral, documentos oficiais como as Diretrizes Curriculares

do Estado Paraná - DCE – consideram que, para o ensino de Matemática,

é necessário que o processo pedagógico em Matemática contribua para que o estudante tenha condições de constatar regularidades, generalizações e apropriação de linguagem adequada para descrever e interpretar fenômenos matemáticos e de outras áreas do conhecimento (PARANÁ, 2008, p. 49).

O documento propõe cinco unidades temáticas, chamadas conteúdos estruturantes, que estão correlacionadas e orientam a formulação de habilidades a ser desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística (PARANÁ, 2008).

Por conteúdos estruturantes, entendem-se os conhecimentos de grande magnitude, os conceitos e as práticas que identificam e organizam os campos de estudos de uma disciplina escolar, considerados fundamentais para a sua compreensão. Constituem-se historicamente e são validados nas relações sociais.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) orienta para os diferentes campos que compõem a Matemática e reúne um conjunto de ideias que são fundamentais para desenvolver o pensamento matemático dos alunos: “[...] equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação que devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento [...]” (BRASIL, 2017, p. 268).

No Ensino Fundamental, em particular, de acordo com Brasil (2014) o ensino da Matemática deve se configurar como uma prática de

investigar e experimentar coletivamente, ler, escrever e discutir matematicamente, levantar hipóteses, buscar indícios, observar regularidades, registrar resultados provisórios, compartilhar diferentes estratégias, variar procedimentos, construir argumentos matemáticos, como também ouvir os argumentos matemáticos dos colegas, buscar generalizar, conceituar. Professor e alunos participam desse movimento questionando, apresentando seu ponto de vista, oferecendo contraexemplos, argumentando, matematizando. A comunicação acontece por meio da dialogicidade (BRASIL, 2014, p. 18).

Considerando as diferentes unidades temáticas da Matemática no Ensino Fundamental, centramos nossos interesses na Geometria nos anos iniciais.

2.2 A GEOMETRIA E SEU ENSINO

2.2.1 Aspectos Históricos

A palavra *geometria* tem origem grega. De fato, do grego vem as palavras *geo* que significa terra e *metria* que deriva da palavra *metron* e significa medir (GESTAR I, 2007, p. 11). Ela nasceu nos primórdios da história e se desenvolve em estreita ligação com as práticas sociais da humanidade. A medição das terras que beiravam o rio Nilo, no antigo Egito, deu origem às preocupações geométricas do homem daquela época e também ao uso da palavra geometria.

Ao longo da história, a geometria se constituiu como ciência organizada na Grécia Antiga e destacam-se geômetras como Arquimedes, Descartes, Tales de Mileto, Euclides (considerado o pai da Geometria), devendo-se a eles, a caracterização da Geometria como parte da Matemática que estuda o espaço e as figuras que podem ocupá-lo.

Conforme aponta Eves (1997), nos primórdios, o homem só considerava problemas geométricos concretos, sendo cada um apresentado e resolvido de forma individual sem se buscar por relações entre problemas diferentes. Somente bem mais tarde o homem se tornou capaz de observar formas, tamanhos e relações espaciais de objetos físicos específicos, e delas extrair certas propriedades que tinham relações com outras observações já vistas. A partir dessas observações, os problemas geométricos passaram a ser agrupados e iniciou-se a definição de noções ou regras geométricas.

De acordo com Lorenzato (2008, p.43),

a cronologia da construção do conhecimento geométrico indica que o homem começou a geometrizar por conta da necessidade de reconstruir limites (fronteiras) em terras, de construir artefatos ou instrumentos, de construir moradias, de navegar, de se orientar etc. e na realização dessas atividades a medição desempenhou uma função importante.

Temos, portanto, indicativos de que a Geometria não é uma ciência recente, mas que foi descoberta e utilizada durante os séculos, sendo aperfeiçoada e favorecendo a vida dos habitantes na terra, de modo que o seu estudo surgiu de maneira dinâmica, motivado pela necessidade humana de resolver problemas. E, por

isso, ela foi tão útil ao desenvolvimento da própria matemática, e não apenas dos conceitos geométricos.

2.2.2 A Geometria no Contexto Escolar

Euclides de Alexandria, conhecido como pai da Geometria e, particularmente do que viria a ser reconhecido como Geometria Euclidiana, foi o primeiro a apresentar, a Geometria, como ciência de natureza lógica e dedutiva. Ele não se limitou a anunciar um grande número de leis geométricas, mas preocupou-se em demonstrar esses teoremas. Operava a partir de hipóteses básicas e, com seus conhecimentos, adquiridos ao longo do tempo, estabeleceu-se o conceito de *lugar geométrico*. Sua obra clássica Os Elementos, consiste em um conjunto de 13 livros que serviu de base para o ensino de Geometria. Em sua obra, Euclides procurou fazer afirmações simples que seriam aceitas e entendidas por todas as pessoas, até por iniciantes (GARBI, 2006).

Conforme indicam Fonseca et al. (2002), a partir dos anos de 1970 deu-se início, em todo o mundo, um movimento a favor do ensino de Geometria, visando ampliar sua participação na formação dos estudantes.

No Brasil, em particular, o que se defende é que é possível o aluno aprender noções geométricas a partir do Ensino Fundamental ao trabalhar sua percepção e contato com objetos e informações que irão construir representações mentais e espaciais. Ao passo que a criança vai se desenvolvendo e ampliando suas percepções, é possível que seja trabalhado com o aluno o conhecimento inerente à localização e à orientação espacial (BRASIL, 2011).

Na perspectiva de ensino de matemática apregoado pelo educador matemático holandês Hans Freudenthal (1905-1990), Fonseca (2009, p. 92-93) entende que introduzir conceitos geométricos nas escolas,

[...] é uma das melhores oportunidades que existem para aprender a matematizar a realidade. É uma oportunidade de fazer descobertas como muitos exemplos mostrarão. Com certeza, os números são também um domínio aberto às investigações e pode-se aprender a pensar através da realização de cálculos, mas as descobertas feitas pelos próprios olhos e mãos são as mais surpreendentes e convincentes. Até que possa, de algum modo ser dispensadas, as formas no espaço são um guia insubstituível para a pesquisa e a descoberta.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (1998, p. 51) ao recomendar a introdução da Geometria no Ensino Fundamental sugerem que, por meio dela, “o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de maneira organizada, o mundo em que vive”.

O pensamento geométrico se desenvolve, inicialmente, pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades (PCN-MEC, 1998, p. 64).

Após a visualização o próximo ponto essencial para a aprendizagem está relacionado à experimentação. Por meio dela o aluno manipula o objeto e cria hipóteses. Aliando a observação e a experimentação os alunos começam a distinguir as características de uma figura e a usar as propriedades para conceituar classes de formas. Os objetos que povoam o espaço e são a fonte principal do trabalho de exploração das formas. O aluno deve ser incentivado, por exemplo, a identificar posições relativas dos objetos, a reconhecer no seu entorno e nos objetos que nele se encontram formas distintas, tridimensionais e bidimensionais, planas e não planas, a fazer construções, modelos ou desenhos do espaço (de diferentes pontos de vista) e descrevê-los. “Portanto a criança deve manipular, construir, observar, compor, decompor e agrupar, por semelhanças ou diferenças” (BORGES, 2009, p. 6).

Considerando a importância de desenvolver o pensamento geométrico, a unidade temática Geometria na BNCC (BRASIL, 2017, p. 271) recomenda que “estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico”. Nesse documento, no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, espera-se que os alunos,

[...] identifiquem e estabeleçam pontos de referência para a localização e o deslocamento de objetos, construam representações de espaços conhecidos e estimem distâncias, usando, como suporte, mapas (em papel, tablets ou smartphones), croquis e outras representações [...] indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa. Espera-se, também, que nomeiem e comparem polígonos, por meio de propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos (BRASIL, 2017, p. 272).

A Geometria, portanto, envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento e seu ensino na escola

não pode ficar reduzido a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras (BRASIL, 2018, p. 272).

O mais recente documento oficial relativo ao ensino no Brasil, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) indica que

[...] estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. (BNCC, 2017, p. 273).

Essa indicação está alinhada ao que sugere Duval (2005), de que, em todos os domínios de conhecimento que o aluno deve adentrar, a Geometria é o que exige atividade cognitiva mais complexa por solicitar o gesto, a linguagem e o olhar. O autor conclui nesse estudo, que ignorar a complexidade cognitiva que toda abordagem da Geometria traz é prejudicial para o ensino como também para as pesquisas sobre aprendizagem da Geometria. Quando os conteúdos matemáticos forem analisados em relação à atividade cognitiva que lhes solicitam e quando o desenvolvimento desta atividade se tornar um objetivo indissociável dos objetivos matemáticos, um grande progresso será feito para o ensino de Geometria.

Na presente pesquisa, considerando que as medidas e as formas geométricas estão interligadas ao desenvolvimento de conceitos como perímetro, área e volume, por exemplo, e que compreender a proporcionalidade colabora para a compreensão do uso de medidas, dirigimos nossa atenção para o estudo de medidas e medições nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

2.2.3 O Conceito de Medida na Geometria

Segundo Dicionário Online de Língua Portuguesa, medir é determinar a extensão, a altura ou a grandeza de; mensurar.

A partir de 1790 com a criação do Sistema Métrico Decimal foram definidas três unidades básicas de medida: o metro, o quilograma e o segundo. Porém, o desenvolvimento científico e tecnológico passou a exigir medições cada vez mais precisas e diversificadas. Variadas modificações ocorreram até que, em 1960, o Sistema Internacional de Unidades (SI), mais complexo e sofisticado, foi consolidado pela 11ª Conferência Geral de Pesos e Medidas (Figura 1). O SI foi adotado também pelo Brasil em 1962.

Figura 1 – Tabela de medidas padronizadas

Unidades de Medida (SI)			
Grandeza	SI	Unidade usual	Correspondência
Massa	kg	g	1kg = 1000 g
Comprimento	m	km	1km = 1000 m
Área	m ²	cm ²	1m ² = 10 000 cm ²
Volume	m ³	L	1m ³ = 1000 L
Tempo	s	h	1h = 3600 s
Quantidade de calor	J	cal	1 cal = 4,18 J
Velocidade média	m/s	km/h	1m/s = 3,6 km/h

Tabela feita para blog Essas e Outras (www.essaseoutras.com.br)

Conforme sugere Walle (2009), as medidas não são um assunto fácil para a compreensão dos alunos. Estudos indicam que os estudantes tendem a ser mais fracos na área de medidas do que em outros tópicos curriculares (WALLE, 2009). Esse autor sugere que, antes que qualquer objeto possa ser medido, é necessário compreender o atributo a ser medido, ou seja, comprimentos são comparados com unidades de comprimento, área às unidades de área, intervalo de tempo às unidades de tempo e assim por diante.

Uma forma simples de falar sobre medidas com os alunos é dizer que, para a maioria dos atributos que são medidos na escola, medir significa “preencher”, “cobrir” ou “emparelhar” com uma unidade de medida, o mesmo atributo. Assim, podemos dizer que a medida de um determinado atributo é uma contagem de quantas unidades são necessárias para “encher”, “cobrir” ou “emparelhar” o objeto a ser medido. Portanto, instrumentos de medida tais como, réguas, balanças, transferidores, relógios, são dispositivos que facilitam esse processo.

Segundo Walle (2009), existem três componentes educacionais que podem auxiliar o aluno a desenvolver um conhecimento conceitual de medir: fazer comparações; usar modelos de unidades para que os alunos compreendam quais unidades de medidas podem ser utilizadas para um atributo particular em questão e como essas unidades são utilizadas para produzir medidas; e, construir e usar instrumentos de medidas. Se os alunos construírem instrumentos de medidas como por exemplo, uma régua, é mais provável que eles compreendam como o instrumento funciona, ou seja, como ele pode ser usado para medir.

Tecnicamente, uma medida é um número que indica uma comparação entre o atributo do objeto (ou situação, ou evento) que está sendo medido e o mesmo atributo de uma determinada unidade de medida. Geralmente usamos unidades de medida pequenas para determinar de alguma maneira uma relação numérica (a medida) entre o que está sendo medido e a unidade. Por exemplo, para medir um comprimento, a comparação pode ser feita alinhando-se cópias da unidade ao longo do que está sendo medido. Para medir o peso que é um “puxão” da gravidade ou uma força, o peso do objeto deve primeiro ser aplicado a uma mola. Então a comparação é feita descobrindo quantas unidades de peso produzem o mesmo efeito da mola. Em qualquer caso, o número de unidades é a medida do objeto (WALLE, 1994).

Assim, medir é comparar uma grandeza com outra de mesma natureza, tomada como padrão. Medição, é o conjunto de procedimentos e operações que tem por objetivo determinar o valor de uma grandeza.

Lidar com medidas e realizar medições é, portanto, uma ação que precisa ser estimulada na escola. Faz-se necessário oferecer oportunidades para os alunos vivenciarem atividades envolvendo conceitos geométricos relacionados com a sua realidade, e não trabalhar só com atividades que reforcem a aplicação de definições. Por meio da abordagem de situações-problema, do contato com práticas inspiradoras e da troca de experiências entre colegas, o ensino de medidas e medições pode favorecer a compreensão de grandezas e medidas.

A unidade temática Grandezas e Medidas, como sustenta a própria BNCC (BRASIL, 2018, p. 273), é um eixo promissor para estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, de Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) a Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.), além de favorecer a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento geométrico.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 2001), enfatizam a importância do trabalho geométrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental, pois através dele a criança desenvolve o pensamento de forma a compreender o mundo em que vive estimulando sua percepção e contribuindo para a aprendizagem de medidas.

Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, é comum usar unidades informais, não padronizadas, pois permite que aluno se concentre no atributo que está sendo medido e tem um aspecto lúdico. Contudo, a utilização de unidades padrão também se faz necessária em todas as etapas do ensino e é importante que aconteça essa evolução das medidas informais para as medidas padrão, gradativamente (WALLE, 2009).

Outro fator para se trabalhar medidas com os alunos nessa fase inicial é estimar medidas antes mesmo de medi-las, pois, além de direcionar o foco do aluno sobre o atributo a ser medido, proporciona motivação e ajuda a desenvolver familiaridade com o atributo em questão. Também deve se considerar, nos anos iniciais, a linguagem aproximativa de medidas sobre os atributos, pois muitas medidas não são exatas e os alunos ainda não desenvolveram a compreensão de unidades fracionadas, ou seja, menores (WALLE, 2009).

Considerando as particularidades do ensino de Geometria, Fainguelernt (1999) aponta que:

Entre os matemáticos e os educadores matemáticos, existe um consenso de que o ensino da geometria deveria começar desde cedo e, continuar, de forma apropriada, através de todo currículo de Matemática. Entretanto, tradicionalmente existe divergência de opiniões entre os conteúdos e os métodos de ensino da Geometria nos diferentes níveis, desde a escola primária até a universidade. Uma das razões dessas divergências é que a Geometria possui muitos aspectos e, conseqüentemente, talvez não exista um caminho simples, linear, claro, hierárquico desde os princípios elementares até as abstrações e axiomas, embora seus conceitos devam ser considerados em diferentes estágios e diferentes pontos de vista (FAINGUELERNT, 1999, p. 21).

Neste contexto, a presente pesquisa se dirige ao ensino de medidas e medições por meio de atividades de modelagem matemática.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

3.1 HISTÓRICO

A partir da década de 1970 em diversos países do mundo passam a acontecer eventos em que são comunicadas atividades de modelagem matemática na educação. Pode-se citar, como exemplo, os trabalhos liderados por Hans Freudenthal na Holanda (BIENBENGUT, 2014, p. 15). Também pode-se reconhecer trabalhos por Benhelm Booss e Mogens Niss, na Dinamarca que levaram em 1978 a organizar um Congresso sobre Matemática e Realidade que contribuiu para consolidar, em 1983, o Grupo Internacional de Modelagem Matemática e Aplicações – ICTMA (BIEMBENGUT, 2014, p. 15).

No Brasil a modelagem matemática foi introduzida por um grupo de professores, especialmente Ubiratan D’Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi, ambos da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) que defenderam a modelagem matemática como alternativa para o ensino da Matemática, por meio de livros, cursos de especialização, palestras e orientações, artigos, trabalho de conclusão de Mestrado e Doutorado (BASSANEZI, 1993;1997; D’AMBRÓSIO, 1986). Ubiratan D’Ambrósio desenvolvia estudos teóricos e pedagógicos que foram decisivos para a consolidação da modelagem matemática na Educação Matemática.

Segundo Burak (2004), o ano de 1983 é considerado um marco na história da modelagem matemática na perspectiva da Educação Matemática no Brasil. Na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava (FAFIG), hoje chamada de Universidade Estadual do Centro Oeste (UNICENTRO), por meio de cursos de especialização para professores iniciou-se a difusão da modelagem matemática no estado do Paraná.

Assim, instaura-se no Brasil no final da década de 1980, uma preocupação com as concepções acerca da modelagem matemática e seu uso em sala de aula (KLÜBER, 2016).

Este movimento se desdobra na realização de eventos que visam reunir a comunidade científica, professores e alunos, bem como seu progresso como linha de pesquisa na Educação Matemática. Desde 1999 passa a ser realizada a Conferência Nacional sobre modelagem na Educação Matemática – CNMEN. A primeira conferência foi realizada na cidade de Rio Claro, São Paulo, tendo por tema “A modelagem matemática no Ensino da Matemática” com cerca de 200 participantes.

O primeiro Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática (EPMEM) foi realizado na Universidade Estadual de Londrina (UEL), e desde 2004, o estado do Paraná sedia o EPMEM, com periodicidade bienal, reconhecido como um evento oficial pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Regional Paraná, SBEM-PR, em 2017.

Na sequência, conceituamos modelagem matemática, modelo matemático, bem como apresentamos o ciclo de modelagem matemática, de acordo com a perspectiva assumida nesta pesquisa.

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA: UM ENTENDIMENTO

Para Bassanezi (2009, p. 16) a modelagem matemática pode ser percebida “tanto quanto um método científico de pesquisa quanto a uma estratégia de ensino”, e é definida como a “[...] arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

De modo geral, a modelagem matemática institui-se como uma atividade investigativa a partir de problemas da realidade.

Na presente pesquisa consideramos o entendimento de Almeida, Silva e Vertuan (2012) que propõem a modelagem matemática como alternativa pedagógica de ensino e aprendizagem, em que se abordam problemas reais por meio de conhecimentos matemáticos e extra matemáticos. Para os autores:

[...] de modo geral, uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita, em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 12).

Ocorre, portanto, uma interação entre a realidade e a Matemática, visto que ocorre uma passagem da situação inicial para o uso de conceitos e procedimentos matemáticos até chegar à situação final, com a solução para o problema inicial proposto. Ainda, segundo os autores Almeida, Silva e Vertuan (2016), a partir dessa inteiração, é possível que os alunos processem, produzam e agreguem conhecimentos matemáticos com os não matemáticos, os quais serão utilizados para chegar a uma situação final, ou seja, uma solução para o problema.

Ao se referirem a uma atividade de modelagem matemática, Almeida, Silva e Vertuan (2012), abordam fases da atividade de modelagem, que também caracterizam sua dinâmica investigativa: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.

inteiração: essa etapa representa o primeiro contato com essa situação-problema que se pretende estudar com a finalidade de conhecer as características e especificidades da situação. A inteiração conduz a formulação do problema e a definição de metas para sua resolução, assim a escolha do tema e a busca de informações a seu respeito constituem o foco central nessa fase; [...]

matematização: é caracterizada pelo processo de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas, que são realizadas a partir de formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações e em relação as informações e ao problema definido na fase de inteiração [...].

resolução: Esta fase consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação, responder as perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado; [...]

interpretação de resultados e validação: a interpretação dos resultados pelo modelo implica a análise de uma resposta para o problema, a análise da resposta constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica uma validação da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto à adequação da representação para a situação (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 15-16).

É no decorrer dessas fases que alunos e professores desenvolvem um processo investigativo a partir de uma situação-problema real, conhecimentos matemáticos e extra matemáticos são mobilizados, e entram em cena os modelos matemáticos.

O modelo matemático seria aquilo que “dá forma” à solução do problema; sendo a modelagem, a “atividade” de busca por essa solução (ALMEIDA; TORTOLA; MERLI, 2012, p. 217).

Um modelo matemático pode ser definido por meio de um [...] sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este outro sistema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 13).

Os modelos matemáticos, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), podem ser construídos a partir de diferentes representações, tais como gráficos, tabelas, textos ou imagens, dependendo do nível de escolaridade a qual a atividade de modelagem está atrelada e os objetivos do professor.

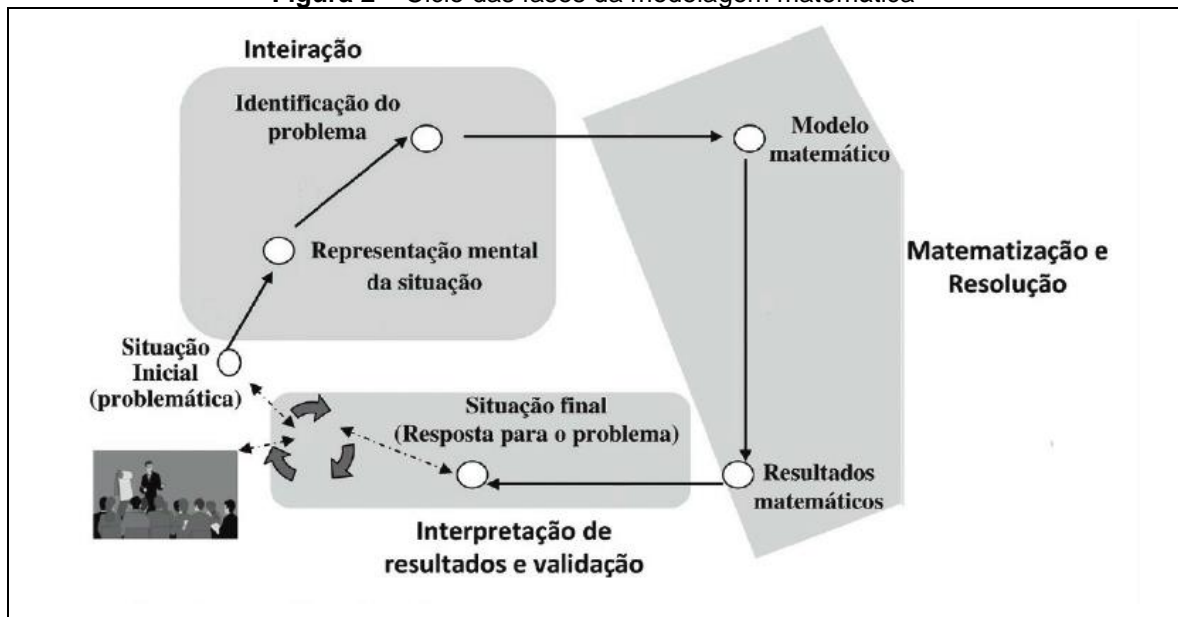
No nosso caso, temos como foco os anos iniciais do Ensino Fundamental, e é no início da escolarização que os modelos matemáticos podem ser entendidos: “[...] como uma estrutura, expressa por meio de uma linguagem matemática, que pode assumir diferentes representações, sejam elas, numérica, algébrica, gráfica, tabular, geométrica, figural ou linguagem natural” (LESH, 2010, p. 18). O uso ou construção de modelos matemáticos nas atividades de modelagem matemática geralmente ocorrem na fase de resolução.

