2026

Sequência de atividades à luz dos registros de representação semiótica e das múltiplas representações para a aprendizagem de derivadas

Tozo, Guilherme Augusto Bossi

Universidade Estadual do Norte do Paraná

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE DO PARANÁ
***Campus* Cornélio Procópio**
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO

GUILHERME AUGUSTO BOSSI TOZO
DANIEL TREVISAN SANZOVO

PRODUÇÃO TÉCNICA EDUCACIONAL

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES À LUZ DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E DAS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES PARA A APRENDIZAGEM DE DERIVADAS

CORNÉLIO PROCÓPIO – PR
2025

GUILHERME AUGUSTO BOSSI TOZO
DANIEL TREVISAN SANZOVO

PRODUÇÃO TÉCNICA EDUCACIONAL

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES À LUZ DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E DAS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES PARA A APRENDIZAGEM DE DERIVADAS

SEQUENCE OF ACTIVITIES IN THE LIGHT OF SEMIOTIC REPRESENTATIONS AND MULTIPLE REPRESENTATIONS FOR LEARNING DERIVATIVES

Produção Técnica Educacional apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná – *Campus* Cornélio Procópio, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino.

Orientador: Prof°. Dr. Daniel Trevisan Sanzovo

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Ciências Naturais e Matemática

CORNÉLIO PROCÓPIO – PR
2025

Ficha catalográfica elaborada por Juliana Jacob de Andrade - Bibliotecária, CRB/9 - 1669, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UENP

TOZO, Guilherme Augusto Bossi
T757s Sequência de atividades à luz dos registros de representação semiótica e das múltiplas representações para aprendizagem de derivadas. / Guilherme Augusto Bossi TOZO; orientador Daniel Trevisan Sanzovo - Cornélio Procópio, 2025.
50 p. :il.

Produção Técnica Educacional (Mestrado Profissional em Ensino) - Universidade Estadual do Norte do Paraná, Centro de Ciências Humanas e da Educação, Programa de Pós-Graduação em Ensino, 2025.

1. Cálculo Diferencial e Integral. 2. Aprendizagem. 3. Representação Semiótica. 4. Múltiplas Representações. I. Sanzovo, Daniel Trevisan , orient. II. Título.

CDD: 515.3

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Formação de representações semióticas de uma função afim…………. 11
Figura 2 – Outro exemplo de formação de representações semióticas de uma função afim……………………………………………………………………………………. 12
Figura 3 – Tratamento de um registro algébrico de uma função afim………………. 12
Figura 4 – Conversão entre diferentes registros………………………………………. 13
Figura 5 – Diversidade representacional numa função quadrática…………..………14
Figura 6 – Categorias de registros de representação semióticos…………………… 16

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Funções Pedagógicas das MR…………………………………………… 15
Quadro 2 – Possíveis vantagens e desvantagens dos registros representacionais semióticos (domínio das funções)…………………………………………………… 17
Quadro 3 – Estrutura geral das etapas da sequência de atividades………………... 20
Quadro 4 – Detalhamento da Etapa 1……………………………………………….. 23
Quadro 5 – Detalhamento da Etapa 2……………………………………………….. 27
Quadro 6 – Detalhamento da Etapa 3……………………………………………….. 31
Quadro 7 – Detalhamento da Etapa 4……………………………………………….. 34
Quadro 8 – Detalhamento da Etapa 5……………………………………………….. 37

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MR	Múltiplas Representações
PE	Produto Educacional
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica
SA	Sequência de Atividades

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO…………………………………………………………….. 8