A representação de uma atividade de modelagem matemática, muitas vezes ocorre de forma cíclica. No decorrer do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, suas fases e procedimentos, os caminhos a serem adotados pelos modeladores, podem ser expressos em ciclos de modelagem. Há uma diversidade de formas para apresentar os ciclos de modelagem matemática na literatura. Sobre o processo cíclico alguns autores chamam de etapas, outros chamam de fases e outros ainda de estágios do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática (ALMEIDA; SILVA, 2015; DOERR; ÄRLEBÄCK; MISFELDT, 2016; BORROMEO FERRI, 2018; PERRENET; ZWANEVEL, 2012; STENDER, 2018).

A Figura 2 apresenta o ciclo de modelagem matemática que compreende as fases abordadas pelos alunos durante o desenvolvimento de atividades.

Os procedimentos realizados entre uma situação inicial e uma situação final de uma atividade de modelagem matemática, podem ser entendidos como ações que emergem no desenvolvimento de atividades dessa natureza, tais como: representar mentalmente o problema; construir um modelo matemático; obter resultados matemáticos; interpretar os resultados; validar o modelo matemático, no intuito de responder o problema.

Figura 2 – Ciclo das fases da modelagem matemática



Fonte: adaptado de Almeida; Silva; Vertuan (2016, p. 25).

A modelagem matemática como alternativa pedagógica apresenta potencial para discutir Matemática, sendo uma oportunidade para os alunos de todos os níveis de escolaridade, em especial, anos iniciais do Ensino Fundamental, no qual esta pesquisa está direcionada.

3.3 MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA DOS ANOS INICIAIS

Considerado como uma das etapas mais importante da educação de uma criança, os anos iniciais do Ensino Fundamental, segundo Brasil (2018), é a etapa que as crianças formam suas opiniões e dão início a construção de conceitos matemáticos.

Autores como Burak (1994), Burak (2014) e Silva e Klüber (2014) defendem a ideia de que o uso de atividades de modelagem matemática pode ser inserido em qualquer nível de ensino, alterando apenas a maneira que se deve enfatizar a atividade, ou seja, para os anos iniciais o professor deve se preocupar mais com o processo do que apenas criar modelos matemáticos. E isso se deve ao fato de que, nesta etapa da Educação Básica, as estruturas matemáticas ainda estão em processo de construção, havendo nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio a criação de modelos de forma mais sistemática (BURAK, 1994).

Os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental realizam ações características à sua faixa etária. Neste sentido, Tortola (2012) destaca que, trabalhar

com atividades de modelagem matemática desde os primeiros anos escolares pode contribuir para que habilidades sejam desenvolvidas e que, com isso, os alunos desenvolvam uma maturidade com relação à produção e ao uso de modelos matemáticos.

Compreender as ações que os alunos dos anos iniciais realizam durante uma atividade de modelagem pode auxiliar o professor desse nível de escolaridade na condução das atividades de modo a indicar possíveis mediações colaborando para viabilizar a aprendizagem.

Luna, Souza e Santiago (2009), complementam que o ensino da Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental deve proporcionar ao aluno fazer relações do conhecimento escolar com o contexto vivido pelo aluno, de modo a proporcionar uma base para o desenvolvimento pleno do cidadão e do profissional.

Sendo assim a modelagem matemática enquanto alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem de Matemática pode proporcionar à criança, uma participação ativa no seu processo de aprendizagem, pois pode tornar o ensino mais dinâmico, problematizador, investigativo e significativo para o aluno, como destaca Tortola (2012).

Silva e Klüber (2014) trazem as seguintes justificativas para a utilização da modelagem matemática em sala de aula nos anos iniciais: o aluno é o sujeito da aprendizagem e tem o professor como mediador dessa aprendizagem; o ensino é problematizador, dialógico, investigativo e interdisciplinar.

Para Burak, 1994, p.59:

Nas primeiras séries [Anos Iniciais do Ensino Fundamental], a Modelagem deve enfatizar mais o processo do que se preocupar em criar modelos, mesmo porque a ferramenta matemática está sendo construída. A partir da 5ª série [atual 6º ano], alguns modelos simples podem ser iniciados, como por exemplo: a expressão do perímetro [...]. A construção de modelos de uma forma mais sistemática deverá ser trabalhada apenas no secundário [hoje, Ensino Médio].

Já para Maaß (2005), propor atividades de modelagem matemática a partir dos anos iniciais faz com que os estudantes tenham uma outra visão da Matemática que é pregada nas escolas, ou seja, os alunos passam a modificar a crença de que a Matemática é apenas uma ciência objetiva e inquestionável.

Diante da necessidade de buscarmos novas maneiras de ensinar e aprender, a modelagem matemática pode auxiliar os alunos dos anos iniciais do

Ensino Fundamental no processo de aprendizagem, servindo como uma alternativa às práticas educacionais ao ensino de Matemática.

Neste contexto, propor aos alunos que busquem informações, pode fazer com que eles desenvolvam a capacidade de avaliar quais dados e hipóteses são úteis para contribuir na solução do problema ou ainda se necessário, produzir tais dados, utilizando para isso, instrumentos apropriados para coleta.

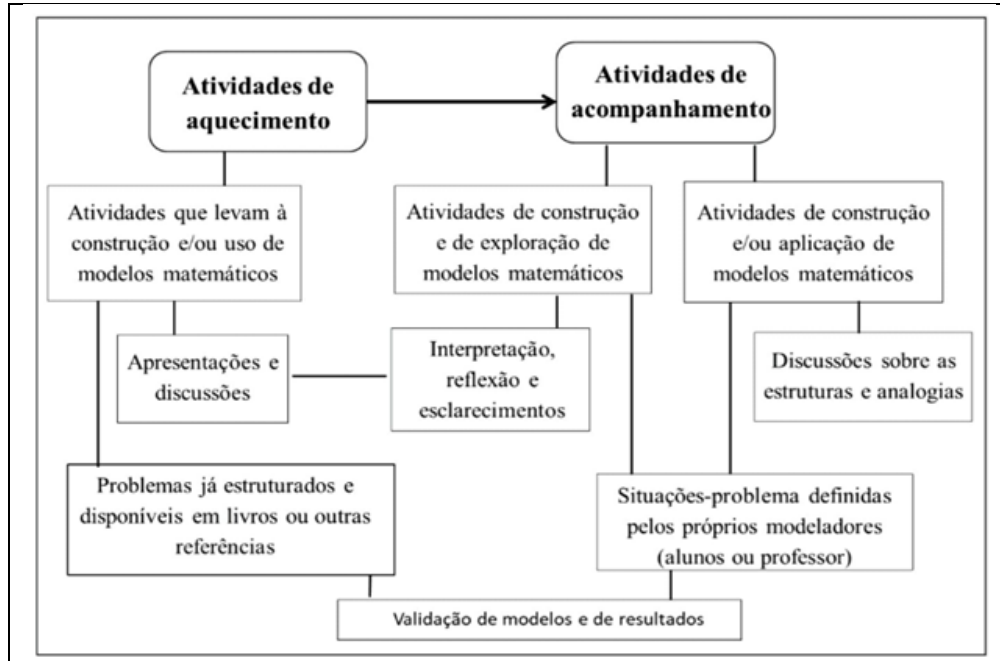
Neste sentido, a inserção de atividades de modelagem matemática nas aulas de Matemática tem como desafio, “recriar, na sala de aula, ambientes culturalmente distintos do contexto escolar” (CARREIRA; BAILOA, 2018, p. 201) e trazem a intenção de proporcionar a introdução, discussão e sistematização de conteúdos matemáticos.

Uma possibilidade para o uso de modelagem matemática em sala de aula nos anos iniciais se dá por meio de sequências de atividades de modelagem.

3.4 SEQUÊNCIAS DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Mendes e Almeida (2020) ponderam que quando há o intuito de ensinar Matemática por meio de atividades de modelagem matemática, atividades isoladas raramente são suficientes para produzir os resultados esperados (relacionados à aprendizagem de conceitos matemáticos), o que justifica a importância de se desenvolver sequências de atividades estruturalmente relacionadas.

A fim de indicar como as atividades podem ser organizadas para caracterizar a estrutura de uma sequência de atividades de modelagem matemática, Mendes e Almeida (2020) apresentam um esquema organizacional apoiados em Lesh *et al.* (2003) conforme indica a Figura 3.



Fonte: Adaptado de Mendes e Almeida (2020, p. 45).

As **atividades de aquecimento** visam propor aos alunos situações-problema que conduzem à construção ou ao uso de um modelo matemático e são as primeiras a serem desenvolvidas. Trata-se de situações já estruturadas em que um problema é resolvido mediante a construção, o uso e a análise de um modelo matemático. São situações que viabilizam ao professor responder algumas perguntas sobre pré-requisitos mínimos para os estudantes começarem a desenvolver atividades de modelagem matemática (MENDES; ALMEIDA, 2020).

Essas atividades incentivam os alunos a trabalhar em equipes e, muitas vezes, são utilizadas pelos professores no início de uma unidade do curso. Um de seus objetivos é que o estudante revele ao professor possíveis fragilidades conceituais para que elas possam ser exploradas no decorrer das aulas (MENDES; ALMEIDA, 2020).

Após as atividades de aquecimento, é importante realizar dinâmicas de apresentações e discussões com toda a turma a fim de possibilitar que os estudantes tenham contato com outras formas de pensar, discutam os pontos fortes e fracos das abordagens alternativas e identifiquem as direções para a melhoria em seu próprio trabalho ou no trabalho dos demais.

As **atividades de acompanhamento**, por sua vez, consistem em atividades que devem ajudar os alunos a reconhecer conexões entre os seus conhecimentos teóricos e situações cotidianas. Assim, para além de construir

modelos, os estudantes precisam realizar a exploração e aplicação de modelos, conforme definido por Ärlebäck e Doerr (2015). Para os autores, uma atividade de exploração de modelo presta-se a levar o aluno a explorar a estrutura matemática de um modelo deduzido a partir de uma situação-problema.

Diante disso, o foco deste tipo de atividade está na estrutura matemática, o modelo matemático. Atividades de exploração de modelos matemáticos devem levar os alunos a contrastarem pontos fortes e fracos de diferentes modelos e usar linguagem matemática com precisão, cuidado e de acordo com a situação problema em estudo (ÄRLEBÄCK; DOERR, 2018).

Ao desenvolver atividades de aplicação e de exploração de modelos, discussões sobre semelhanças estruturais entre as atividades irão provocar as experiências dos alunos e, para além de pensar sobre os modelos construídos também se tornam aptos a discutir o uso de modelos matemáticos.

Subjacente à familiarização dos alunos com a modelagem matemática, com os conceitos, os procedimentos matemáticos está a familiarização com a linguagem matemática. Neste contexto, torna-se relevante também que o aluno se aproprie de representações que lhe permitam lidar com os objetos matemáticos que emergem das atividades de modelagem matemática.

O trabalho com sequências de atividades de modelagem matemática pode permitir ao aluno adquirir habilidade para resolver problemas, formular hipóteses, buscar e organizar dados, tomar decisões, pesquisar, propor questões para si mesmo e para os colegas, defender seus pontos de vista e trabalhar em grupo de forma colaborativa, bem como atuar na exploração e comunicação de modelos matemáticos.

Nesta pesquisa, desenvolvemos uma sequência de atividades de modelagem matemática para o ensino e a aprendizagem do conceito de medidas e medições, vinculado ao ensino de Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Neste contexto, abordamos uma breve revisão sobre modelagem matemática e o ensino de Geometria.

3.5 MODELAGEM MATEMÁTICA E O ENSINO DE GEOMETRIA

Em nossa pesquisa, entendemos que um problema a ser abordado é o de compreender o papel, que os conteúdos de Geometria desempenham quando os alunos realizam atividades de modelagem matemática e como as realizam. As

contribuições dos trabalhos sobre o que tem sido estudado por meio da modelagem matemática, caracterizam que as pesquisas vêm crescendo no Brasil, como apontado em Silveira (2007), em particular na articulação entre modelagem matemática e o ensino de Geometria.

Sousa (2003) desenvolveu uma pesquisa, com o tema “A geometria e a lei de vilas: até que ponto a utilização de elementos da sociedade pode auxiliar no ensino-aprendizagem da Geometria?”. Trata-se de uma pesquisa realizada com alunos do Ensino Médio da 4ª série do curso de formação de professores (antigo curso normal) de uma escola estadual localizada no município do Rio de Janeiro-RJ. Por meio da análise de uma lei municipal foram trabalhados com os alunos conceitos geométricos, tais como inscrição e circunscrição de figuras planas em relação ao círculo, o teorema de Pitágoras, entre outros. Verificou-se que além de ter utilizado mais que livro didático, quadro e giz, os alunos tiveram condições de explorar e construir os conceitos.

Reinheimer, Dullius e Quartier (2011), trabalharam com “O uso da modelagem matemática no ensino da Geometria espacial estudo de caso: EJA”. A pesquisa com alunos do 3º ano do Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos (EJA) teve sua coleta de dados por meio dos instrumentos: observações efetuadas no decorrer das atividades, como questionários, áudios gravados, fotos e vídeos, cartazes e maquetes. Por meio do modelo “Construção do prédio novo”, foram trabalhados conceitos de área e volume.

Cardoso e Kato (2011), abordaram a “Modelagem matemática no Ensino Fundamental, a matemática dos origamis”. Este estudo envolveu oficinas de origamis realizadas com 156 professores da rede municipal de educação de Goioerê-PR. O objetivo foi investigar algumas potencialidades da utilização de origamis como instrumento de apoio às atividades de modelagem matemática. Os autores das oficinas concluíram que a modelagem matemática pode motivar os alunos e professores e pode ser utilizada para o aprendizado e o ensino de conceitos matemáticos e aproximação de teoria e prática.

Já Gomes (2011) apresentou um relato de experiência “Geometria e modelação: experimentações com jovens e adultos em sala de aula de Ensino Médio” que foi desenvolvido em sala de aula do Ensino Médio na modalidade regular com jovens de 16 anos de idade e com público de idades entre 18 e 70 anos, matriculados na EJA, em duas escolas públicas na rede estadual de ensino nas cidades de São

Bernardo do Campo e São Caetano do Sul. As experimentações foram concernentes a conteúdos relacionados à Geometria trabalhados de forma contextualizada a partir de situações práticas vividas pelos estudantes por meio de materiais e instrumentos de fácil acesso para eles. Ao final das atividades, “Descobrimo a presença do número π nas coisas”, “Plantas baixas e localização de imóveis” e “O segredo das embalagens: desmontar, remontar... criar”, mostrou-se que os trabalhos apesar de aparecerem “lampejos” de memórias em alguns momentos durante os procedimentos, esses se mostraram insuficientes para a realização com autonomia dos problemas propostos. Manifestou que há necessidade de um trabalho mais intenso e sistemático nessa linha de ação educativa.

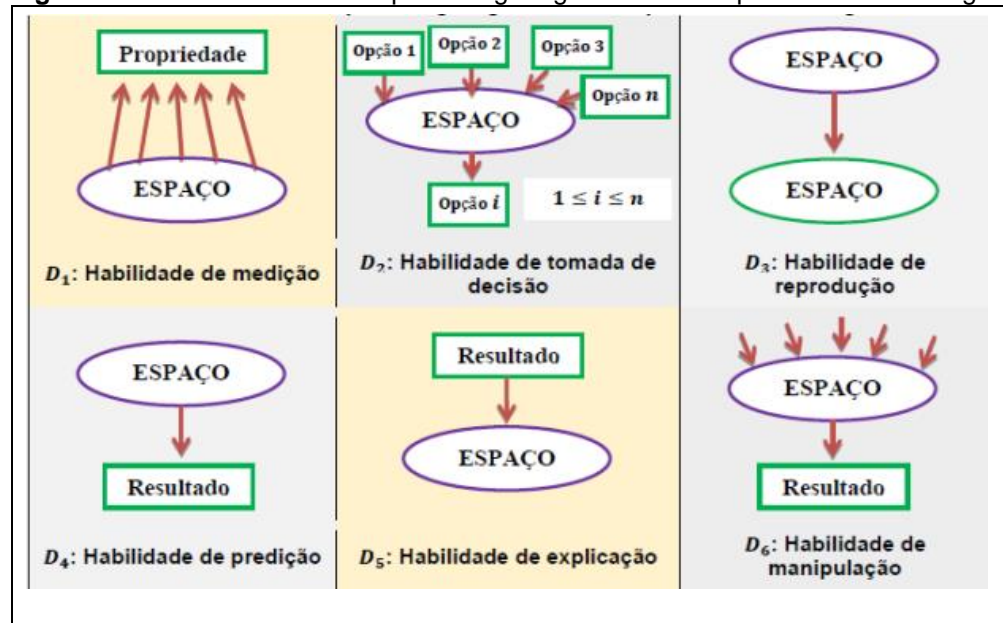
Neste mesmo ano, Sant’Ana, Moreira, Bem, Figini e Kofender (2011) apresentaram a pesquisa “Pista de skate e modelagem matemática” realizada com acadêmicos do segundo semestre do curso de Licenciatura em Matemática na cidade de Porto Alegre -RS. A ênfase foi dada ao processo de criação de uma maquete de uma pista de skate para o bairro Restinga na mesma cidade. A experiência foi considerada positiva e demonstra a importância da modelagem matemática na formação de professores cidadãos engajados em suas comunidades e conscientes do papel social da Matemática.

Brito e Almeida (2014), apresentam um estudo que foi realizado com alunos do Ensino Fundamental intitulado “Modelagem matemática com régua e compasso: uma alternativa para a educação em geometria?” em que os alunos foram convidados a observar imagens aéreas de praças públicas e propor alterações em sua forma geométrica com objetivo de otimizar alguma de suas medidas. O estudo foi realizado ao longo de quatro semanas com 13 adolescentes, entre 14 e 16 anos, internados no Centro de Socio educação de Londrina – CENSE II. Concluiu-se que os alunos foram capazes de romper o costume da “fórmula pronta”, inserindo-se em atividades que são chamados para argumentar, justificar e defender uma solução ou um procedimento adotado.

Em pesquisa recente, Brito e Almeida (2021), explicitam seis dimensões da aprendizagem de Geometria em sala de aula por meio de práticas de modelagem matemática. Essas dimensões podem ser entendidas como as habilidades constituintes dessa aprendizagem que se diferenciam em função do tipo de informação que se busca extrair do espaço e do modo como se pretende obtê-la

em uma prática de modelagem matemática: a medição, a tomada de decisão, a reprodução, a predição, a explicação e a manipulação (Figura 4).

Figura 4 – Seis dimensões da aprendizagem geométrica em práticas de modelagem



Fonte: Brito e Almeida (2022, p. 9).

As seis dimensões da aprendizagem geométrica aliada à modelagem matemática podem ser descritas como:

Dimensão 1 - habilidade de medição: a informação que se busca, neste caso, é a medida de alguma propriedade ou de uma qualidade do espaço que não pode ser determinada diretamente e, por isso, o modo de obtê-la passa pelo desenvolvimento de um modelo geométrico que gera essa propriedade. Um exemplo clássico é a obtenção da altura da pirâmide de Quéops, no Egito, pelo matemático grego Thales que utilizou comprimentos de sombras para construir um modelo geométrico baseado em triângulos semelhantes.

Dimensão 2 - habilidade de tomada de decisão: a informação que se busca, neste caso, é uma maneira de fazer e justificar uma escolha dentre várias opções que dependem de características espaciais. Assim, se existem várias opções e apenas uma deve ser escolhida, um modelo geométrico pode ser desenvolvido para avaliar os prós e os contras de cada opção de modo que uma escolha justificada possa ser feita. Por exemplo, se precisamos avaliar a escolha do formato de uma embalagem para um produto, construir um modelo geométrico pode nos ajudar, informando sobre a otimização do volume, minimização do custo de produção, armazenamento e transporte.

Dimensão 3 – habilidade de reprodução: aqui, a informação procurada é um “molde” que possibilita a construção de uma réplica de algum objeto. A construção de um modelo geométrico, neste caso, objetiva traduzir as características espaciais desse objeto em termos de instruções, tendo em vista a sua reprodução. Por exemplo, para investigar a dispersão de poluentes num rio, podemos precisar construir sua “réplica” e simular seu comportamento. Neste caso, a construção de um modelo geométrico pode ajudar a estimar o fluxo de água, informando sobre a forma do corte transversal desse rio.

Dimensão 4 – habilidade de predição: essa habilidade está associada a predições para suposições, por exemplo, se variamos certas condições ou “variáveis” espaciais de um objeto, que resultados/consequências isso pode acarretar? Se essas condições ou “variáveis” não podem ser manipuladas diretamente, então um modelo geométrico pode informar acerca do comportamento desse objeto sob condições desejadas. Por exemplo: se desejamos investigar sobre o efeito, no lançamento oblíquo de objetos, da variação do ângulo de inclinação do lançamento, um modelo geométrico que simule a trajetória desse objeto pode informar acerca da altura ou da distância atingida por esse objeto.

Dimensão 5 – habilidade de explicação: se algum resultado incomum do espaço é observado, um modelo geométrico pode ser desenvolvido para explicar como o sistema produziu esse resultado incomum. A informação buscada, neste caso, são as condições ou propriedades do espaço capazes de gerar o resultado observado. Por exemplo, um lápis colocado num copo de água parece “quebrado” devido à refração da luz. A construção de um modelo geométrico para a trajetória dos raios de luz ajuda a explicar o efeito da refração.

Dimensão 6 – habilidade de manipulação: aqui, a informação procurada refere-se como manipular um espaço para que ele produza um resultado desejado. Um modelo geométrico, neste caso, pode ser construído para saber como e sobre quais condições ou sobre quais propriedades do espaço devemos intervir para que um efeito esperado seja produzido. Por exemplo, se precisamos construir uma rede de caminhos para interligar um número finito de lugares, então a construção de um modelo geométrico pode auxiliar na identificação das propriedades que minimiza o comprimento total da rede.

Como sinalizado neste capítulo, a modelagem matemática como uma alternativa pedagógica visa a abordagem de situações-problema reais por meio da

mobilização de conhecimentos matemáticos e extra-matemáticos. No que tange ao ensino de Geometria por meio de atividades de modelagem matemática, pesquisas apontam benefícios e potencialidades para o trabalho dos conceitos e para o desenvolvimento dos alunos. Entre as dimensões da aprendizagem geométrica em práticas de modelagem matemática destacadas por Brito e Almeida (2021) está a dimensão 1 que versa sobre a habilidade de medição. Dando sequência a este quadro teórico, essa pesquisa visa investigar como alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental lidam com medidas e medições em uma sequência de atividades de modelagem matemática.

4 ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

4.1 ABORDAGEM METODOLÓGICA DA PESQUISA

A pesquisa tem como objetivo *investigar como os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental lidam com medidas e medições em uma sequência de atividades de modelagem matemática.*

Com essa finalidade foi desenvolvida uma sequência de atividades de modelagem matemática com alunos de uma turma do 4º ano do Ensino Fundamental.

A pesquisa se caracteriza de natureza qualitativa

A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais. Na sua busca de conhecimento, os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registados ou transcritos (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 48).

Bogdan e Biklen (1994), citam algumas características da pesquisa qualitativa, dentre as quais, citamos quatro: 1) a fonte direta de coletas de dados é o ambiente natural e o investigador o instrumento principal; 2) é descritiva; 3) há um interesse maior pelo processo que pelos resultados ou produtos; 4) normalmente, os dados são analisados de forma indutiva.

Apoiando-nos em Bogdan e Biklen (1994), compreendemos que também na investigação qualitativa vai-se a campo com uma preocupação inicial, um objetivo central. Para compreender a questão formulada é necessário inicialmente uma aproximação, ou melhor, uma imersão no campo para familiarizar-se com a situação ou com os participantes a serem pesquisados.

4.2 OS PARTICIPANTES DA PESQUISA E A COLETA DE DADOS

A pesquisa está vinculada à escola municipal localizada no norte do Paraná, sendo desenvolvida no âmbito dos anos iniciais com uma turma do 4º ano que é composta por 25 alunos. A escola funciona nos períodos, matutino, vespertino

e possui quatro turmas no período matutino e quatro no período vespertino. As atividades aconteceram no período matutino em uma turma do 4º ano.

Esta turma foi escolhida por ser o único 4º ano nesse período, composta por 25 alunos e o conteúdo de Grandezas e Medidas estava previsto para o trimestre.

As atividades de modelagem matemática foram sendo inseridas de forma gradativa conforme disponibilidade de horário da professora da turma em dias alternados e também da professora pesquisadora.

Os alunos formaram cinco grupos com cinco alunos em cada grupo e desenvolveram a sequência de cinco atividades de modelagem matemática cujos temas foram: (1) *Como determinar alturas?*; (2) *É possível medir a beleza de uma pessoa?*; (3) *A reforma do estádio*; (4) *Descobrimo o número do calçado*; (5) *O estacionamento da escola*.

No Quadro 1 consta o número de aulas bem como a classificação da atividade relativamente à caracterização de Lesh et al. (2010) como atividade de aquecimento ou atividade de acompanhamento.

Quadro 1 – As atividades de modelagem desenvolvidas

TEMÁTICA DA ATIVIDADE	Nº DE AULAS	TIPO DE ATIVIDADE
Como determinar alturas?	4	Aquecimento
É possível medir a beleza de uma pessoa?	5	Aquecimento
A reforma do estádio	8	Acompanhamento
Descobrimo o número do calçado	6	Acompanhamento
O estacionamento da escola	6	Acompanhamento

Fonte: a autora (2022).

Antes de iniciar a coleta de dados, os pais dos alunos foram convidados para uma reunião e informados sobre a pesquisa. Também, na ocasião, apresentou-se às famílias os termos de Assentimento e de Consentimento assinados pela direção da escola a fim de que a pesquisa fosse autorizada com a turma.

A coleta de dados se deu mediante vários instrumentos, tais como: gravações de áudios; gravações de imagens; gravações de diálogos com o professor; fotografias; anotações do professor, bem como os registros dos alunos. Para isso foram utilizados cinco telefones celulares, que serviram de gravador em cada grupo, a fim de captar, tanto as falas dos alunos, bem como imagens e fotos, que iam sendo registradas, no decorrer do desenvolvimento das atividades.

Foi usado também um diário de campo no qual foram anotados todos os relatos dos encontros como diálogos entre os alunos e procedimentos que iam chamando a atenção durante a realização das atividades nos grupos.

Ao término de cada atividade, os resultados e procedimentos adotados pelos grupos eram socializados com os demais alunos da turma.

Além desses instrumentos utilizados para a coleta de dados, também foram usados a sala de projeção de vídeos da escola, calculadoras, quadro, giz, fita adesiva, fitas métricas, papel kraft, réguas, trenas, papéis para anotação.

Aos grupos foram dados as siglas de G1, G2, G3, G4 e G5 e para manter o sigilo dos nomes dos alunos, foram usados os códigos A1, A2, A3, A4 e A5 para os alunos de cada grupo.

4.3 A ANÁLISE DOS DADOS

A análise tem caráter descritivo e interpretativo, visando identificar aspectos relativos aos procedimentos dos alunos para lidar com o uso de medidas e medições no desenvolvimento das cinco atividades de modelagem matemática.

As duas primeiras atividades (Como determinar alturas? e Como medir a beleza de uma pessoa?) são atividades de aquecimento, sendo as temáticas já mencionadas em outras pesquisas, e representam o primeiro contato desses alunos com a modelagem matemática com o intuito de os familiarizar com o contexto de atividades de modelagem, além de responder sobre pré-requisitos mínimos para os alunos trabalharem posteriormente em atividades de exploração e aplicação de modelos. Já as outras três constituem atividades de acompanhamento, considerando que os próprios alunos se envolveram com a coleta de dados e já reconheciam encaminhamentos a usar para construir modelos matemáticos e, por meio de medidas e medições, obter uma solução para o problema da realidade em estudo bem como pelo surgimento de discussões que apontam para uma semelhança estrutural, tanto em relação aos procedimentos caracterizados em um ciclo de modelagem quanto à realização de medições e uso de instrumentos diversificados para realizá-las.

O processo de análise é constituído em duas etapas, iniciando com uma análise local de cada atividade implementada visando elucidar aspectos específicos das ações dos alunos na atividade. Em seguida, realiza-se uma análise global que visa articular e reunir elementos relativos à análise local discutindo o

processo de desenvolvimento da sequência de atividades de modelagem matemática e abordagem de conteúdos da Geometria que envolvem medidas e medições.

4.4 O PRODUTO EDUCACIONAL

O Produto Educacional associado refere-se a um Caderno de Atividades cujo tema é MODELAGEM MATEMÁTICA NOS INICIAIS E O ENSINO DE CONCEITOS DA GEOMETRIA. Trata-se de uma sequência de cinco atividades desenvolvidas em uma turma do quarto ano do Ensino Fundamental, com a finalidade de apontar para a possibilidade de práticas de modelagem matemática em sala de aula nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A proposta almeja enfatizar a possibilidade de, por meio de atividades de modelagem matemática, realizar o ensino de medidas e medições relativamente à componente curricular Grandezas e Medidas.

O produto é organizado tendo por base articulações teóricas acerca do como a modelagem matemática pode proporcionar o desenvolvimento de habilidades envolvendo medidas e medições nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Propomos uma sequência de cinco atividades, considerando a classificação apontada em Lesh (2003) e Mendes e Almeida (2020), cujo objetivo é que determinado conceito possa ser explorado e detalhado no decorrer de algumas atividades e aulas consecutivas (LESH *et al.*, 2003).

O caderno pedagógico constitui material que poderá ser utilizado pelo professor que tem interesse em introduzir a modelagem matemática nas aulas dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE LOCAL DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Nesse capítulo direcionamos o foco da nossa atenção para cada uma das cinco atividades de modelagem matemática envolvendo medidas e desenvolvidas no segundo trimestre de 2022 com alunos do 4º ano do Ensino Fundamental. A escolha do tema em cada atividade aconteceu pensando em situações-problema nas quais conteúdos relativos a medidas e grandezas fossem usados para resolver um problema da realidade.

Em cada uma das atividades descreve-se como foram os encaminhamentos dados pelos alunos em resposta ao problema enunciado. O desenvolvimento das atividades ocorreu em horário normal e os alunos formaram grupos para desenvolver as atividades conforme suas preferências. Foram organizados, durante todas as atividades cinco grupos formados por cinco alunos em cada.

As atividades são classificadas segundo a caracterização de atividade de aquecimento e atividade de acompanhamento, conforme constou no Quadro 1.

5.1 ATIVIDADE 1 – COMO DETERMINAR ALTURAS?

Esta foi a primeira atividade desenvolvida pelos alunos. Para tanto, a turma se organizou em 5 grupos contendo 5 alunos em cada grupo, havendo necessidade de 2 encontros e totalizando 4 aulas. Considerando a qualidade dos registros e dos áudios gerados, apresenta-se os encaminhamentos de 4 grupos. Dentro da sequência, caracteriza-se como atividade de aquecimento.

Para o desenvolvimento da atividade, inicialmente, a turma foi visitar a escola que está passando por reformas e aproveitou para fotografar a professora embaixo do pé de araucária. A árvore foi apreciada por todos, inclusive, na ocasião, um dos alunos da turma relatou que seu pai havia acompanhado o plantio da árvore durante a comemoração de um dos aniversários da escola. Foram disponibilizados para os alunos diversos materiais como fitas métricas, calculadoras, régua, cartolinas, trenas e folhas para anotações. Nessa atividade os alunos tiveram que descobrir a altura da árvore tomando como base a altura da professora na foto.

Na sala a professora iniciou a aula apresentando a folha com a

imagem conforme indica o Quadro 2. Nesse momento houve várias argumentações dos alunos relativamente à árvore símbolo do estado do Paraná, referindo-se à história do seu plantio na escola, do cultivo e da importância da gralha azul para o replantio. Em seguida a professora desafiou os alunos com as questões: Algum de vocês sabe a altura dessa araucária? É possível determinar a altura da árvore usando a imagem da foto? (referindo-se à figura do Quadro 3).

Quadro 2 – Atividade 1 – Como determinar alturas?



Temos aqui a imagem da araucária na frente da Escola Municipal Ana Nery. Ao lado da árvore está a professora Maria Cláudia. Qual é a altura da árvore?

Fonte: as autoras (2022).

Com a imagem do Quadro 3 em mãos, após a leitura em conjunto, a

aluna A1 do Grupo 1 entrevistou e perguntou:

A1: Professora, quanto você mede de altura?

Prof: A minha medida é de 1,65 m de altura. Vamos confirmar?

Nesse momento os alunos pediram para a professora se posicionar em pé no armário da sala de aula e como dispunham de vários instrumentos de medição, avaliaram no grande grupo que o uso da fita métrica seria o instrumento de medição ideal. O diálogo entre A1 do G1 e A4 do G3, indica a ação dos alunos.

A3: Olha, a régua pode ser usada para medirmos a professora.

A1: Não, pelo tamanho da professora, com a régua vai demorar muito e a gente pode errar porque ela é dura.

A3: Ah, então vamos usar a fita métrica!

Em outra discussão relativa à altura da professora a aluna A2 do G5, sugeriu que a professora tirasse os sapatos para encontrar a altura correta, ao passo que outro aluno do mesmo grupo, A4, disse que bastava medir a altura do calçado e descontar da altura total da professora. Usando então uma fita métrica, cada grupo aferiu a altura da professora como sendo 1,65, ou seja, 1 metro e 65 centímetros.

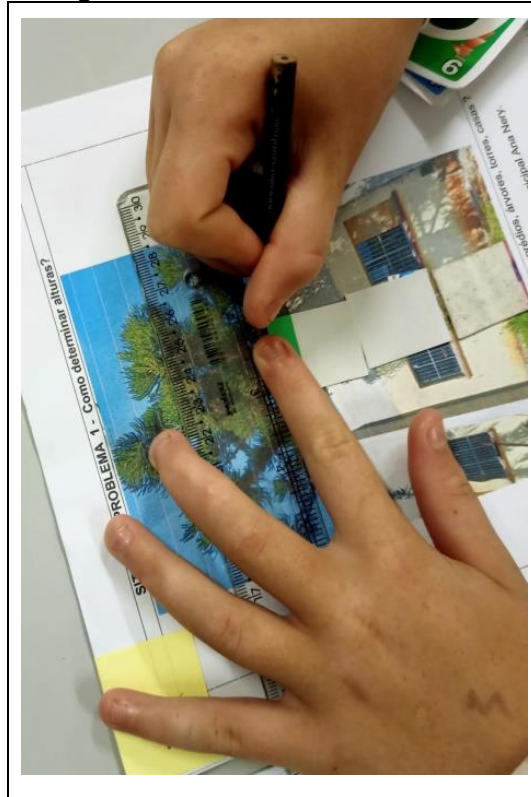
Em seguida, considerando conhecida a altura da professora, o desafio foi determinar a altura da árvore usando a altura da professora. Os alunos, nos cinco grupos, indicaram dificuldade em usar a régua ou a fita métrica para medir a altura da árvore usando a altura da professora.

Percebida esta dificuldade em manusear os instrumentos, a professora propôs que realizassem a construção, em papel cartolina, de uma régua, para constatarem a diferença entre usar o instrumento de medida e compreender como ele funciona, como “mede”. O instrumento foi escolhido porque os alunos estavam mais familiarizados com ele em sala de aula. Durante a construção do instrumento, puderam observar que os espaços da régua são importantes, e mais importante que os “risquinhos” é reconhecer e compreender o que são os espaços apresentados na régua. Após a confecção que durou uma aula, os alunos alinharam as réguas nas fitas métricas e puderam confirmar suas medições bem como brincar de medir vários objetos da sala de aula.

Foi percebido, também, pela professora, que os alunos usavam os dedos como instrumento de medida para estimar a altura da professora na foto, ou até mesmo a régua como forma de tentar encontrar uma resposta para o problema. Nesse momento foi sugerido o molde representativo da altura da professora, confeccionado em papel cartolina, pois com o dedo poderia haver mais margem para imprecisões

nas medidas. Os alunos passaram, então, a utilizá-lo conforme indica a Figura 5.

Figura 5 – Uso do molde de cartolina



Fonte: registro escrito dos alunos (2022).

Usando o molde relativo à altura da professora, não demorou para que os alunos realizassem as medições estabelecendo estratégias para chegar à altura da os araucária.

Neste ponto do desenvolvimento da atividade, identificamos a fase da matematização que é caracterizada pelo processo de transição de linguagens, de visualização e do uso de símbolos para realizar descrições matemáticas que são realizadas a partir de formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações com relação ao problema definido na fase da inteiração [...] proposto em Almeida, Silva e Vertuan (2012).

A maioria dos alunos nos grupos foi chegando a um consenso mas não sabiam o que fazer com os milímetros que sobravam na altura da árvore quando a mediam observando quantas vezes o instrumento “cartolina” cabia na altura da árvore. Foi percebida a dificuldade em alguns para lidar com as medidas na régua ao que a professora indagou:

Prof: Pode se falar em aproximação na altura?

Como os alunos apresentaram dificuldades com a representação

decimal dos numerais, a professora explicou que ao invés de escrever por extenso havia uma forma decimal de escrever. Mediante o Material Dourado foi explicado que nosso sistema possui base 10 e os risquinhos dos milímetros são menores que o centímetro, ou seja correspondem a uma unidade dividida em 10 partes ($1/10$) que é um número decimal, o “0,1”. Os alunos dominavam o entendimento da parte inteira mas apresentaram dificuldades na parte fracionada.

Constatamos que ao alunos apresentaram dificuldades em raciocinar visando resolver o problema proposto.

Alunos: Tia¹, é de mais ou de menos? É de dividir ou de multiplicar?

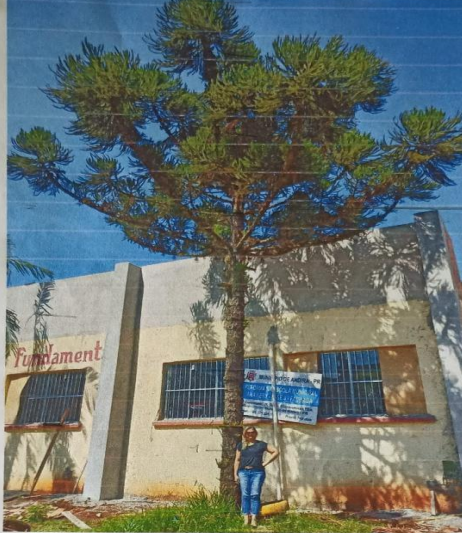
Na Figura 6, consta o registro escrito do grupo G1 que descreveu o procedimento adotado pelo grupo:

Alunos: Pegamos o papel e medimos quantas vezes que coube na altura da árvore e deu 8,25 mas sobrou 4 mm.

Figura 6 – Resolução dos alunos do grupo G1

¹ "No Brasil, é frequente o uso do termo “tia” na educação infantil para se referir à profissional da educação. Essa terminologia tira da professora sua identidade, tanto de sujeito como de profissional. Além disso, o termo “tia” gera uma confusão quando é considerado como símbolo de afetividade."

SITUAÇÃO-PROBLEMA 1 - Como determinar alturas?



3M

Como podemos saber a altura de coisas como: prédios, árvores, torres, casas ?

Temos aqui a imagem da araucária na frente da Escola Municipal Ana Nery.

Ao lado da árvore está a professora Maria Cláudia.

Qual é a altura da árvore?

Usamos o papel e medimos todas as vezes possíveis e com isso deu 8,25 m
sobra 4 mm

$$\begin{array}{r} 1,65 \\ \times 5 \\ \hline 8,25 \end{array}$$

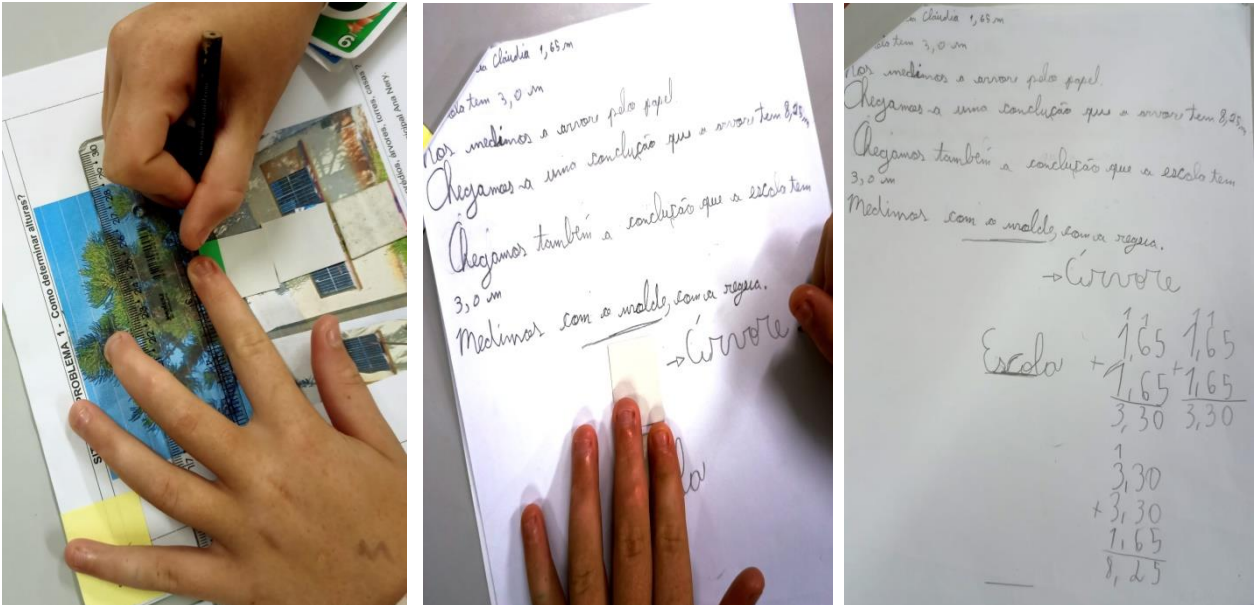
GRUPO 1^o

Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G1 (2022).

O Grupo G1, após várias tentativas, chegou à medida que vemos na imagem, ou seja, 8,25m. Constataram a sobra de 4mm mas não chegaram ao consenso do que realizar com essa sobra.

O Grupo G2, usou procedimento distinto do Grupo G1 para determinar a altura da árvore usando o instrumento construído. (Figura 7)

Figura 7 – Resolução dos alunos do grupo G2



Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G2 (2022).

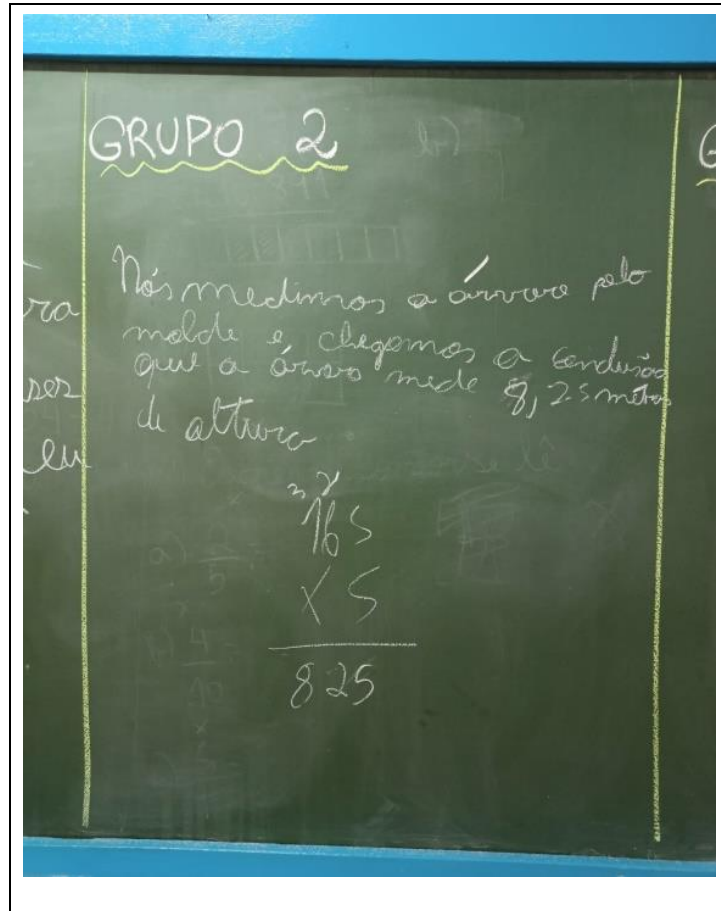
Esse grupo colocou o molde confeccionado sobre a imagem da árvore e realizando adições relativas à altura da professora que culminou em 8,25m a altura da árvore. Realizavam as medições e confirmavam com a régua. Também calcularam a altura da escola utilizando o mesmo procedimento. Constatamos, a tentativa de validação realizada através do diálogo entre eles.