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA………………………. 10

1.1 Teoria dos Registros de Representação Semiótica…………………………. 10

1.2 Múltiplas Representações……………………………………………………..13

1.3 Vantagens e Desvantagens no Uso dos Registros………………………….. 16

2 PRODUTO EDUCACIONAL…………………………………………………. 20

RELATO DE IMPLEMENTAÇÃO……………………………………………42

CONSIDERAÇÕES FINAIS…………………………………………………….. 44

REFERÊNCIAS………………………………………………………………... 45

APÊNDICES…………………………………………………………………….47

APÊNDICE A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido…………48

ANEXOS………………………………………………………………………...49

ANEXO A – Ementa da Disciplina de CDI-I da Universidade de aplicação………………………………………………………………...50

APRESENTAÇÃO

O material a seguir diz respeito a um Produto Educacional, parte integrante de uma pesquisa de Mestrado, que originou a dissertação intitulada: *Aprendizagem de Derivadas com base na Teoria dos Registros de Representações Semióticas e nas Múltiplas Representações*. Tal pesquisa teve como questão norteadora: *"De que modo a aplicação de uma sequência de atividades sistematizada pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica e pelas Múltiplas Representações pode auxiliar uma turma de alunos de graduação do curso de Licenciatura em Matemática na compreensão do conteúdo matemático de Derivada de funções?"*. Assim, a intencionalidade deste Produto Educacional é fornecer uma possibilidade de aprendizagem de Derivadas para alunos de Ensino Superior por meio dos referenciais que serão apresentados nas próximas sessões. Vale ressaltar que as Derivadas as quais citamos ao longo deste estudo tratam-se somente de funções que possuem uma variável no domínio.

Em Matemática, costuma-se evidenciar a análise de algumas atividades cognitivas fundamentais como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e até mesmo a compreensão de textos. A aprendizagem deste ramo do saber possui a particularidade de requerer a utilização de expressões e representações mais complexas do que somente o uso de imagens e linguagem natural. A exemplo disso podemos verificar notações simbólicas, escritas algébricas e lógicas, que exprimem relações de sentido a operações, figuras geométricas, gráficos cartesianos, diagramas, dentre outros (Duval, 2009).

Para a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, conceitos como limite, continuidade e Derivada revelam grande complexidade não somente no que tange a suas abstrações, mas também, seus processos de representação dificultam a compreensão (Viseu, 2017).

A derivada, por sua vez, pode ser conceituada, por exemplo, utilizando representações gráficas, como o declive de uma reta tangente a uma curva num determinado ponto de uma função, ou como a taxa de uma variação instantânea, por meio da Física, com a velocidade de um corpo, ou simbolicamente, como o limite da razão incremental quando o incremento tende para zero. Tais representações fazem com que o aluno, para compreender a derivação de uma função, domine esses conceitos implícitos (Viseu, 2017).

A utilização de uma forma diversificada de distintos sistemas semióticos de representação se mostra interessante para o desenvolvimento das atividades cognitivas fundamentais. As representações semióticas são compreendidas como "produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento" (Duval, 2012, p.269).

Por sua vez, o ensino voltado para a pluralidade de representações se mostra um mecanismo pedagógico importante visto que aprimora o processo de significação e oferece uma variedade de formas de interpretação e entendimento do conteúdo (Laburú; Silva, 2011).

Nessa perspectiva, ao propor atividades em que o aprendiz apresente seu entendimento por meio de representações distintas, pode possibilitar que este coordene, organize, estruture e aprimore seus conhecimentos (Laburú; Silva, 2011), levando inclusive à atribuição de significados mais elaborados acerca do conteúdo estudado (Trevisan Sanzovo, 2017).

Na próxima seção abordaremos os referenciais que embasou a construção deste Produto Educacional, sucintamente.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

Dedicamos essa sessão para explanar um pouco a respeito dos subsídios teórico-metodológicos que nos pautamos para fundamentar este Produto Educacional (PE).

1.1 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação do mesmo, sendo assim, considera-se impossível analisar fenômenos da área do conhecimento sem recorrer à noção de representação (Duval, 2009).