A2: Nossa! Acho que está certo, sim!

A3: Verdade! A escola é mais baixa mesmo que a árvore e 3 é menor do que 8!

Os alunos construíram, inicialmente, o modelo matemático, neste caso expresso pelas somas das medidas parciais conforme constam na Figura 7. Em seguida, entretanto, perceberam que poderiam também usar multiplicação, escrevendo o modelo matemático como um produto da quantidade de vezes que o instrumento de medida cabia na altura da árvore (Figura 8).

Figura 8 – Modelo matemático do grupo G2




Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G2 (2022).

A resposta para o problema apresentada pelos alunos do grupo G2, realizada no quadro, é o modelo matemático, com uso da operação de multiplicação.

Os alunos do Grupo 3 também chegaram à conclusão, com a ajuda da calculadora, que a altura da araucária é 8,25m, sem resolução para os milímetros que sobraram na medida da árvore. A medida da altura da professora feita com o molde, coube 5 vezes na árvore e sobraram 5 mm (Figura 9).

Figura 9 – Resolução dos alunos do grupo G3

SITUAÇÃO-PROBLEMA 1 - Como determinar alturas?



Como podemos saber a altura de coisas como: prédios, árvores, torres, casas ?

Temos aqui a imagem da araucária na frente da Escola Municipal Ana Nery.

Ao lado da árvore está a professora Maria Cláudia.

Qual é a altura da árvore? *3,25* Nós usamos o resultado pela altura da professora e pela calculadora sobre 3 centímetros, o papel que a professora deu com a altura dele 1,65 e deu 8,25

$$\begin{array}{r} 165 \\ \times 25 \\ \hline 825 \end{array}$$


Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G3 (2022).

Na figura 9 podemos verificar que, na resolução do grupo G3, os alunos construíram como modelo matemático, um algoritmo da multiplicação. Nesta idade (9 anos) os alunos realizam estimativas.

Os alunos do Grupo 4, com o intuito de confirmar as medições realizadas, demarcam com lápis na árvore a medida do molde relativo à altura da professora para visualizar quantas vezes cabe na altura da árvore (Figura 10).

Figura 10 – Resolução dos alunos do grupo G4

SITUAÇÃO-PROBLEMA 1 - Como determinar alturas?



Marcas realizadas com o lápis, no tronco da árvore, pelos alunos, quando puseram o molde de 3 cm.

Como podemos saber a altura de coisas como: prédios, árvores, torres, casas ?

Temos aqui a imagem da araucária na frente da Escola Municipal Ana Nery.

Ao lado da árvore está a professora Maria Cláudia.

Qual é a altura da árvore? $76,60$

$8,30$	32
$18,30$	165
$\hline 76,60$	$+ 165$
	165
	165
	165
	$8,15$
	$\hline 75$

Usamos o papel do molde da prof. Maria Cláudia e fomos medindo 8,30 e somando 5cm, o resultado foi 16,60 pois não pensamos no tamanho real da árvore.

Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G4 (2022).

Na figura 10, com riquezas de informações, o aluno, A3 do G4 revela na folha de atividade de resolução oferecida, essa liberdade que a modelagem matemática proporciona para o aluno expressar suas ideias.

5.1.1 Medidas, medições e as ações dos alunos na atividade 1

A atividade, sendo o primeiro contato dos alunos com a modelagem matemática, a temática já conhecida na literatura e sendo o primeiro contato dos alunos com a realização de medições, caracteriza-se como atividade de aquecimento (Lesh et al. 2003; Mendes, Almeida, 2020).

A partir da conscientização de que, usando a medida de altura da professora deveriam determinar a altura da árvore, os alunos se defrontaram com o que consideraram “desafio”.

Primeiramente, os alunos tiveram dificuldade em decidir qual instrumento de medida usar uma vez que possuíam trenas, réguas e fita métrica, bem como posicioná-los durante a medição.

Enquanto, para medir a altura da professora puderam usar a fita métrica, para determinar a altura da árvore, perceberam que não é possível usar este instrumento. Ou seja, algum instrumento auxiliar deveria ser construído, respeitando a proporção entre a medida real e a medida na imagem. Isso foi resolvido com a construção do molde e em consonância do que se caracteriza como possibilidade de medir algo em Walle (2009), isto é, determinar quantas vezes a altura da professora cabe na altura da árvore.

De fato, percebida a dificuldade em manusear os instrumentos, a professora pesquisadora, propôs que realizassem a construção em papel cartolina de uma régua, para constatarem a diferença em usar o instrumento de medida e compreender como ele funciona, como “mede”. O instrumento foi escolhido porque os alunos estavam mais familiarizados com ele em sala de aula. Durante a construção do instrumento, puderam observar que os espaços da régua são importantes, os risquinhos são usados para demarcar os espaços e auxiliar na contagem deles; e mais importante que os “risquinhos” é reconhecer e compreender o que são os espaços apresentados na régua. . Após a confecção os alunos alinharam as réguas nas fitas métricas e puderam confirmar suas medições bem como brincar de medir vários objetos da sala de aula.

O que os alunos também tiveram oportunidade de fazer na atividade foi comparar medidas realizadas com diferentes instrumentos. Ao medir com os dedos a proporção entre a medida da árvore e a medida da professora, observaram como o “dedo” pode ser substituído por um instrumento convencional, uma régua.

As medições realizadas, ora em uma medida convencional (o centímetro), ora em uma medida criada para a situação, o molde de cartolina, proporcionaram-lhe construir o que se caracteriza como modelo matemático nessa atividade (Figura 11).

Figura 11 – Modelo Matemático construído pelos alunos

Qual é a altura da árvore? $16,60$

$$\begin{array}{r} 8,30 \\ + 8,30 \\ \hline 16,60 \end{array}$$

Usamos o papel do medido da prof. Maria Cláudia e fomos medindo $8,30$ e sobrou 5cm , o resultado foi $16,60$ pois não pensamos no tamanho real da árvore.

$$\begin{array}{r} 165 \\ + 165 \\ \hline 165 \\ + 165 \\ \hline 165 \\ + 165 \\ \hline 8,25 \\ + 5 \\ \hline \end{array}$$

Nós medimos a árvore pelo molde e chegamos a conclusão que a árvore mede $8,25$ metros de altura.

$$\begin{array}{r} 165 \\ \times 5 \\ \hline 825 \end{array}$$

GRUPO 1

Regramos o papel da medida da professora e medimos todas as vezes possíveis e com isso deu $8,25$ sobrou 4mm .

$$\begin{array}{r} 165 \\ \times 5 \\ \hline 8,25 \end{array}$$

Fonte: Registro escrito dos alunos (2022).

Ao olharmos para os registros realizados pelos alunos e durante nossa observação no desenvolvimento da atividade, percebemos que a modelagem matemática proporcionou um momento de inteiração, de cooperação entre os alunos no grupo bem como a empatia pelas ideias apresentadas pelo outro na busca de se chegar à solução para o problema. A dinâmica da atividade também trouxe a discussão de assuntos pertinentes ao dia a dia e possibilitou ao aluno se apropriar de medições para desvendar situações que lhes são próximas no cotidiano, em nosso caso, a altura da araucária que enfeita e tem história em nossa escola.

5.2 ATIVIDADE 2 – É POSSÍVEL MEDIR A BELEZA DE UMA PESSOA?

Esta foi a segunda atividade de modelagem matemática desenvolvida pelos alunos e na sequência, caracteriza-se como atividade de aquecimento. Para seu desenvolvimento em grupos houve a necessidade de dois encontros, totalizando quatro aulas.

Com a finalidade de informar os alunos sobre o tema da atividade, a professora os levou até a sala de televisão onde assistiram ao filme de 1959, “Donald no país da matemágica”. Após assistirem ao filme, ocorreu uma roda de conversa a respeito do que eles consideravam como padrão de beleza. Eles reconheceram, por meio do filme, que a regra de ouro é uma proporção que pode ser calculada na cultura, como na Catedral de Notre Dame, na obra ‘Monalisa’ de Leonardo da Vinci, entre outros.

Foi discutido com os alunos que a regra de ouro, ou também denominado número de ouro, é a razão entre um segmento todo e uma parte maior deste segmento. Trata-se do número irracional $(1+\sqrt{5})/2$ que corresponde a, aproximadamente, 1,618.

Na roda de conversa foi evidenciado que os espirais da regra de ouro podem ser vistos na natureza: tudo está organizado e podemos ver Matemática na música, na arte, entre outros. Nesta atividade os alunos tiveram oportunidade de desconstruir um padrão de beleza imposto pela sociedade e puderam lançar um novo olhar sobre a beleza por meio de relações harmoniosas na natureza, e até no próprio corpo como mostrado no filme. Saber que os gregos e outros povos na antiguidade consideravam a regra do número de ouro perfeita e descobrir essa regra no corpo humano por meio de medidas e medições foi motivador para os alunos. A Figura 12 aborda uma foto deste momento de inteiração.

Figura 12 – Exibição de vídeo

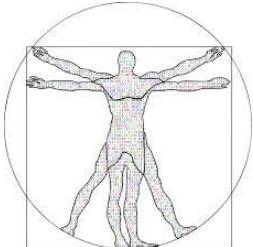


Fonte: as autoras (2022).

Após a exibição do filme, a professora propôs a situação-problema: “Será que é possível medir a beleza de uma pessoa?” Então, os alunos pediram para a professora pesquisar fotos de personagens famosos que iam citando, como Gisele Bundchen, Gustavo Lima, Lucas Netto, Bless, Titi e Zyan (filhos do ator Bruno Cagliasso). Enquanto a professora ia exibindo fotos dos famosos, iam e opinavam sobre a beleza. Começaram, então, a perceber que beleza é algo subjetivo pois enquanto uns achavam lindo determinado famoso, outros nem tanto.

Depois da roda de conversa, os alunos foram com a professora para a sala de aula, onde foram organizados em 5 grupos de 5 alunos, G1, G2, G3, G4 e G5. Foram distribuídas as folhas das atividades (Quadro 4) com explicação, bem como materiais para medição como fitas métricas, réguas, trenas, etc. A intenção era chegar o mais próximo possível do “número de ouro”, ou seja, do valor aproximado de 1,618...

Quadro 3 – É possível medir a beleza de uma pessoa?

É POSSÍVEL MEDIR A BELEZA DE UMA PESSOA?		
Então vamos realizar medições para falarmos sobre a beleza?		
ALUNOS	MEDIDAS	QUOCIENTE
_____	Da altura do aluno: _____ Do umbigo até o chão: _____	
	Do queixo até início do cabelo: _____ Do queixo até as sobrancelhas: _____	

Fonte: adaptado de Tortola (2012).

Os alunos deveriam medir partes de seu corpo e dos colegas e encontrar o quociente de cada medida. Com a liberdade de escolher o instrumento de medição que melhor os ajudasse nas medições, se dispersaram pela sala de aula e iniciaram, ora encostados no quadro, ora deitados no chão, ora recostados no armário, as medições dos colegas.

Conforme os alunos coletavam os dados, começaram a questionar a professora “Tia é de vezes ou de dividir”, a qual, por sua vez, retomava os conceitos matemáticos necessários, por exemplo, as quatro operações e a noção de quociente

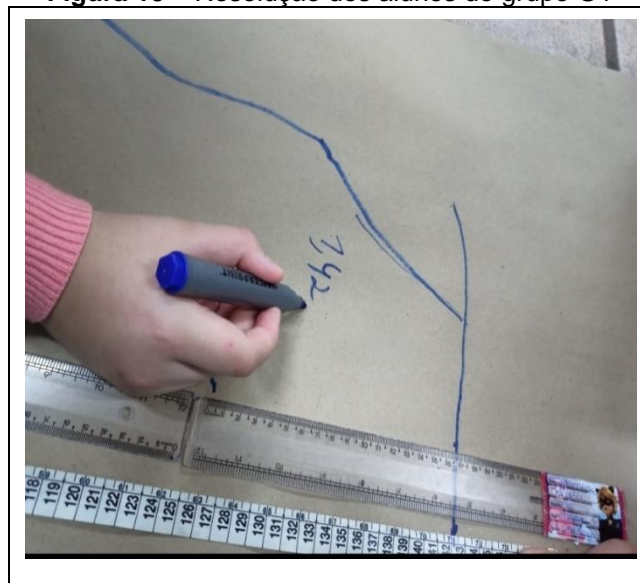
como resultado da divisão entre dois números; soma, para contas de adição e diferença para as contas de subtração.

Em cada grupo, diferentes procedimentos foram utilizados para o cálculo das medidas e a realização do quociente que era solicitado no Quadro 4.

As alunas do Grupo 1 realizaram o contorno de uma das integrantes no papel kraft e foram confirmando a medição com auxílio da régua e fita métrica, concomitante (Figura 13). A maioria dos alunos não sabiam suas alturas e durante as medições, ora utilizavam a fita métrica do lado correto, ora mudavam o lado da fita até pegarem a régua para conferir. Observe o relato da fala de uma delas enquanto mediam:

A2: Vamos pegar a régua que a gente tá acostumada, que vai dar certo.

Figura 13 – Resolução dos alunos do grupo G1



Fonte: registro escrito dos alunos do grupo G1 (2022).

Diante da imagem da aluna utilizando a régua (Figura13), podemos perceber que, mesmo em posse de outros instrumentos de medição, os alunos sempre recorriam às régua de 30 cm, até mesmo por ser o único instrumento com o qual já haviam tido maior contato.

Apesar de ainda não saberem realizar a operação de divisão com numerais racionais, os alunos o fizeram com a ajuda da calculadora e a mediação da professora. Foi necessário neste ponto da atividade a explicação da professora sobre o uso da calculadora, a funcionalidade de algumas teclas, em particular para o cálculo das 4 operações. Os alunos localizaram, na calculadora, as teclas que representam

as quatro operações básicas e realizaram os cálculos, utilizando-a como uma ferramenta de aprendizagem que promove autonomia.

Quando os alunos utilizavam a fita métrica que mede 1,50m eles realizavam adições relacionadas aos centímetros que passavam, mediante orientação da professora. Por exemplo, 1,50 m mais 0,12 m, que resulta em 1 m e 62 cm. Assim que mediam e realizavam a divisão na calculadora, eram orientados a utilizar duas casas decimais após a vírgula e constatavam por exemplo que 1,66 significava 1 metro e 66 centímetros. Neste contexto, o sentido do conceito de medida ia sendo constituído a partir dos diferentes instrumentos utilizados para a coleta de dados, bem como por meio dos cálculos necessários para resolução das atividades de modelagem matemática.


As alunas do grupo G1 se esforçaram para chegar o mais próximo possível do número de ouro. Elas faziam e refaziam contas na calculadora para se certificarem do quociente, conferindo os resultados com as colegas. Podemos verificar o registro dos cálculos realizados pelas alunas na Figura 14.

Figura 14 – Resolução das alunas do grupo G1

~~GRUPO 1~~

SITUAÇÃO-PROBLEMA 2 – É possível medir a beleza de uma pessoa ?

Então vamos tirar medidas para falarmos sobre a beleza?



<https://definicao.net/homem-vitruviano-significado/>

ALUNOS	MEDIDAS	QUOCIENTE
[Redacted]	Da altura do aluno: <u>1,52 m</u> Do umbigo até o chão: <u>94 cm</u>	1,61
	Do queixo até início do cabelo: <u>29 cm</u> Do queixo até as sobrancelhas: <u>12 cm</u>	1,7
[Redacted]	Da altura do aluno: <u>1,52 m</u> Do umbigo até o chão: <u>97 cm</u>	1,56
	Do queixo até início do cabelo: <u>20 cm</u> Do queixo até as sobrancelhas: <u>14 cm</u>	1,4
[Redacted]	Da altura do aluno: <u>1,40 m</u> Do umbigo até o chão: <u>83 cm</u>	1,71
	Do queixo até início do cabelo: <u>19 cm</u> Do queixo até as sobrancelhas: <u>14 cm</u>	1,35
[Redacted]	Da altura do aluno: <u>1,35 m</u> Do umbigo até o chão: <u>83 cm</u>	1,62
	Do queixo até início do cabelo: <u>19 cm</u> Do queixo até as sobrancelhas: <u>14 cm</u>	1,3
[Redacted]	Da altura do aluno: <u>1,52 m</u> Do umbigo até o chão: <u>95 cm</u>	1,60
	Do queixo até início do cabelo: <u>16 cm</u> Do queixo até as sobrancelhas: <u>13 cm</u>	1,2

O que podemos concluir com os resultados?

Fonte: Registro escrito das alunas do grupo G1 (2022).


Os alunos do Grupo G2, em procedimentos semelhantes aos das alunas do grupo G1, sistematizaram seus resultados na imagem da Figura 15.

Figura 15 – Resolução dos alunos do grupo G2

Grupo 2

SITUAÇÃO-PROBLEMA 2 - É possível medir a beleza de uma pessoa?

Então vamos tirar medidas para falarmos sobre a beleza?



<https://definicao.natflumen.com/vitruviano-estigilado/>

ALUNOS	MEDIDAS	QUOCIENTE
[Redacted]	Da altura do aluno: 1,70 Do umbigo até o chão: 1,06	1,61
[Redacted]	Do queixo até início do cabelo: 0,15 Do queixo até as sobrancelhas: 0,21	1,4
[Redacted]	Da altura do aluno: 1,65 Do umbigo até o chão: 1,10	1,5
[Redacted]	Do queixo até início do cabelo: 0,15 Do queixo até as sobrancelhas: 0,21	1,4
[Redacted]	Da altura do aluno: 1,70 Do umbigo até o chão: 1,06	1,60
[Redacted]	Do queixo até início do cabelo: 0,15 Do queixo até as sobrancelhas: 0,21	1,4
[Redacted]	Da altura do aluno: 1,70 Do umbigo até o chão: 1,06	1,60
[Redacted]	Do queixo até início do cabelo: 0,15 Do queixo até as sobrancelhas: 0,21	1,4
[Redacted]	Da altura do aluno: 1,53 Do umbigo até o chão: 0,95	1,5
[Redacted]	Do queixo até início do cabelo: 0,15 Do queixo até as sobrancelhas: 0,21	1,4

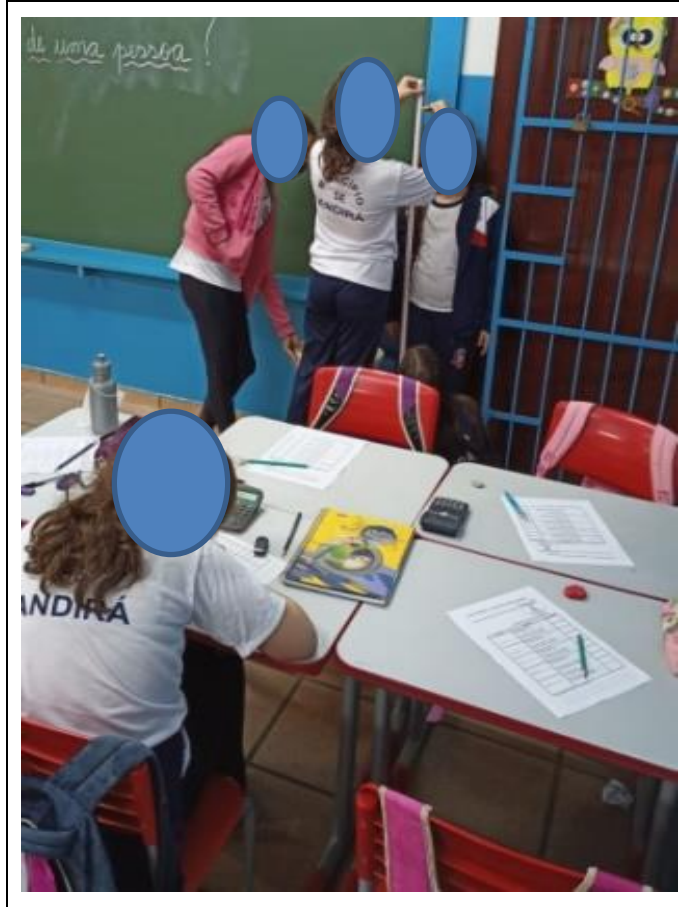
O que podemos concluir com os resultados?

A altura do aluno...

Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G1 (2022).

Já as alunas do Grupo G3, coletaram as medidas recostadas no quadro (Figura 16). Elas iniciaram a realização das medições de ténis, no entanto, quando elas perceberam que outros grupos tiravam os ténis e encontravam o quociente mais próximo do número de ouro, decidiram refazer suas medições.

Figura 16 – Alunos do grupo G3 realizando medições



Fonte: as autoras (2022).

O manuseio dos instrumentos de medida não era comum aos alunos, por exemplo, vários deles tinham dificuldades em posicionar a fita métrica para realizar a medida das alturas, mas em trabalho colaborativo, colegas e professora auxiliavam na realização das medidas.

À medida que iam realizando as medições encostados na lousa, parede, armários, iam preenchendo o Quadro 4, a fim de encontrar o quociente. Também ocorreram dificuldades na leitura dos numerais racionais bem como no uso da calculadora, e foram sendo auxiliados pela professora bem como pelos colegas.

Neste momento, houve a necessidade de introduzir o conteúdo de divisão e a professora os questionou se sabiam onde estava o resto da divisão que estavam realizando, se teria uma forma de encontrá-lo utilizando a calculadora. Também foi abordado o assunto referente à vírgula nas casas decimais.

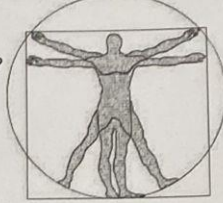
A partir das explicações e realização do cálculo, os alunos do Grupo 3 também realizaram as medições e encontraram o quociente próximo ao número de ouro (Figura 17).

Figura 17 – Resolução dos alunos do grupo G3

grupo 3

SITUAÇÃO-PROBLEMA 2 – É possível medir a beleza de uma pessoa ?

Então vamos tirar medidas para falarmos sobre a beleza?



<https://definicao.net/homem-vitruviano-significado/>

ALUNOS	MEDIDAS	QUOCIENTE
[Redacted]	Da altura do aluno: <u>1,48 m</u> Do umbigo até o chão: <u>87 cm</u>	1,72
	Do queixo até início do cabelo: <u>14 cm</u> Do queixo até as sobrancelhas: <u>39 cm</u>	1,46
[Redacted]	Da altura do aluno: <u>1,23</u> Do umbigo até o chão: <u>72</u>	1,65
	Do queixo até início do cabelo: <u>1,13</u> Do queixo até as sobrancelhas: <u>10</u>	1,68
[Redacted]	Da altura do aluno: <u>1,20</u> Do umbigo até o chão: <u>76 cm</u>	1,56
	Do queixo até início do cabelo: <u>23 cm</u> Do queixo até as sobrancelhas: <u>2 cm</u>	1,3
[Redacted]	Da altura do aluno: <u>1,47</u> Do umbigo até o chão: <u>87</u>	1,67
	Do queixo até início do cabelo: <u>19</u> Do queixo até as sobrancelhas: <u>13</u>	1,5
[Redacted]	Da altura do aluno: <u>1,42</u> Do umbigo até o chão: <u>68</u>	1,74
	Do queixo até início do cabelo: <u>18</u> Do queixo até as sobrancelhas: <u>14</u>	1,5

O que podemos concluir com os resultados?

Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G3.

No desenvolvimento da atividade pelos alunos do grupo G4, um dos alunos, A5, tinha uma estatura baixa e ao mesmo tempo apresentava certo desconforto devido à sua altura. Quando da realização das medições dentro do grupo, os alunos lidaram com a situação ao calcularem o quociente solicitado em relação ao número de ouro, conforme sinaliza o diálogo:

A2: Tá vendo? Você não é baixinho!

A5: Eu não sabia que eu ia chegar perto desse número de beleza!

próxima ao número de ouro. Questionados sobre a conclusão encontrada, o aluno A4 respondeu:

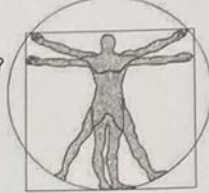
A4: Tia, eu acho que é porque a A3 é linda mesmo!

Figura 19 – Resolução dos alunos do grupo G5

Grupo 5

SITUAÇÃO-PROBLEMA 2 – É possível medir a beleza de uma pessoa ?

Então vamos tirar medidas para falarmos sobre a beleza?



<https://definicao.net/homem-vitruviano-significado/>

ALUNOS	MEDIDAS	QUOCIENTE
[Redacted]	Da altura do aluno: <u>1,42</u> Do umbigo até o chão: <u>86</u>	<u>1,72</u> OK
	Do queixo até início do cabelo: <u>16</u> Do queixo até as sobrancelhas: <u>14</u>	<u>1,14</u> OK
[Redacted]	Da altura do aluno: <u>1,51</u> Do umbigo até o chão: <u>86 cm</u>	<u>1,75</u> OK
	Do queixo até início do cabelo: <u>16 cm</u> Do queixo até as sobrancelhas: <u>13 cm</u>	<u>1,53</u> OK
[Redacted]	Da altura do aluno: <u>1,55</u> Do umbigo até o chão: <u>95</u>	<u>1,63</u>
	Do queixo até início do cabelo: <u>0,18 cm</u> Do queixo até as sobrancelhas: <u>0,12 cm</u>	<u>1,50</u> OK
[Redacted]	Da altura do aluno: <u>1,34</u> Do umbigo até o chão: <u>84 cm</u>	<u>1,59</u>
	Do queixo até início do cabelo: <u>18 cm</u> Do queixo até as sobrancelhas: <u>12 cm</u>	<u>1,50</u>
[Redacted] <i>Faltou</i>	Da altura do aluno: <u>0</u> Do umbigo até o chão: <u>0</u>	
	Do queixo até início do cabelo: <u>0</u> Do queixo até as sobrancelhas: <u>0</u>	

O que podemos concluir com os resultados?

A [Redacted] é a menina que chegou o mais perto do padrão, nem todas as meninas ficaram com o resultado final

Fonte: registro escrito dos alunos do grupo G5 (2022).

5.2.1 Medidas, medições e as ações dos alunos na atividade 2

Essa é a segunda atividade da sequência proposta e caracteriza-se como de aquecimento. Trata-se de uma situação problema estruturada que visa trabalhar conceitos de medidas e medições a partir de instrumentos de medida convencionais, bem como familiarizar os alunos com o conceito de proporção por meio do cálculo da razão entre duas medidas do corpo humano.

A atividade foi conduzida a partir de um processo investigativo, tendo como norte as fases da atividade de modelagem matemática. A introdução do tema foi feita por meio de um filme e uma roda de conversa que visava, desde o início (des)construir percepções dos alunos sobre um possível padrão de beleza.

Para o desenvolvimento das medições os alunos dos cinco grupos, com as folhas das atividades em mãos, foram desafiados a nomear um instrumento para auxiliá-los na atividade e a estratégia de realização. Uns optaram por recostar nas paredes, armários, ao passo que faziam “risquinhos” e em seguida mediam com auxílio da régua ou fita métrica. Já outro grupo, o G1 pediu papel kraft e realizou suas medidas produzindo contornos sobre o colega deitado no chão e após, constatavam suas medições.

A maioria dos grupos se concentrou no uso da fita métrica, disponibilizadas pela professora e da régua de 30 cm, instrumento comum na sala de aula. De acordo com Walle (2009) o uso de régua é um desafio visto que os alunos precisam compreender os números sobre a marca como unidades ou espaços entre as marcas, outro desafio colocado pela atividade, foi o entendimento de conversão entre metros e centímetros para o cálculo do quociente solicitado na situação-problema.

Associado ao cálculo do quociente, o desafio de lidar com números decimais também foi abordado na atividade de modelagem matemática e para auxiliar um dos instrumentos utilizados durante a aula para o tratamento dos cálculos foi a calculadora.

Apesar de não saberem realizar divisão com números racionais, foi possível realizar com a ajuda da calculadora e a professora mediando sua utilização. Ao demonstrarem dificuldade em lidar com a calculadora, foi pedido a atenção pela professora, para explicar a funcionalidade de algumas teclas, como por exemplo, a de porcentagem que é utilizada para conseguir descontos nas compras sem a

preocupação de explorar o conceito de porcentagem, mas localizando as teclas das quatro operações básicas e solicitando que fizessem operações aleatórias.

O uso da calculadora se deu após a coleta das medidas das alturas, ora realizadas usando a fita métrica (grupos G1, G3, G4 e G5), ora realizadas apenas usando a régua de 30 cm para medir a altura dos alunos cujo contorno havia sido desenhado no papel kraft (grupo G2). Neste momento, por meio da realização das medidas e das operações de adição com números decimais foram obtidas as alturas do aluno e a medida de seu umbigo até o chão.

Já no uso do modelo matemático, o cálculo do quociente para obter a razão entre essas duas medidas, foi necessário a intervenção da professora para explicar a conversão de medidas, metros e centímetros, e o cálculo da divisão usando a calculadora. Como por exemplo ocorreu na descrição da atividade dos alunos do Grupo G1.

No uso da fita métrica, que mede 1,50m, os alunos realizavam adições relacionadas aos centímetros que passavam, mediante orientação da professora. Por exemplo, $1,50 + 0,12 = 1,62$. Assim que mediam e realizavam a divisão na calculadora, eram orientados a utilizar duas casas decimais após a vírgula e constatavam por exemplo que 1,62 significava 1 metro e 62 centímetros.

Esse movimento também pode ser visto nos registros dos alunos ao preencherem os quadros, conforme: Figura 14 (p. 57); Figura 15 (p. 58); Figura 17 (p. 60); Figura 18 (p. 61); Figura 19 (p. 62).

Na Figura 14 (p. 57), por exemplo, o aluno registra a medida da altura de Luiza como 1,52m e a medida do umbigo até o chão como 94 cm, duas medidas com unidades de medida diferentes, mas o cálculo da razão entre elas, o quociente, é expresso utilizando 1,52cm e 94 cm.

O mesmo ocorre com os demais grupos, no entanto a partir da explicação da professora é possível vislumbrar que os alunos estão a partir do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, atribuindo sentido às medidas e às unidades de medida dos atributos em questão, para além do conceito de beleza trabalhado na atividade.

O padrão de beleza, inicialmente associado a personagens famosos da atualidade como modelos durante a atividade dos grupos, passa a ser mais subjetivo e flexível, como por exemplo, nas falas do A2 do G5: "Tá vendo? Você não é baixinho!" ao que o aluno A5 responde animado "Eu não sabia que eu ia chegar

perto desse número da beleza!”, constatamos o encantamento que pode haver na Matemática.

Podemos arguir mediante nossa observação que a modelagem matemática possibilita a aproximação entre teoria e prática, entre o mundo da Matemática e a Matemática do mundo; possibilita ainda, uma reflexão-ação de um conhecer a partir do fazer na busca de formas mais atraentes para a educação que atenda objetivos segundo D’Ambrósio (2001, p.70 e p.167), “de desenvolvimento do potencial criativo e da capacidade de se engajarem em ações comuns”, em prol da “sobrevivência e da transcendência” que “configuram a essencialidade da vida humana”.

Assim, consideramos que a atividade de modelagem matemática desenvolvida foi um passo para que os alunos tivessem um olhar diferente para a definição de beleza.

Percebemos que, por ser uma sequência de atividade, os alunos se mostraram mais autônomos nos diálogos em grupos, no manuseio dos instrumentos disponíveis, enfim, na liberdade em expor no papel seus pensamentos e ideias deixando de lado a preocupação com o certo e o errado, preocupando-se tão somente com o desenvolvimento da atividade.

5.3 ATIVIDADE 3 – A REFORMA DO ESTÁDIO

Considerando a sequência de atividades de modelagem matemática, esta se configura como atividade de acompanhamento. Os alunos já haviam tido contato com o cálculo de áreas em outras tarefas na sala de aula e também já tinham alguma familiaridade com medições e com a exploração do que poderia ser um modelo matemático proveniente de medições realizadas e cujas medidas eram de alguma maneira articuladas.

Para iniciar esta atividade os alunos foram levados até o estádio João Hermógenes de Andrade na cidade de Andirá que fica próximo à escola e estava passando por uma reforma. Ao observar as reformas em andamento no estádio, os alunos mostraram interesse em saber se a grama poderia ser trocada e o quanto seria gasto nessa substituição. Emerge então, a necessidade de realizar medições!

De posse de vários instrumentos, escolheram a trena para dar início às medições. Realizaram-nas no gramado do estádio e retornaram entusiasmados à

escola. As medições aferidas indicam que a parte gramada do estádio tem 90 m de comprimento e 60 m de largura. Durante as medições, o jardineiro que lá se encontrava, informou que a última notícia sobre o valor da grama, teria sido 6 reais o metro quadrado.

Chegando na sala de aula, os alunos foram organizados em 5 grupos, formados por 5 alunos cada, e munidos de calculadoras, lápis, papel e as medidas realizadas *in loco* no estádio. Foi entregue aos alunos uma folha com a imagem conforme Quadro 5.

Quadro 4 – A reforma do Estádio

A reforma do Estádio

O estádio municipal de futebol de Andirá se chama João Hermógenes de Andrade. Conhecido popularmente como "Andradão", o estádio tem capacidade para até 3.500 pessoas e passará brevemente por uma reforma. Entre as reformas que serão realizadas no estádio está a substituição da grama. Dessa forma, o problema que vamos estudar é: **Qual o valor que será gasto com a substituição da grama do estádio sabendo que ela será plantada pelos funcionários da prefeitura durante período de trabalho?**



Fonte: Imagem do autor

Fonte: as autoras (2022).

Para determinar o valor a ser gasto, os alunos estavam cientes de que deveriam calcular a área do campo a ser gramada e usar o valor a ser pago por metro quadrado da grama informado pelo jardineiro do estádio que é 6 reais.

Os alunos do grupo G1 iniciaram sua resolução, conforme indicado a seguir (Figura 20).

Figura 20 – Resolução dos alunos do grupo G1

SITUAÇÃO-PROBLEMA 3 – A reforma do estádio

O estádio municipal de futebol de Andirá se chama João Hermógenes de Andrade. Conhecido popularmente como "Andradão", o estádio tem capacidade para até 3.500 pessoas e passará brevemente por uma reforma.

Entre as reformas que serão realizadas no estádio está a substituição da grama. Dessa forma, o problema que vamos estudar é:

Qual o valor que será gasto com a substituição da grama do estádio sabendo que ela será plantada pelos funcionários da prefeitura durante período de trabalho?


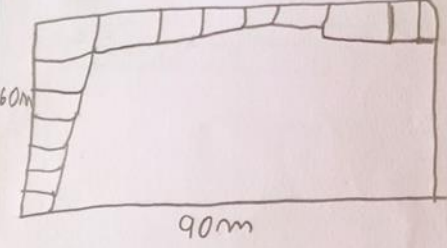


imagem do autor



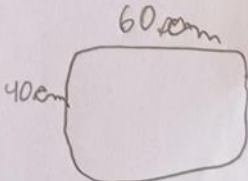
5,400 metros quadrado

$\frac{5,400}{2}$

$\times 2m$

+ 5,400

$$\begin{array}{r} 60 \\ \times 90 \\ \hline 5,400 \end{array}$$



Fonte: registro escrito dos alunos do grupo G1 (2022).

Conforme sinaliza um desenho, na parte inferior da Figura 20, o grupo fez uma tentativa de sobrepor a região com placas de grama de 60 cm de comprimento e 40 cm de largura, em consonância com a ideia de que a área pode ser determinada por “cobertura” ou “sobreposição” como sugere Walle (2009). Entretanto o grupo não consolidou essa resolução e acabou decidindo que o valor gasto corresponde ao total da área gramada multiplicado pelo valor da grama por metro quadrado. A Figura 21

indica como o grupo resolveu o problema.

Figura 21 – Resolução dos alunos do grupo G1

GPO 1

SITUAÇÃO-PROBLEMA 3 – A reforma do estádio

O estádio municipal de futebol de Andirá se chama João Hermógenes de Andrade. Conhecido popularmente como "Andradão", o estádio tem capacidade para até 3.500 pessoas e passará brevemente por uma reforma.

Entre as reformas que serão realizadas no estádio está a substituição da grama. Dessa forma, o problema que vamos estudar é:

Qual o valor que será gasto com a substituição da grama do estádio sabendo que ela será plantada pelos funcionários da prefeitura durante período de trabalho?




imagem do autor

Handwritten calculations and notes:

7,5 km
11 m x 17 m mais 4 m

60 x 90 = 5.400

5.400 x 6 = 32.400

VALOR DE MEDIDA DO CAMPO

VALOR DO METRO QUADRADO EM DINHEIRO

Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G1.

Os alunos do grupo G2, embora tenham apresentado algum detalhamento para a resolução do problema, também reduziram a modelagem ao cálculo da área da região gramada e o produto pelo preço do metro quadrado de grama (Figura 22).

Determinando a área de cada placa, concluíram que seriam necessárias 225 placas. Entretanto, como não conheciam o valor de uma placa de grama, apresentaram como resposta que o gasto com a troca do gramado é de R\$ 32.400,00 (Figura 23).

Figura 23 – Resolução dos alunos do grupo G5

5

SITUAÇÃO-PROBLEMA 3 – A reforma do estádio

O estádio municipal de futebol de Andirá se chama João Hermógenes de Andrade. Conhecido popularmente como "Andradão", o estádio tem capacidade para até 3.500 pessoas e passará brevemente por uma reforma.

Entre as reformas que serão realizadas no estádio está a substituição da grama. Dessa forma, o problema que vamos estudar é:

Qual o valor que será gasto com a substituição da grama do estádio sabendo que ela será plantada pelos funcionários da prefeitura durante período de trabalho? 90




imagem do autor

$A = L \times C$
 $A =$
 $= 5.400$ metros quadrados
 $m^2 = 6$ reais

12 vezes de 7,5m + 4m → 90m
 10 vezes de 7,5m → 60m
 comprimento

$60 \times 40 = 2.400 \text{ cm}^2$

Quantas
 Placas = 225 placas

40 40 60

$5.400 \div 24 = 225$

2
 5.400
 $\times 6$
 32.400 reais

Placa 60/40
 $2.400 \div 100 = 24m$

Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G5 (2022).

5.3.1 Medidas, medições e as ações dos alunos na atividade 3

Esta atividade, em consonância com a caracterização de uma atividade de acompanhamento, teve a participação mais ativa relativamente à definição do problema e à própria estruturação do que se deveria fazer na atividade.

A partir da inteiração com a situação, a matematização foi realizada de forma análoga por todos os grupos: associar a região gramada do estádio a um retângulo e calcular a sua área.

Neste sentido, as medições realizadas com um instrumento convencional, a trena, foi uma experiência divertida para os alunos.

Um grupo, entretanto, fez um investimento mais sofisticado do ponto de vista da resolução do problema, apontando para a possibilidade de cobrir a região gramada com placas menores cujas dimensões foram determinadas pelo grupo.

O que se pode destacar neste grupo é a conversão de medidas (de centímetro para metro e de centímetro quadrado para metro quadrado). Ou seja, se o ato de medir já se havia aperfeiçoado relativamente às atividades anteriores, lidar com as unidades de medida foi um desafio novo para o grupo.

Um aspecto relevante durante a realização da atividade diz respeito à identificação do metro quadrado como unidade de medida de uma superfície. Para favorecer o entendimento desse conceito, a professora entregou folhas de papel quadriculado e esclareceu que o metro quadrado, corresponde a uma medida de área. Assim, saber o *tamanho* quadro ou da capa do caderno, por exemplo, corresponde a saber quantos metros quadrados tem esses objetos. Cada metro quadrado corresponde a um *quadradrinho* como na figura 24.

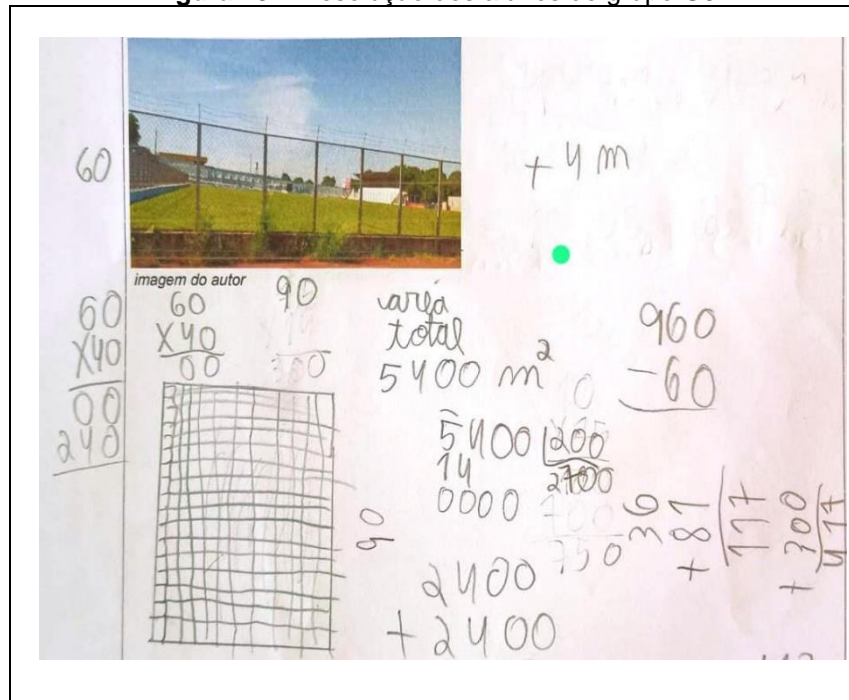
Figura 24 – Representação de m^2 em malha quadriculada



Fonte: construído pela autora (2022).

Parece ter se clareado para os alunos, o que significa *metro quadrado* uma vez que o Grupo G3, na sua resolução, fez uma tentativa de construir uma malha quadriculada (Figura 25).

Figura 25 – Resolução dos alunos do grupo G3



Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G3 (2022).

5.4 ATIVIDADE 4 – DESCOBRINDO O NÚMERO DO CALÇADO

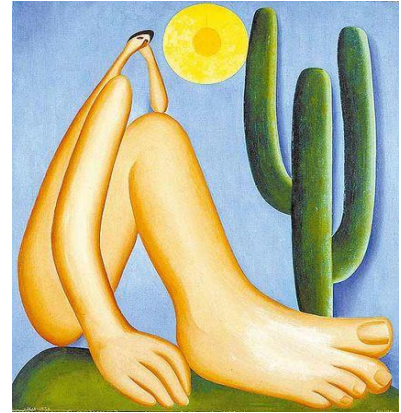
Esta atividade se configura, relativamente à sequência de atividades de modelagem matemática, como atividade de acompanhamento. Os alunos já haviam realizado três atividades anteriores e já tinham certa autonomia para lidar com os instrumentos de medida e realizar as medições necessárias em cada atividade.

Para introduzir a situação a ser estudada, a professora propôs uma roda de conversa na sala de aula envolvendo todos os alunos que teve origem com a leitura do texto do Quadro 6 e de outras ideias dos alunos relativamente à obra de arte Abaporu.

Quadro 5 – Descobrimo o número do calçado**DESCOBRINDO O NÚMERO DO CALÇADO**

Essa obra chama-se *Abaporu* e foi pintada pela artista brasileira Tarsila do Amaral.

Na imagem, vemos que a artista tenta chamar nossa atenção para o tamanho do pé. Vocês sabem como podemos determinar o número de um calçado a partir da medida do pé?



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Abaporu>.

Fonte: as autoras (2022).

Para iniciar a atividade foi entregue uma folha contendo as informações conforme o Quadro 6 e os alunos formaram os grupos, mantendo os integrantes como nas atividades anteriores. Além disso, sementes como feijão, arroz e milho também foram distribuídas aos grupos.

Inicialmente, a atenção dos alunos se voltou à falta de proporção entre o tamanho do pé e o tamanho da cabeça que pode ser observada na figura relativa à obra *Abaporu*. Havia nos alunos, uma intenção de *explicar* porque essa desproporção era evidenciada pela autora da obra.

Entretanto, a professora acenou que trabalhos de arte podem não ter uma associação com a realidade e obras *abstratas* são recorrentes. A imagem seria apenas uma motivação para produzir as possibilidades de associação entre o tamanho do pé e o número do calçado. Assim, inicialmente aspectos históricos, conforme sugere o Quadro 7, foram abordados relativamente à numeração de calçados e ao número do pé.

Quadro 6 – Informações históricas sobre a numeração do calçado

Segundo reportagem da revista Superinteressante de 31 de julho de 2004, a história da numeração do sapato se iniciou com um decreto do rei Eduardo I, da Inglaterra, no ano de 1305. O decreto estabelecia que uma polegada fosse considerada a medida de 3 grãos secos de cevada alinhados. Hoje sabe-se que uma polegada equivale a 2,54 centímetros. Os sapateiros ingleses se entusiasmaram com a ideia e passaram a fabricar, pela primeira vez na Europa, sapatos com *tamanho padrão*, baseando-se nos tais grãos de cevada. Um calçado que medisse, por exemplo, 37 grãos de cevada era identificado como sendo de tamanho 37. Isso facilitou a vida dos fabricantes e dos fregueses que, antes da padronização, precisavam provar várias vezes o sapato até que ele ficasse pronto. Mas não basta enfileirar grãos de cevada para conferir o número do calçado para seus pés! Durante a revolução industrial, os países europeus decidiram padronizar o tamanho do grão

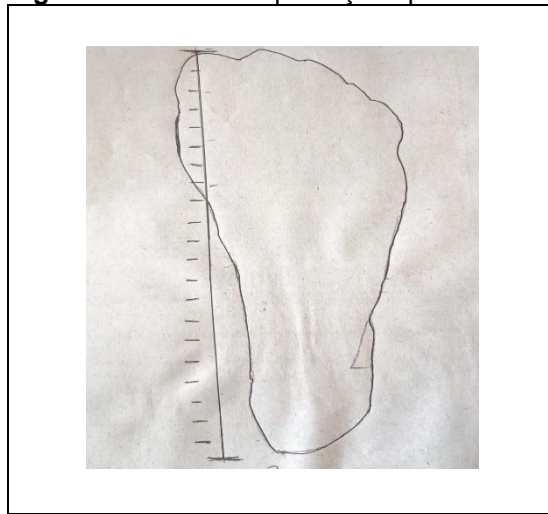
e o transformaram em uma unidade métrica chamada *ponto*, mantendo-se até hoje essa padronização. No entanto, o tamanho desse ponto varia de um lugar para outro e é por isso que a numeração muda de acordo com o local. O ponto francês, que é adotado pelo Brasil e na Europa em geral, tem dois terços de um centímetro (0,666 centímetro). Os Estados Unidos utilizam o ponto inglês. Por isso, o formato dos sapatos norte-americanos é mais comprido.

Fonte: adaptado de <https://super.abril.com.br/comportamento/como-se-mede-o-numero-de-sapato/>.

A partir da apresentação desses aspectos aos alunos, a professora definiu juntamente com os cinco grupos o problema: Como podemos saber o número do calçado a partir do tamanho do pé?

Inicialmente, em cada grupo um dos alunos traçou um *molde* do pé conforme ilustra a Figura 26.

Figura 26 – Molde do pé traçado pelos alunos



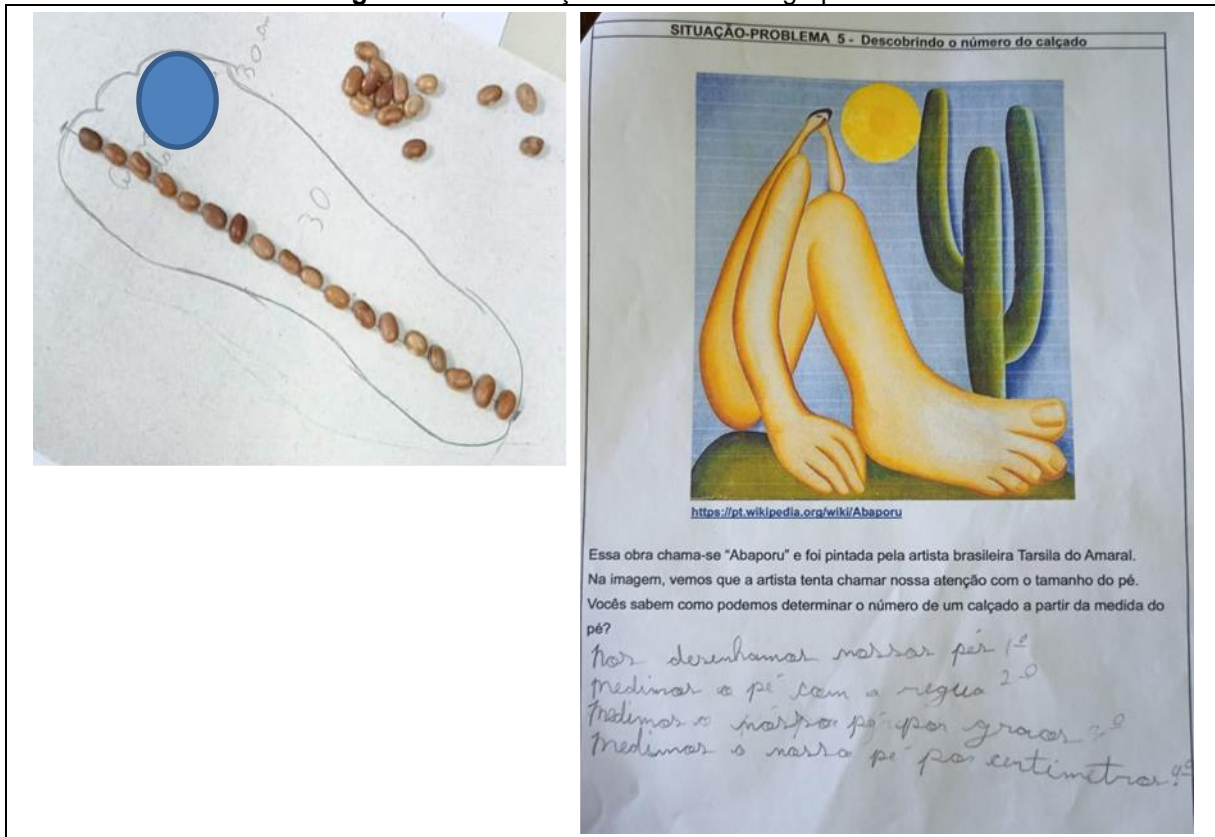
Fonte: Registro dos alunos (2022).

Embora em pesquisas na internet, usando seus telefones celulares, os alunos tenham encontrado relações do tamanho de um grão de cevada com outras unidades de medida como centímetros e metros, por exemplo, já sabiam que um grão de cevada corresponde a, aproximadamente, 0,84cm a partir dos dados apresentados pela professora conforme consta no Quadro 7. Não encontraram, entretanto, relações com as sementes que possuíam como o feijão, o milho e o milho de pipoca.

A partir da orientação da professora, os alunos mediram o comprimento do pé (com a régua). A partir disso, nos grupos, diferentes estratégias foram realizadas usando as sementes disponíveis.

Os alunos do grupo G2 iniciaram sua atividade, preenchendo a linha central da imagem do pé com grãos de feijão (Figura 27).

Figura 27 – Resolução dos alunos do grupo G2



Fonte: registro escrito dos alunos do grupo G2 (2022).

Inicialmente a tentativa (hipótese) foi obter o tamanho do calçado usando grãos de feijão. No entanto, considerando o tamanho do grão, o grupo discutiu sobre a disposição dos mesmos:

A3: Acho que tem que colocar os grãos todos em pé, porque se não fizer isso, vai dar errado, porque os feijões são muito grandes.

Decidiram então, usar outro grão, o arroz uma vez que o tamanho dos grãos seria mais próximo do tamanho dos grãos de cevada.

A1: Gente, já vamos colocar o arroz porque para ver se dá certo!

Considerando, então, que o tamanho de um grão de feijão corresponde ao tamanho de dois grãos de arroz, e que colocaram 18 grãos de feijão, colocaram 36 grãos de arroz. Assim, o número do calçado, usando a regra definida pelo rei, seria 36.

Os alunos do grupo G3, usando o contorno do pé de um aluno e medindo-o com a régua, também constatou que os grãos de feijão seriam muito grandes se comparados aos grãos de cevada. Tentaram várias hipóteses, mas

acabaram optando em usar o comprimento do pé medido em centímetros (23cm) e dividiram por 0,66, o ponto francês, usado no Brasil, conforme sugerem as informações do Quadro 7. Assim, concluíram que o tamanho do calçado seria 35, porque aproximaram o valor decimal obtido na divisão (Figura 28).

Figura 28 – Resolução dos alunos do grupo G3

SITUAÇÃO-PROBLEMA 5 - Descobrimo o número do calçado

<https://pt.wikipedia.org/wiki/Abaporu>

Essa obra chama-se "Abaporu" e foi pintada pela artista brasileira Tarsila do Amaral. Na imagem, vemos que a artista tenta chamar nossa atenção com o tamanho do pé. Vocês sabem como podemos determinar o número de um calçado a partir da medida do pé?

1º desenhamos o pé no papel
2º medimos as partes
3º tiramos a conclusão

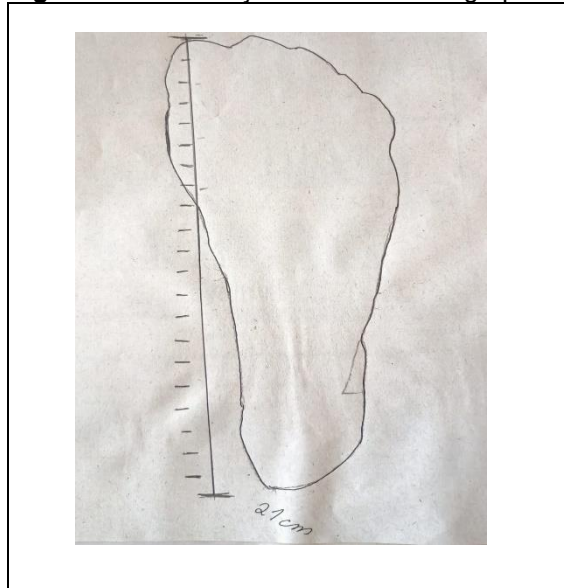
23

o feijão é muito grande

35

Fonte: registro escrito dos alunos do grupo G3 (2022).


No grupo G4 e no G5 não houveram tentativas de usar grãos. Em cada grupo usaram o contorno do pé de um dos alunos do grupo, mediram esse comprimento com a régua e fizeram a divisão por 0,66 considerando a informação do Quadro 7 apresentada pela professora. Na figura 29 está o contorno do pé de G4, que com a medida de 21cm no comprimento do pé conclui que a numeração do calçado é 32, fazendo aproximações decimais. Na Figura 30 está a representação de G5, que usando um pé de comprimento de 20cm chegou a conclusão que o número do calçado da aluna seria 30.

Figura 29 – Resolução dos alunos do grupo G4

Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G4 (2022).

Figura 30 – Resolução dos alunos do grupo G5

SITUAÇÃO-PROBLEMA 5 - Descobrimo o número do calçado

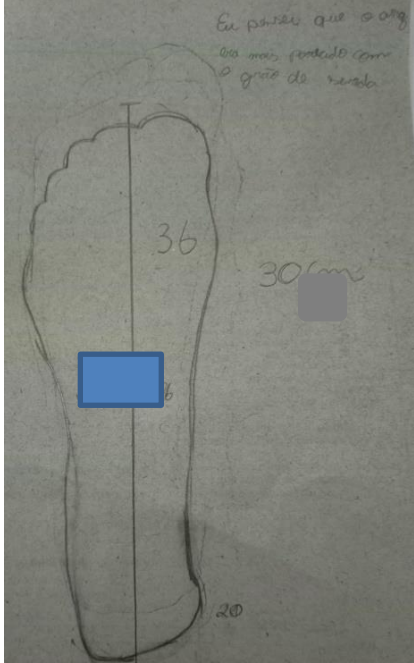


<https://pt.wikipedia.org/wiki/Abaporu>

Essa obra chama-se "Abaporu" e foi pintada pela artista brasileira Tarsila do Amaral. Na imagem, vemos que a artista tenta chamar nossa atenção com o tamanho do pé. Vocês sabem como podemos determinar o número de um calçado a partir da medida do pé?

- 1: alinhamos o pé no papel
- 2: medimos o pé com a régua
- 3: medimos com os grãos
- 4: fizemos a conta de dividir por 0,66 e chegamos a conclusão.

Eu pensei que o pé
do meu pédo com
o grão de arroz



36

30cm

20

Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G5 (2022).

Diferentemente dos alunos do grupo G4, que abandonaram a tentativa de dispor os grãos e contar para chegar à solução do problema, os alunos do grupo G5, dispuseram os grãos de arroz no contorno e também, concomitante, usaram a régua para medir o comprimento do pé, efetuando assim, o método padronizado: dividir o comprimento do pé por 0,66. Obtiveram sucesso em seus resultados durante a validação.

5.4.1 Medidas, medições e as ações dos alunos na atividade 4

Esta atividade proporcionou aos alunos o contato com maneiras de medir pouco convencionais e com um aspecto histórico fundamental para que pudessem encontrar uma resposta para o problema.

Determinar o tamanho do calçado em função do comprimento do pé foi desafiador para os alunos. Por um lado, a história do método usado pelo rei conferiu à atividade uma certa ludicidade. Por outro lado, não ter grãos de cevada gerou a necessidade de realizar medições pouco frequentes, como comparar o tamanho de um grão de feijão com um grão de arroz, por exemplo.

O que se mostrou eficiente nessa atividade foi a forma de lidar com as informações e com o problema. Usar o celular para complementar a busca de dados, comparando as medidas das sementes bem como associar isso com as informações fornecidas (Quadro 6) indica uma forma de lidar com as medidas e com as medições de uma forma pouco convencional.

Entretanto, os alunos também parecem ter se apropriado da ideia de que deveriam dividir as medidas obtidas por 0,66 para se aproximar de uma medida já convencionada e bem posterior às primeiras tentativas de determinar um número de calçado sugeridas pelo rei.

O que se destaca nessa atividade relativamente a como lidam com medidas e medições é possibilidade dos alunos de migrar entre métodos, variando as sementes usadas, reconhecendo o que das informações deveriam usar e a maneira como tentaram apresentar suas respostas.

Os alunos perceberam que, ao se envolver em uma atividade de medidas e medições, devem determinar qual o atributo vai ser medido, eles precisam escolher uma unidade de medida. A unidade deve ter o atributo daquilo que está sendo medido. Comprimento é medido com unidades que têm comprimento, volume com unidades que têm volume e assim por diante. Uma aluna entretanto, parece ainda não ter se apropriado dessa especificidade (Fig 31). Percebe-se pela imagem da figura 31 que a aluna não se apropriou dessa necessidade, uma vez que, para buscar resposta de uma medida linear (o comprimento do pé) parece se valer de uma medição de área (cobrir todo o interior do contorno do pé com grãos) na tentativa de testar suas hipóteses e chegar a uma solução para o problema proposto. Nesse momento, houve a intervenção da professora, que esclareceu o conceito de comprimento para a aluna.

Figura 31 – Resolução dos alunos do grupo G1



Fonte: Resolução dos alunos do grupo G1 (2022).

5.5 ATIVIDADE 5 – O ESTACIONAMENTO DA ESCOLA

Na quinta atividade da sequência, uma atividade de acompanhamento, a professora em conjunto com os alunos definiram pelo estudo de uma situação-problema da realidade vivenciada na escola e o desenvolvimento da sequência de atividades pôde oferecer oportunidades para os alunos vivenciarem atividades diferenciadas envolvendo conceitos geométricos relacionados a sua realidade bem como estabeleceu vínculo real por meio de um problema real vivenciado pelos alunos diariamente bem como proporcionou a pesquisa em sites da internet e o uso de recurso tecnológico como a calculadora e o telefone celular com fins específicos na sala de aula.

Para o desenvolvimento da atividade, inicialmente a situação problema foi discutida com todos os alunos, e na sequência com a finalidade de organizar a coleta de dados e informações sobre o estacionamento, os alunos divididos em cinco grupos, G1, G2, G3, G4 e G5, foram junto com a professora visitar o local (Figura 33).

Já pensando em como coletar dados, os alunos definiram a trena como instrumento de medida mais adequado para coleta de medidas maiores, pois já haviam utilizado na atividade do estádio.

Figura 32 – Foto do Estacionamento da escola



Fonte: acervo das autoras (2022).

No desenvolvimento da aula, a introdução da notação científica e o significado associado ao quadrado de um número foi explorado com os alunos. Neste contexto, a atividade proporcionou a introdução de novos conceitos matemáticos, bem como seu uso a partir de uma situação-problema.

Na realização da atividade os alunos deveriam realizar suposições para resolver três problemas pertinentes ao estacionamento: como organizar as marcações no espaço do terreno de modo a abrigar carros e moto; quantos carros o estacionamento pode comportar e, se é possível vagas para motos.

Para a descrição da atividade em cada grupo, trazemos o modo como os alunos formularam essas suposições, falas dos alunos que sinalizam a atividade de cada grupo e o modo como usaram as medidas realizadas para resolver o problema.

No desenvolvimento da atividade pelos alunos do grupo G1, eles iniciaram elegendo a trena como instrumento viável para realizar a medição, as medidas do terreno encontradas pelos alunos foram de 12m de largura por 25m de comprimento.

A professora os lembrou do espaço para a manobra e decidiram medindo a largura de um dos carros, que 5m seria ideal para realizar a manobra, espaço que ocuparia o centro do estacionamento.

Também foi medido um carro popular com uma abertura suficiente da porta que culminou em uma medida de 3,25m de largura por 2,50m de comprimento.

Com as medidas em mãos, em sala de aula foi realizado uma roda de conversas sobre leis de trânsito existentes no Brasil que destinam 5% de vagas para idosos e 2% para pessoas com deficiência. Foi discutida a importância em desenvolver empatia e obedecer a lei que penaliza quem não as respeita.

Assim, deram continuidade ao desenvolvimento da atividade e após a inteiração em sala, em posse das medidas, a professora distribuiu as folhas das atividades com a seguinte problematização: Quantos carros cabem no estacionamento? Nesse instante deu-se início à matematização, segunda fase proposta por Almeida, Silva e Vertuan (2016).

Os alunos do grupo G1 compreenderam que deveriam encontrar a área total do estacionamento e a área de corredor para as manobras. Também pontuaram a necessidade em medir um carro popular. Para isso, propuseram:

A3: Professora, podemos voltar ao estacionamento para medirmos um carro?

Novamente os alunos se dirigiram até o estacionamento e mediram um carro popular, cujas medidas foram de 3,25m de comprimento por 2,50m de largura, totalizando, por meio de uma multiplicação, o valor de 8m^2 , aproximadamente, atribuído à área (espaço) ocupada por um carro popular. Os alunos em seguida por meio da multiplicação calcularam a medida do terreno equivalente a 300m^2 . Ainda, como vemos na foto (Figura 34), calcularam o espaço do corredor que deveria ser deixado p manobra por meio de uma multiplicação, cujo produto foi de 125m^2 .

Figura 33 – Resolução dos alunos do grupo G1

SITUAÇÃO-PROBLEMA 4 – O estacionamento da escola

A Escola Municipal Santa Inês que está nos acolhendo enquanto nossa escola passa por reformas, possui o estacionamento de carros dos professores. Atualmente não há demarcações no chão que indicam onde os carros devem estacionar.

Os problemas que nos interessam estudar são:

- Como as marcações podem ser realizadas para organizar o espaço?
- Quantos carros cabem no estacionamento?
- Haverão vagas para motos?

imagem do autor

largura = 12
comprimento = 25
perímetro = 74
área = 300 m²

12
x 25
60
24
300

Manubra = 25 m x 5 m

Manubras = 10

SITUAÇÃO-PROBLEMA 4 – O estacionamento da escola

A Escola Municipal Santa Inês que está nos acolhendo enquanto nossa escola passa por reformas, possui o estacionamento de carros dos professores. Atualmente não há demarcações no chão que indicam onde os carros devem estacionar.

Os problemas que nos interessam estudar são:

- Como as marcações podem ser realizadas para organizar o espaço?
- Quantos carros cabem no estacionamento?
- Haverão vagas para motos?

imagem do autor

largura 12 m
comprimento 25 m
A.C. = 3,25 m x 2,50 m
C.T. = 25 m x 12 m
Manubra = 25 m x 5 m
Área TOTAL = 175

175 | 8
15 21 25
7 x 5
 125 m²

12
x 25
60
240
300 m²

300
- 125
175 m²

3,25
x 25
16,25
65,00
81,25

175
- 125
050

Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G1 (2022).

De posse de todas as medidas, diante de uma subtração, encontraram a área restante de 175 m² e dividiram pela área do carro, 8m² encontrando o quociente 21, ou seja, 21 carros.

No grupo G1, os alunos conseguiram validar e chegar a solução para o problema, que foi o total de 21 carros. Podemos constatar com a fala dos alunos:

A1: Nossa! Vou colocar 10 de cada lado!

A2: Deu 21. Mas, e as motos?

A1: A gente deixa uma vaga que vai sobrar, para colocar as motos.

Entre os alunos do grupo G1, pudemos constatar também, que na tentativa de resolver o problema proposto, organizar o estacionamento da escola, os alunos ainda confundiam área com perímetro: “Tia, é igual do estádio que fizemos ou igual perímetro que a professora ensinou no livro?”. Algo que ainda não havia ficado claro para eles, visto que o perímetro é a medida dos lados de uma figura e a área

mede toda a sua superfície (sobreposição). Neste momento a professora entrevistou explicando-lhes e os alunos puderam dar continuidade ao desenvolvimento da atividade. Ficou combinado que ao término da sequência das cinco atividades, iriam até o estacionamento para concretizar as medições do perímetro, bem como medições de outros espaços da escola já que os alunos disseram que haviam estudado somente no livro didático.

A1 do G1: Tia, do jeito que você tá fazendo é mais fácil pra entender porque a gente vai lá e vê.

A fala sinaliza a atribuição de sentidos ao conceito de medidas e medições para além do uso corriqueiro em sala de aula com malhas quadriculadas e caderno, bem como do uso dos conceitos em uma situação-problema real.

Os alunos do grupo G2 realizaram o procedimento parecido com o G1, encontraram a área do estacionamento, a área do corredor para manobras e o espaço necessário destinado a cada carro, como sinalizado no diálogo da aluna A2 com a professora:

A2: Tia, eu não sei fazer essa continha, mas minha colega fez e sobraram 7 de resto. O que dá prá fazer?

Prof.: O carro é um objeto inteiro? Então vamos considerar o número inteiro. O que acham?

A2: Eu acho que deve aproximar para 20 e não ficar muito apertado. Colocamos 10 de cada lado e quem quiser usa uma vaga do carro para pôr moto.

Figura 34 – Resolução dos alunos do grupo G2

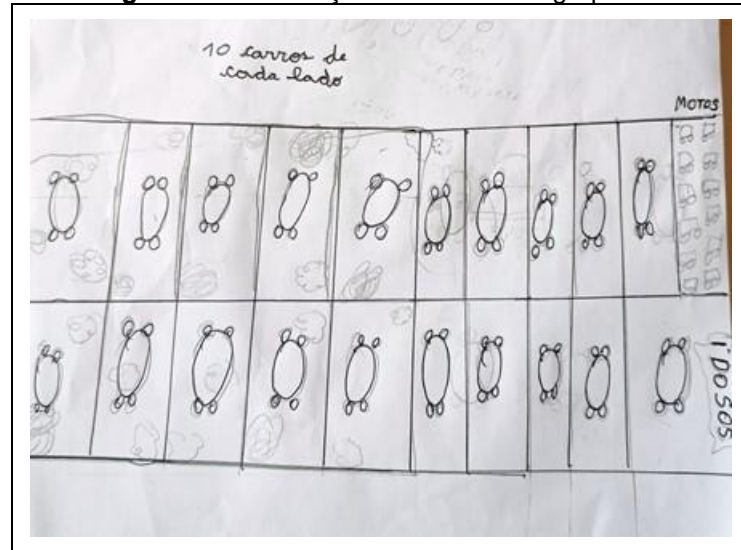
Handwritten mathematical work on lined paper showing calculations for area and perimeter. The work includes:

- $Largura = 12m$
- $Comprimento = 25m$
- $Área\ 3025 + 915\ (carros\ e\ pontos)\ 8m$
- $A + 25m \times 12m = 300m$
- $5m\ (carros)\ 25 \times 5 = 125m$
- $175m$
- A green circle highlights the final result $175m$ and the text "21 carros".

Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G2; grifo nosso, o colorido (2022).

A mesma aluna A2, apesar de não saber realizar a divisão, sugere em sua fala, uma forma de resolver o problema relacionado às vagas para motos, que surgiu durante o desenvolvimento da atividade. A Figura 36 apresenta os registros dos alunos deste grupo, por meio de um desenho na tentativa de interpretação de resultados e validação de sua resposta.

Figura 35 – Resolução dos alunos do grupo G2



Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G2 (2022).

O cuidado em compartilhar uma vaga de carros com as motos, também foi apresentada pelos alunos do grupo G2, bem como uma vaga para idosos. Houve tratativas no grupo do tipo:

A: “Gente, nem precisa de vagas para idosos, aqui só tem professora e professora não é idosa. E moto, só tem duas professoras que têm moto, pouco espaço dá certo!”


Com relação aos procedimentos utilizados pelos alunos do grupo G3, para passar da situação inicial para a situação final durante o desenvolvimento da atividade, constatamos na figura (Figura 36) que o grupo desenvolveu procedimentos parecidos aos grupos anteriores citados. Encontraram as medidas do estacionamento, as medidas do corredor para manobras, bem como o tamanho do carro. Mediante a área que havia sobrado, por meio de uma divisão, chegaram a quantidade de vagas, ou seja, 21 vagas (Figura 37).

Figura 36 – Resolução dos alunos do grupo G3

grupo 3

SITUAÇÃO-PROBLEMA 4 – O estacionamento da escola

A Escola Municipal Santa Inês que está nos acolhendo enquanto nossa escola passa por reformas, possui o estacionamento de carros dos professores. Atualmente não há demarcações no chão que indicam onde os carros devem estacionar.



Os problemas que nos interessam estudar são:

- Como as marcações podem ser realizadas para organizar o espaço?
- Quantos carros cabem no estacionamento?
- Haverão vagas para motos?

imagem do autor

Largura 12 m e comprimento 25 m

$$Ac = 3,25 \times 2,50 = 8 \text{ m}$$

$$At = 25 \times 12 = 300 \text{ m}^2$$

$$5 \text{ m de manobra} = 25 \times 5 = 125 \text{ m}^2$$

deixar 175 m quadradas

$$\begin{array}{r} 300 \\ - 125 \\ \hline 175 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 175 \overline{) 300} \\ \underline{150} \\ 150 \\ \underline{150} \\ 0 \end{array}$$

Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G3 (2022).

Neste grupo, os alunos a partir das medidas obtidas do estacionamento e do carro popular utilizam das operações de divisão e multiplicação para obter o número de vagas. Não há em seus registros, diferente dos demais grupos, menção a reserva de espaços para motos.

Os alunos do grupo também não registraram respostas para as perguntas colocadas na situação-problema (veja na Figura 37).

Um aspecto relevante neste grupo G3, foi perceber como os alunos lidaram com as nomenclaturas e abreviações, metro e metro quadrado como vemos na tentativa de resolução realizada. Ora o expoente está sobre a letra m, ora sobre o numeral. Talvez o fato ocorra por ainda não estarem familiarizados com a notação.

No desenvolvimento da aula, a introdução da notação científica e o significado associado ao quadrado de um número foi explorado com os alunos. Neste

conseguiram chegar com êxito a uma resposta para o problema. Multiplicaram a largura do terreno pelo comprimento e obtiveram 300 m^2 . Vemos no registro que apresentam dúvidas e colocam vírgula no produto encontrado que passa de 300 para $30,0 \text{ m}^2$. Após, abandonam a vírgula quando realizam uma subtração pela área do corredor (125 m^2) de manobras (Figura 39).

Figura 38 – Resolução dos alunos do grupo G5

SITUAÇÃO-PROBLEMA 4 – O estacionamento da escola

A Escola Municipal Santa Inês que está nos acolhendo enquanto nossa escola passa por reformas, possui o estacionamento de carros dos professores. Atualmente não há demarcações no chão que indicam onde os carros devem estacionar.

Os problemas que nos interessam estudar são:

- Como as marcações podem ser realizadas para organizar o espaço?
- Quantos carros cabem no estacionamento?
- Haverão vagas para motos?

Handwritten calculations and notes:

- Handwritten: $300 - 3,50 = 296,50$
- Handwritten: 21 Carros
- Handwritten: $25 \times 5 \text{ m} = 125 \text{ m}^2$ (labeled "manobra")
- Handwritten: $25 \times 12 \text{ m} = 300 \text{ m}^2$ (labeled "terreno")
- Handwritten: $300 - 125 = 175$
- Handwritten: $3,25 \times 2,5 = 8,125$
- Handwritten: $8,125 \times 8 = 65$
- Handwritten: $300 - 125 = 175$
- Handwritten: 175 m^2 (labeled "Sobro")
- Handwritten: $25 \times 12 = 300 \text{ m}^2$ (labeled "Comprimento 25 largura 12")
- Handwritten: $3,25 \text{ m} \times 2,5 \text{ m} = 8,125$ (labeled "Carro")
- Handwritten: 175 m^2 (labeled "T")

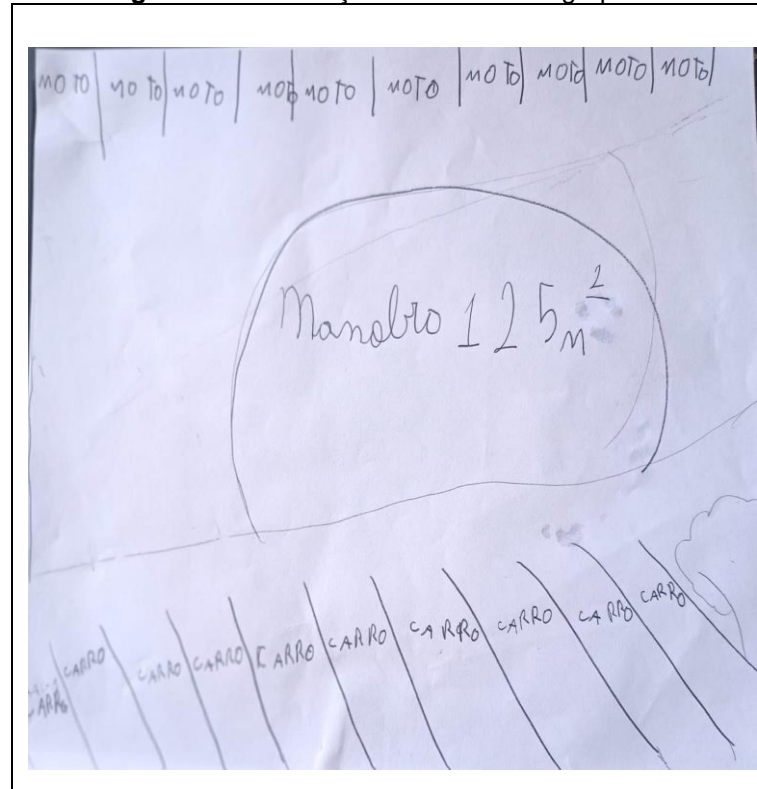
Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G5 (2022).

A aluna A2 do grupo G5, propôs que deixassem um lado somente para carros e o outro lado somente para estacionar motos. Temos no desenho, a ideia de modelo apresentada, ou seja, a solução encontrada para o problema, associado a uma representação, nesse caso, o desenho utilizado pelos alunos nessa etapa dos anos iniciais do Ensino Fundamental (Figura 40). No entanto, em discussão, a ideia foi refutada pelo grupo pois, nas falas, argumentam:

A2: Pessoal, vamos deixar o lado de lá só pra motos e o lado de cá para os carros! O que acham?

A4: Não vai dar. Aqui na nossa escola tem mais professoras que dirigem carros do que motos, tem que deixar mais vagas pra carro!

Figura 39 – Resolução dos alunos do grupo G5



Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G5 (2022).

Os alunos do grupo G5 não realizaram a divisão da área que sobrou com relação ao espaço ocupado pelo carro, no papel, porém utilizaram a calculadora. Quando questionados responderam que a calculadora “deixa mais fácil” para pensar na resposta mas quase nunca podem utilizar na sala de aula.

A professora entrevistou e explicou que a calculadora é uma ferramenta necessária que precisam ter liberdade em manusear mas, também precisariam compreender o procedimento realizado da forma convencional, no papel como estão habituados. Após insistência do grupo, a professora prometeu que viria mais vezes realizar outras atividades com eles para que tivessem a liberdade de utilizar a calculadora. Sobre o uso da calculadora e a realização de atividades dessa natureza os alunos comentaram:

A2: Eu gostei de usar calculadora nesses trabalhos com você, tia! Conte na minha casa que a calculadora era pra fazer tarefinha legal e que você levava a gente para ver primeiro e não fazia no caderno nem no livro!

A5: Tia, fala pra nossa professora dar esses trabalhinhos de medir as coisas prá gente!

Houve após a discussão, a socialização da atividade na frente da sala de todos os grupos para a turma e uma fala relevante de um dos alunos do grupo G4:

A3: Tia, a gente pode falar com a diretora dessa escola e mostrar pra ela que dá para arrumar o estacionamento para caber mais carros?

A professora, pesquisadora, prometeu marcar um horário para falarem com a diretora futuramente, bem como agendar um dia e voltar na sala desta turma para saírem medir área e perímetro com a trena em diferentes ambientes da escola.

5.5.1 Medidas, medições e as ações dos alunos na atividade 5

Esta atividade se deu por meio da observação diária que os alunos tiveram com relação a se depararem todos os dias, com a realidade dos professores estacionando seus carros na rua, em frente à escola, devido a desorganização no único estacionamento neste local, com ausência de demarcações.

Os alunos familiarizados com os instrumentos de medições que a sequência de atividades desenvolvida proporcionou, como os convencionais: trenas, régua, fita métrica, bem como por instrumentos não convencionais: moldes confeccionados por eles, grãos, o próprio dedo, foram com a professora, medir a área do estacionamento.

Este primeiro momento da atividade de modelagem, desde a definição do tema e delimitação do problema, colocou os alunos na inteiração com informações e necessidades requeridas pela situação-problema sob investigação.

Dentro da sequência de atividades, a atividade de acompanhamento auxiliou os alunos na organicidade de uma situação-problema, e também em sua estruturação, bem como no desenvolvimento e formulação de hipóteses.

Em relação às medidas e medições a atividade de acompanhamento permitiu que os alunos, para além do reconhecimento de instrumentos de medida, que tivessem a consciência de seu uso em diferentes situações, como por exemplo, qual o mais adequado para coleta de dados no estacionamento da escola.

Após eleita a trena o instrumento viável para realizar a medição, as

medidas do terreno encontradas pelos alunos foram de 12m de largura por 25m de comprimento. O que fazer com estes dados de modo a dividir as vagas no terreno se colocou como um novo desafio. O conceito de medidas de área bem como as unidades de medida padronizadas, já vistas na unidade anterior entram novamente em cena para aplicação da matemática em uma situação real.

De modo a definir os espaços para vagas de carros ou motos os alunos iniciaram a ação de formulação de hipóteses. Foram considerados carros, motos e o espaço necessário para manobras. Em alguns grupos foram também discutidas as vagas para idosos e a necessidade dessas vagas considerando o público da escola.

A professora os lembrou do espaço para a manobra e decidiram, medindo a largura de um dos carros, que 5m de largura seria ideal para realizar a manobra, espaço que ocuparia o centro do estacionamento.

Como padrão, os alunos realizaram a medição de um carro popular com uma abertura suficiente da porta, sendo a medida de 3,25m de largura por 2,50m de comprimento.

Com as medidas em mãos, em sala de aula foi realizado uma roda de conversas sobre leis de trânsito existentes no Brasil que destinam 5% de vagas para idosos e 2% para pessoas com deficiência. Foi discutida a importância em desenvolver empatia e obedecer a lei que penaliza quem não as respeita, bem como as implicações dessa regulamentação para a solução da atividade.

Neste sentido, a atividade de modelagem matemática proporcionou o surgimento de assuntos relacionados a conteúdos que, necessariamente não estejam sendo trabalhados naquele momento em sala de aula, intra e extra matemáticos.

Assim, demos continuidade ao desenvolvimento da atividade e após a inteiração e matematização, no espaço da sala de aula, em posse das medições realizadas, a professora formalizou com os alunos o problema: Quantos carros cabem no estacionamento?

De modo geral, todos os cinco grupos de alunos tentaram resolver pelo uso das quatro operações matemáticas, procedendo ao cálculo da área do terreno e de quantas vagas para um carro popular cabem nessa medida de área calculada.

Neste contexto, o conceito de medida de área é confundido com o

conceito de perímetro (Grupo 1) bem como o uso de unidades de medidas padronizadas (Grupo 3).

Para auxiliar na demarcação das 21 vagas e na possibilidade de vagas para motos, bem como do local adequado para vagas de idosos os alunos recorrem a representações do estacionamento (Grupo 2), articulando o espaço da área e as divisões já obtidas no modelo aritmético (Figura 36).

Essa interlocução entre as representações facilita também na ação de validação dos cálculos, bem como em um modo de reconhecer a medida da área a partir do desenho do estacionamento.

Enquanto realizava o desenho, a professora pesquisadora ouviu no grupo a aluna dizer:

A: “Gente, meu avô tem cartão de idoso para estacionar. Já está velhinho, se precisar ficar disputando vaga com alguém mais novo, vai demorar prá achar lugar, porque ele dirige devagar!”

Essa reflexão denota a necessidade de articular ao estacionamento o atendimento as demandas da escola e da sociedade.

Ao longo do desenvolvimento dessa atividade, os alunos foram levados a perceber a importância dos conteúdos de Geometria para resolver um problema real. Puderam compreender que, por meio de medidas e medições eles podem, dentro da Matemática, contribuir para melhorar um problema da comunidade escolar que envolve pessoas do convívio, neste caso, os professores.

6 ANÁLISE GLOBAL E RESULTADOS

A investigação de como os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental lidam com medidas e medições em atividades de modelagem matemática vem subsidiada pela análise de cada uma das cinco atividades desenvolvidas pelos alunos.

Considerar a perspectiva de Lesh et al. (2010) relativamente às sequências de modelagem e seu potencial para a abordagem do conteúdo medidas e medições foi uma alternativa bem sucedida, considerando particularidades dessa abordagem em cada uma das cinco atividades.

As atividades de aquecimento com as temáticas Como determinar alturas? e É possível medir a beleza de uma pessoa? introduziram os alunos, tanto nos procedimentos requeridos em cada uma das fases da modelagem matemática quanto no manuseio de instrumentos de medida e na realização de medições.

Determinar a medida da altura da árvore usando a medida da professora foi uma ação que, por um todo, possibilitou aos alunos lidar com instrumentos de medida reconhecidos como régua e fita métrica. Por outro lado, estes não foram adequados para o que essa medição requer: o uso de proporções.

Construir uma ferramenta, (um molde de cartolina) foi o que proporcionou aos alunos obter a altura da árvore. Com esse instrumento, uma ideia intuitiva de medida apontada em Walle (2009) foi o que viabilizou construir a resposta. “Quantas vezes cabe” é o significado de medir nessa atividade.

Lidar com pequenas sobras e com números decimais foi o essencial para construir o que na atividade pode ser um modelo matemático: a medição mediada pelo segmento de cartolina e a soma das partes (para alguns grupos) ou o produto das partes (para outros grupos).

Na atividade relativa à caracterização da beleza em uma pessoa, a medição de diferentes partes e a razão entre as medidas obtidas foi a matematização empreendida pelos grupos. Neste caso, reconhecer que o que seria o “padrão” de beleza esperado, era um valor fixo esperado para essa razão foi a “matemática nova” que os alunos aprenderam. Sim, existe um número em matemática que é especial: o número de ouro. O número irracional $1,618 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ era o valor esperado em cada razão realizada pelos alunos.

Os alunos, entretanto, deram menos importância ao valor em si do que aos procedimentos necessários para obtê-lo. Ou seja, foi a ação de fazer modelagem, de lidar com o que a obtenção da resposta requer que foi, para esses alunos, mais importante do que a própria resposta. Os modelos matemáticos têm mais a função de expressar o que alunos fazem na atividade do que de indicar uma previsão para uso futuro. O uso da tecnologia (calculadoras) deu suporte às operações com números decimais com os quais os alunos ainda não estavam familiarizados.

Para as atividades referidas como “atividades de acompanhamento” na sequência em que se envolveram os alunos o ponto essencial era: realizar medições *in loco*, tirar medidas e lidar com elas para construir uma solução para uma questão de interesse. Neste sentido, os alunos avançaram em termos de construção, de definição de hipótese de usos de novos instrumentos.

Na atividade do número do calçado, a imagem inicial não trouxe informação sobre o que os alunos deveriam fazer na atividade. Entretanto, serviu como “mote” para que os alunos se interessassem em estudar como o tamanho do pé e o número do calçado se relacionam.

Os aspectos históricos foram o elemento que orientou a matematização, e cada grupo estabeleceu estratégias mediadas por medições que realizaram dos pés e da alocação de sementes, conforme esses princípios históricos.

A determinação da quantidade de grama para a reforma da área gramada de um estádio foi mediada por medições que os alunos realizaram.

Entretanto, a introdução de uma medida de superfície, o “metro quadrado”, foi o aspecto em que mais os alunos se “superaram”. Ou seja, neste caso, o fazer modelagem foi menos focado pelos alunos do que os conceitos matemáticos requeridos.

Finalmente, na atividade da configuração de um estacionamento, embora os alunos não tenham chegado a modelos matemáticos, robustos, tiveram bons insights para a realização das medições e consideraram que espaço para motos e para carros tem especificidades. Neste caso, diferentes dimensões da aprendizagem geométrica apontadas em Brito e Almeida (2022) foram relevantes. As habilidades de medição, de explicação e de tomada de decisão, embora não expressamente referidas, são subjacentes aos “ensaios” dos alunos para modelar um estacionamento na escola.

O desenvolvimento da sequência de atividades, pôde oferecer oportunidades para os alunos vivenciarem atividades diferenciadas envolvendo conceitos geométricos relacionados com a sua realidade bem como estabeleceu interdisciplinaridade com outras disciplinas como Geografia e Arte, bem como proporcionou a pesquisa meios como *sites* da internet e o uso de recursos tecnológicos como a calculadora e o telefone celular com fins específicos na sala de aula.

Em termos gerais, o uso de instrumentos de medidas, e a realização de medições com finalidades específicas se deu como ilustrado na Tabela 1. Além disso, também elencamos os conteúdos matemáticos que, em cada atividade, se associaram ao ato de medir e a sua finalidade em cada atividade de modelagem matemática.

Quadro 7 – Atividades desenvolvidas pelos alunos

ATIVIDADES	ESTÁGIO DA SEQUÊNCIA	INSTRUMENTOS DE MEDIDA	O QUE MEDIRAM?	PAPEL DA MEDIÇÃO	CONCEITOS MATEMÁTICOS USADOS
Como determinar alturas?	Aquecimento	Réguas, moldes de cartolina	Altura da professora	Fornecer informações e possibilidade de lidar com proporções ² .	Unidades de medida convencionais: metro, centímetro, proporção, razão e operação com números decimais
É possível medir a beleza de uma pessoa?	Aquecimento	Réguas e fitas métrica	Partes do corpo e altura dos alunos	Entender como a razão entre medidas pode se aproximar de um valor constante: o número de ouro.	Razão e operação com números decimais
A reforma do estádio	Acompanhamento	Trenas	A região gramada do estádio	Fornecer informações para lidar com medidas lineares (metro e centímetro) e com medidas de superfície (metro quadrado)	Medida de área
Descobrimo	Acompanhamento	Grãos	Os pés dos	Associar sistema de medição antigos com os	Unidades de medida não-convencionais; divisão de

² Também pode-se pensar na questão de algo que não pode ser medido diretamente com o auxílio de um instrumento de medida.

o número do calçado			alunos	atualmente disponíveis para conhecer o número do calçado.	decimais
O estacionamento da escola	Acompanhamento	Trenas	A região em que se localiza um estacionamento	Organizar a distribuição do espaço necessário para um estacionamento.	Medida de área; comparação de áreas

Fonte: elaborado pelas autoras (2022).

Nas atividades 1, 3 e 5 os alunos saíram da sala de aula para coletar os dados e tiveram participação ativa em todas as etapas de desenvolvimento das atividades, inclusive na escolha do tema nas atividades 3 e 5. Os temas reais que foram problematizados, partiram do interesse e das opiniões dos alunos que se deparavam com o problema da falta de vagas no estacionamento dos professores devido à ausência de demarcações, como também à reforma do estádio que atraía a curiosidade dos alunos que passavam em frente para chegar até a escola.

O sucesso nas atividades dependeu, em parte, da intervenção pedagógica da professora para orientar os alunos e instigá-los a passar da situação inicial para a situação final na modelagem matemática. O professor atuou como mediador, conforme é proposto pela modelagem matemática.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho intitulado “*Modelagem matemática nos anos iniciais: design usando uma sequência de atividades*” busca compreender como os alunos do quarto ano do Ensino Fundamental lidam com medidas e medições em uma sequência de atividades de modelagem matemática.

Por acreditarmos que existam caminhos para melhorar a qualidade do ensino de Matemática e contribuirmos para a formação integral do aluno, abordamos nesta pesquisa, a modelagem matemática entendida como uma alternativa pedagógica de ensino que relaciona situações do dia a dia do aluno a conteúdos matemáticos. Apresentamos a modelagem matemática por meio de uma sequência de atividades desenvolvidas pelos alunos relacionadas a medidas e medições, trabalhados em Geometria.

O trabalho com Geometria na sala de aula assim conduzido representa um ensino de Matemática que não constitui em momento isolado e distinto do mundo real, mas interliga-se a outros campos do conhecimento.

Levando em conta o que foi observado, vimos que a hipótese do nosso trabalho com geometria, de que os alunos são capazes de agregar qualidade e valor à resolução de problemas por meio de uma sequência de atividades de modelagem matemática, se confirmou. Sendo assim, consideramos alcançado o objetivo do trabalho, que visa compreender como os alunos, sujeitos da pesquisa, lidam com medidas e medições em uma sequência de atividades de modelagem matemática.

Ressalto que a pesquisa mostrou que uma sequência de atividades pode orientar e situar o aluno para prosseguir com maior autonomia no desenvolvimento de uma situação-problema. Pudemos comprovar que durante as duas primeiras atividades, os alunos se mostravam mais engessados ou seja, demonstravam pouca habilidade e foi-lhes dada a liberdade de apontar o que ainda não sabiam, por exemplo, usar os instrumentos de medida corretamente e com autonomia. Na medida em que outra atividade da sequência era apresentada, de fato, os alunos iam demonstrando melhor desempenho, o que os motivava para seguir em frente, sempre curiosos em descobrir qual seria a próxima atividade.

Algo que também chamou a atenção foi a liberdade que uma sequência de atividades proporciona ao professor, em buscar outras alternativas

durante as aulas para que o aluno aprenda: utilizamos malhas quadriculadas, para ensinar medida de áreas para os alunos que podem ser pensadas como “régua” de área. Constatamos que uma malha de quadros (quadriculada) para áreas, faz exatamente o que uma régua faz para comprimentos.

Pudemos observar ainda, o fato de que a sequência de atividades proporcionou aos alunos, saírem da sala de aula para buscar concretizar o que haviam aprendido somente no livro didático (observação feita pelos alunos) e também nos mostrou que os encaminhamentos realizados pelo professor têm grande importância sobre o que o aluno faz e como ele faz para aprender.

Com relação aos modelos matemáticos, a pesquisa nos mostrou que podem ser construídos a partir de diferentes representações, tais como gráficos, tabelas e até textos ou imagens, dependendo das especificidades da atividade de modelagem. Tivemos por exemplo, representações de modelos por meio de desenhos, textos escritos e também usando expressões algébricas.

Vale observar que os alunos nos grupos que não conseguiam chegar até a etapa final em que ocorre a validação dos resultados, eram ajudados pelos colegas e participavam da socialização da atividade para o grande grupo na sala de aula, ressaltando a relevância do trabalho em grupo mobilizado em atividades de modelagem matemática.

O que a pesquisa elucida é a possibilidade de um ensino de geometria nos anos iniciais alinhado com a perspectiva de Walle (2004) de que medir é o primeiro passo para proporcionar aprendizagem de medidas.

Por outro lado, a pesquisa também aponta, como já indicam Tortola (2012) e Tortola (2016), entre outros, que a modelagem matemática nos anos iniciais proporciona meios que fomentam o ensino bem como a aprendizagem. Particularmente, a aprendizagem vislumbrada na presente pesquisa diz respeito às medidas e seus usos e aos conteúdos matemáticos que esses usos podem ativar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA L. M. W., A. S. E. R. V. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciências & Educação**, Bauru, n. 22, p. 19-35, 2005.

ALMEIDA, M. L. W.; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem Matemática – Com o que Estamos Lidando: Modelos Diferentes ou Linguagens Diferentes? **Revista Acta Scientiae**. Canoas, RS: ULBRA, v.14, n.2, p. 200-214, maio/ago. 2012. Disponível em: <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/230>. Acesso em: 20 jul. 2020.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, H. C. (2015). A matematização em atividades de modelagem matemática. (The mathematization in mathematical modelling activities.). **Alexandria**, 8(3), 207–227.

ALMEIDA, L. W. da; SILVA, K. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2016.

ALMEIDA, L. M. W., SILVA, K. P. da S.; RAMOS, D. C. (2018). Sobre ensinar e aprender “o fazer” modelagem matemática. In **Anais VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Foz do Iguaçu: Brasil.

ÄRLEBÄCK, J.; DOERR, H. Moving beyond a single modelling activity. In: **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**. Springer International Publishing, p. 293-303, 2015.

ÄRLEBÄCK, J.; DOERR, H. Students' interpretations and reasoning about phenomena with negative rates of change throughout a model development sequence. **ZDM**, v. 50, n. 1-2, p. 187-200, 2018.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: editora contexto, 2009.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. 3. ed. São Paulo: Contexto, v. 2º, 2010.

BASTOS, J. F. **Modelagem Matemática na Educação Básica: uma proposta para a formação inicial dos professores do magistério**. 125 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática - Universidade Estadual do Centro-Oeste, Guarapuava, 2018.

BÍBLIA. Português. **Bíblia Sagrada**. Tradução por João Ferreira de Almeida. Barueri-SP: Sociedade Bíblica do Brasil, 2008. 1664p.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 4ª ed. São Paulo: Contexto, 2005.

_____. **Modelagem no Ensino Fundamental**. Blumenau: Edifurb, 2014.

BLUM, W. (2015). **Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?** In Sung Je Cho, (Ed.) The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (pp. 73-96). New York: Springer.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigações qualitativas em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

BORGES, Marta Maia de Assis. Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental: novas perspectivas. In: **XXV CONADE** - UFG, Goiás, Brasil, 2009

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: Ministério da Educação, 1997.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais: arte**/ Ministério da Educação. Secretária da Educação Fundamental. 3.ed. Brasília: A Secretaria, 2001.

_____. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 2014.

_____. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.

_____. **Base Nacional Comum Curricular**, Brasília, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf. Acesso em: jun. 2019.

BRITO, D. S.; ALMEIDA, L. M. W. Modelagem matemática na socioeducação. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 8, n. 3, p. 196-212, 2014.

BRITO, D. S., ALMEIDA, L. M. W. (2021). Práticas de modelagem matemática e dimensões da aprendizagem da geometria. **Actualidades Investigativas en Educación**, 21(1), 169-198.

BURAK, D. Critérios norteadores para a adoção da Modelagem Matemática no Ensino Fundamental e Secundário. **Zetetiké**. v.2, n. 2, p. 10-27, 1994.

_____. A modelagem matemática e a sala de aula. In: I EPMEM – I Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, 2004. **Anais...** Londrina, 2004.

BURAK, D. Modelagem Matemática nos diferentes níveis de ensino: uma perspectiva. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, 2014. **Anais...** Campo Mourão, 2014.

CARDOSO, V. C.; KATO, L. A.; FRANCO, V. S. **A elaboração de conceitos da Geometria por meio de um modelo para a construção de pipas.** Disponível em: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/920.pdf>. Acesso em: mar. 2023.

CARREIRA, S., BAIÃO, A. M., ALMEIDA, L. M. W. (2020). Mathematical models and meanings by school and university students in a modelling task. **AIEM - Avances de Investigación em Education Matemática**, (17), 67-83.

D'AMBRÓSIO, U. **Da Realidade à Ação: Reflexões sobre Educação Matemática.** Campinas -S. P: Editora da UNICAMP, 1986.

D'AMBROSIO, U. **Transdisciplinaridade.** 2 ed. São Paulo: Palas Athena, 2001

EVES, H., **Geometria: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula.** Geometria Tradução Higinio H Domingues. São Paulo, Atual, 1997.

FAINGUELERNT, E. K.. **Educação matemática: representação e construção em geometria.** Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FERRI, R. B. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education.** Picassoplatz, Switzerland: Springer, p. 13-39, 2018.

FONSECA, M. C. F. R. **Educação matemática de jovens e adultos: especificidades, desafios e contribuições.** Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as na educational task.** Dordrecht: D. Reidel Publishing Co. 1973.

GARBI, G. G.. **A rainha das Ciências.** Um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006

KLÜBER, T. E. (2010). Modelagem Matemática: revisitando aspectos que justificam a sua utilização no ensino. In **Modelagem Matemática uma perspectiva para a Educação Básica.** Ponta Grossa: Editora UEPG, 97-114.

LESH, R.; CRAMER, K.; DOERR, H.; POST, T.; ZAWOJEWSKI, J. Model Development Sequences. In: Richard Lesh & Helen Doerr, (Eds.), **Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching.** Mahwah: Erlbaum, 2003.

LESH, R. Tools, Researchable Issues & Conjectures for investigating what it means to Understand Statistics (or Other Topics) Meaningfully. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 2, p.16 - 48, 2010.

LORENZATO, S. **Educação Infantil e percepção Matemática.** Campinas: Autores Associados, 2008.

LUNA, A. V. A.; SOUZA, E. G.; SANTIAGO, A. R. C. M. A Modelagem Matemática nas Séries Iniciais: o germém da criticidade. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 135-157, jul. 2009.

MAAß, K. Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics classes: results of an empirical study. **Teaching Mathematics and Its Application**, v 24, n. 2-3, p. 61-74, 2005.

MENDES, T. F.; ALMEIDA, L. M. W. de. Signos interpretantes em atividades de Modelagem Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, [S. l.], v. 14, p. e3504064, 2020. DOI: 10.14244/198271993504. Disponível em: <https://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/3504>. Acesso em: out. 2022.

MUNIZ, C. A. **Explorando a Geometria da orientação e do deslocamento** – In: MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO TP6 GESTAR II Matemática Brasília TP6 – GESTAR. 2007b.

NUNES, T.; *et al.* **Educação Matemática: números e operações numéricas**. São Paulo: Cortez, 2005.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Educação Básica. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná: Matemática**. Curitiba: SEED, 2008.

PERRENET, J.; ZWANEVEL, D. The Many Faces of the Mathematical Modeling Cycle. **Journal of Mathematical Modelling and Application**. Vol. 1, No.6, 3-21, 2012.

SANT'ANA, A. A.; MOREIRA, A. L. L.; BEM, B. C.; FIGINI, D. C. C.; KOFENDER, M.. Pista de skate e modelagem matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2011, Belém. **Anais...** . Belém: UFPA, 2011. p. 1 - 13.

SILVA, V. S.; KLÜBER, T. E. Modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma investigação imperativa. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, 2012. 228-249.

SILVEIRA, E. **Modelagem Matemática em Educação no Brasil: entendendo o universo de teses e dissertações**. 2007. 197 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

SOUZA, B. N. P. A.; TORTOLA, E. Modelos Matemáticos em Atividades de Modelagem Matemática: considerações a partir da filosofia da linguagem de Wittgenstein. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [S. l.], v. 12, n. 2, p. 1-25, 2021. DOI: 10.26843/rencima.v12n2a12. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2937>. Acesso em: 6 out. 2022.

TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. Londrina: Universidade Estadual de Londrina - UEL, v. 168 f., 2012.

VALLADARES, R. J. da C. – **O Jeito Matemático de Pensar** – Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2003.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental [recurso eletrônico] : formação de professores em sala de aula** / John A. Van de Walle ; tradução Paulo Henrique Colonese. – 6. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : Artmed, 2009.

WERLE, F. O. C. **Avaliação em larga escala: foco na escola**. São Leopoldo: Oikos, Brasília: Liber Livro, 2010.

ANEXOS

ANEXO – A



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE DO PARANÁ - UENP
 Centro de Ciências Humanas e da Educação – CCHE
 Campus Cornélio Procópio

Pesquisadora Responsável: Maria Cláudia Silva Jardim Selleti
 Endereço: Rua Pedro Picelli, nº 245 – Jardim Nova Andirá. Andirá/PR CEP: 86380-000
 Fone: (43) 99977-3002 E-mail: mariaclaudiaselleti@gmail.com

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

(maiores de 6 anos e menores de 18 anos)

Você está sendo convidado para participar da pesquisa “**MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS: um design usando sequências de atividades**”. desenvolvida na Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP), no Mestrado Profissional em Ensino (PPGEN). Seus pais permitiram que você participe.

Vamos auxiliar você e os demais alunos da sua turma a compreender a presença e a importância da matemática no dia-a-dia, por meio de situações-problema reais, possibilitando o desenvolvimento de habilidades que envolvam conceitos de medidas e medições, com foco no seu aprendizado matemático.

Os participantes desta pesquisa são você e seus colegas de classe. Mas você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito seu e não terá nenhum problema se desistir, a qualquer momento. A pesquisa será feita em sala de aula, na Escola Municipal Ana Nery, do município de Andirá, Norte do Paraná. Você e seus colegas do 4º ano irão realizar atividades de matemática que envolvem situações-problema do dia-a-dia. A pesquisa irá analisar o desenvolvimento de vocês no decorrer das atividades, para possibilitar e identificar o desenvolvimento de habilidades matemáticas.

Na divulgação da pesquisa, poderemos usar algum texto ou atividade sua desenvolvida em sala de aula, mas não iremos, de forma alguma, identificá-lo. Usaremos códigos e/ou nomes fictícios para substituir sua assinatura. No caso de usarmos produções escritas de sua autoria no nosso trabalho, iremos digitá-las para que sua letra não seja reconhecida. Não daremos a estranhos as informações coletadas em sala de aula. **As imagens e sons ficarão guardadas até o término da pesquisa e a finalização das obrigações legais da pesquisadora com o programa de mestrado e serão descartadas, sendo excluídas do banco de dados da pesquisa.** Durante o desenvolvimento das atividades em sala de aula, você poderá não responder alguma pergunta se não se sentir confortável. Essa pesquisa é muito importante para o desenvolvimento de habilidades matemáticas e pode lhe trazer alguns benefícios, como por exemplo: você pode aprender sobre como a Matemática está presente em situações comuns do seu cotidiano, além de contribuir para que outros professores possam ter acesso a um material didático para o ensino de Matemática, abordando conceitos de medidas e medições.

Nessa pesquisa, **o participante não gastará e não receberá nenhum valor ao participar, sendo assegurado ao participante o ressarcimento, caso a pesquisa lhe traga algum custo. O participante tem direito à indenização em caso de dano decorrente da pesquisa.** Caso o participante tenha dúvidas ou denúncias de cunho ético pode procurar o Comitê de Ética (CEP/UENP, Rod. BR 369, Km 54 - Bandeirantes-PR, CEP 86360-000, Caixa Postal 261, Fone (43)3542-8056, e-mail: cep@uenp.edu.br -), funcionamento de segunda a sexta-feira das 7h30min às 12h e das 13h30min às 17h. Caso precise, você pode entrar em contato comigo pelo telefone (43) 99977-3002 ou pelo e-mail mariaclaudiaselleti@gmail.com. Meu nome é Maria Cláudia Silva Jardim Selleti. Se você tiver alguma dúvida, você pode me perguntar. O participante receberá uma via do documento devidamente assinada, por ambas as partes.

Eu _____, **declaro estar em concordância com a gravação de imagens e sons bem como forneço autorização para fotografias.** Declaro, também, que recebi uma via deste termo, li e aceito participar da pesquisa

“MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS: um design usando sequências de atividades”.

Andirá, _____ de _____ de 2022.

Assinatura do menor

Pesquisadora: Maria Cláudia Silva Jardim Selleti

ANEXO – B



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE DO PARANÁ - UENP
 Centro de Ciências Humanas e da Educação – CCHE
 Campus Cornélio Procópio



Pesquisadora Responsável: Maria Cláudia Silva Jardim Selleti
 Endereço: Rua Pedro Picelli, nº 245 – Jardim Nova Andirá. Andirá/PR CEP: 86380-000
 Fone: (43) 99977-3002 E-mail: mariaclaudiaselleti@gmail.com

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Este é um convite especial para seu filho participar voluntariamente da pesquisa “**MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS: um design usando sequências de atividades**”. Por favor, leia com atenção as informações abaixo antes de dar seu consentimento. Qualquer dúvida sobre o estudo ou sobre este documento entre em contato diretamente com o pesquisador responsável.

OBJETIVO E BENEFÍCIOS DO ESTUDO

Pretendemos com esta pesquisa desenvolver uma **sequência de atividades como alternativa pedagógica** para o Ensino Fundamental I, de Matemática na educação básica tendo a Modelagem Matemática como eixo organizador.

Intencionamos auxiliar os alunos na participação da sociedade de forma que eles possam compreender a presença e a importância da matemática no dia-a-dia, possibilitando a esses estudantes, o desenvolvimento da **reflexão**, quando pensam em situações-problema reais. Por meio desta pesquisa, seu (a) filho (a) poderá participar do desenvolvimento de um produto educacional, um material didático e instrucional que contempla o **desenvolvimento** de uma sequência de atividades de Modelagem Matemática com orientações para os professores dos Anos Iniciais auxiliarem seus alunos no desenvolvimento de habilidades que envolvam conceitos de medidas e medições, com vistas ao ensino e aprendizagem do debate regrado.

PROCEDIMENTOS/METODOLOGIA

Os alunos da turma do 4º ano da Escola Municipal Ana Nery, do município de Andirá –PR, a qual seu (a) filho (a) pertence, irão realizar atividades em grupos com os colegas em sala de aula, no contexto das aulas de matemática, por alguns dias da semana em horário de aula regular.

Na divulgação da pesquisa, poderemos usar algum texto ou atividade desenvolvida por seu filho em sala de aula, mas, de forma alguma, iremos identificá-lo. Usaremos nomes fictícios e/ou códigos para substituir a assinatura; no caso de usarmos produções escritas de seu filho em nosso trabalho, iremos digitá-las para que a letra dele não seja reconhecida. Não daremos a estranhos as informações coletadas em sala de aula.

DESPESAS/ RESSARCIMENTO DE DESPESAS DO VOLUNTÁRIO

Todos os participantes envolvidos nesta pesquisa são isentos de custos, bem como todos têm direito ao ressarcimento de eventuais despesas decorrentes da pesquisa.

PARTICIPAÇÃO VOLUNTÁRIA

A participação de seu (a) filho (a) neste estudo é ***voluntária*** e ele (a) terá plena e total liberdade para desistir do estudo a qualquer momento, sem que isso acarrete qualquer prejuízo para ele.

GARANTIA DE SIGILO E PRIVACIDADE

As informações relacionadas ao estudo são confidenciais e qualquer informação divulgada em relatório ou publicação será feita sob forma codificada (nome fictício), para que a confidencialidade seja mantida. O pesquisador garante que o nome de seu (a) filho (a) não será divulgado sob hipótese alguma.

Assinatura do Responsável pelo menor
ESCLARECIMENTO DE DÚVIDAS

Pesquisadora: Maria Cláudia Silva Jardim Selleti

A pesquisa será realizada sob as seguintes instruções: Art. 19 - §2º da Resolução 510/2016, que **prevê ao participante o direito a buscar assistência e/ou indenização**, caso o mesmo venha a sofrer qualquer tipo de dano decorrente de sua participação na referida pesquisa; IV3 -h) da Resolução 466/2012 (CNS), que **prevê ao participante a garantia de indenização diante de eventuais danos provenientes da pesquisa**; visando, também, a ponderação entre riscos e benefícios, tanto conhecidos como potenciais, individuais ou coletivos, comprometendo-se com o máximo de benefícios e o mínimo de danos e riscos. No caso dessa pesquisa, os riscos são mínimos: **no caso do aluno não se sentir confortável, por qualquer motivo, durante o desenvolvimento de alguma atividade, seja nos momentos de resolução ou durante o uso de algum instrumento de medida, a pesquisadora, por meio do diálogo, irá colaborar para que o aluno possa se sentir à vontade, ajudando e instruindo o aluno no uso de materiais utilizados para realizar medições**, pois os alunos realizarão atividades que integram conteúdo do currículo escolar e no contexto da sala de aula, sendo que somente a pesquisadora responsável utilizará equipamentos adequados para fotos e gravação, sem que haja registro das faces dos alunos, evitando, assim, identificação e vazamento das informações. **As imagens e sons ficarão guardadas até o término da pesquisa e a finalização das obrigações legais da pesquisadora com o programa de mestrado e serão descartadas, sendo excluídas do banco de dados da pesquisa. As informações relacionadas ao estudo são confidenciais e qualquer informação divulgada em relatório ou publicação será feita sob forma codificada (nome fictício), para que a confidencialidade seja mantida.** O pesquisador garante que o nome do (a) seu (a) filho (a) não será divulgado sob hipótese alguma.

Você e seu (a) filho (a) podem fazer todas as perguntas que julgarem necessárias durante e após o estudo. Caso o participante tenha dúvidas ou denúncias de cunho ético, pode procurar o Comitê de Ética (CEP/UENP, Rod. BR 369, Km 54 - Bandeirantes-PR, CEP 86360-000, Caixa Postal 261, Fone (43)3542-8056, e-mail: cep@uenp.edu.br -), funcionamento de segunda a sexta-feira das 7h30min às 12h e das 13h30min às 17h.

O participante receberá uma via do documento devidamente assinada, por ambas as partes.

Diante do exposto eu, _____, RG nº _____ declaro que fui esclarecido sobre os objetivos, procedimentos e benefícios do presente estudo. **Declaro, ainda, estar em concordância com a gravação de imagens e sons bem como forneço autorização para fotografias.** Autorizo a participação livre e espontânea de meu filho (a) _____ na pesquisa em questão.

Declaro também não me sentir pressionado de nenhum modo a autorizar a participação de meu (a) filho (a) nessa pesquisa.

Andará, _____ de _____ de 2022.

 Assinatura do Responsável pelo menor

 Pesquisadora: Maria Cláudia Silva Jardim Selleti