O conteúdo representado, portanto, não pode ir contra a forma que o representa, ou seja, não há *noesis* sem *semiosis*. Chama-se "*noesis*", a apreensão conceitual de um objeto e, "*semiosis*", a produção de uma representação semiótica (Duval, 2012).

A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para outro (DUVAL, 2009).

Além disso, Duval (2009) define como Registros de Representação Semiótica os sistemas semióticos que permitem o cumprimento de três atividades cognitivas inerentes às representações: a formação, o tratamento e a conversão.

Seja a enunciação de uma frase em língua natural, o desenho de uma figura, a produção de um esquema, uma expressão matemática, a atividade cognitiva originária da semiose é a produção de um registro. Sua formação implica a escolha de relações e dados do objeto a ser representado e o respeito das suas regras de existência, seja a gramática para a formação de um enunciado escrito, ou os rigores matemáticos de igualdade para uma expressão algébrica (Duval, 2012).

A operação de tratamento, por sua vez, pode ser entendida como os movimentos de transformação que ocorrem dentro de um registro, não alterando sua forma e respeitando suas regras de tratamento específicas. Duval (2012) traz alguns exemplos de tratamento, a paráfrase para um enunciado em língua natural, a realização do cálculo de uma expressão matemática tratando seus símbolos, a reconfiguração de uma figura geométrica, a anamorfose para registros imagéticos, etc.

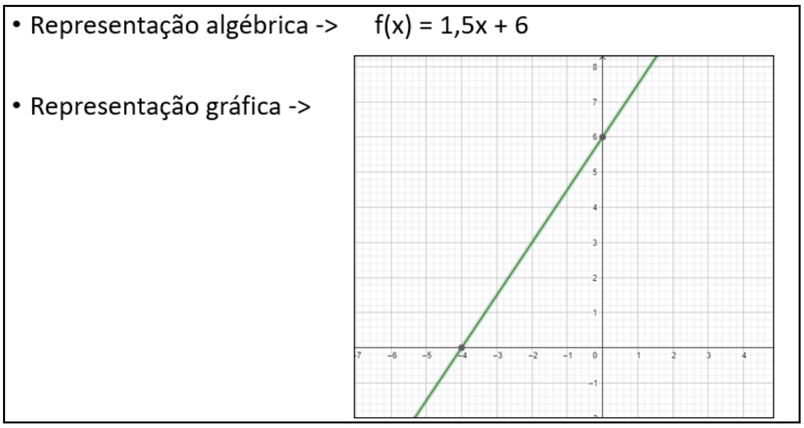
Por fim, a conversão, entendida como os movimentos de mudança de um registro para outro em um sistema semiótico distinto, conservando sua totalidade ou parte da representação inicial, sendo a atividade cognitiva da semiose que permite o reconhecimento do objeto matemático em diferentes registros (Duval, 2009; 2012).

É importante destacar que a conversão é uma atividade completamente diferente e independente do tratamento, pois, na realização da troca de um registro para o outro é necessária a percepção da existência de diversos sentidos de conversão.

Imagine que desejamos representar o objeto matemático: “Função afim”. Quanto a esse objeto, é possível produzir representações semióticas distintas, como registro em língua natural, uma escrita algébrica, um gráfico cartesiano, um registro tabular, etc.

A Figura 1 ilustra a representação de uma função a fim por meio de registros algébricos e gráficos.

Figura 1 – Formação de representações semióticas de uma função afim.



Fonte: os autores.

Por sua vez, a Figura 2 exemplifica a mesma função afim utilizando, agora, uma representação tabular para verificação de seu domínio e sua imagem.

Figura 2 – Outro exemplo de formação de representações semióticas de uma função afim.

- Representação tabular

x	F(x)
0	6
-4	0
1	7,5
-1	4,5

Fonte: os autores.

Ainda se tratando das atividades cognitivas ligadas à semiose no exemplo prático do objeto “função afim”, a Figura 3 exemplifica a operação de tratamento (num mesmo registro) de uma representação algébrica.

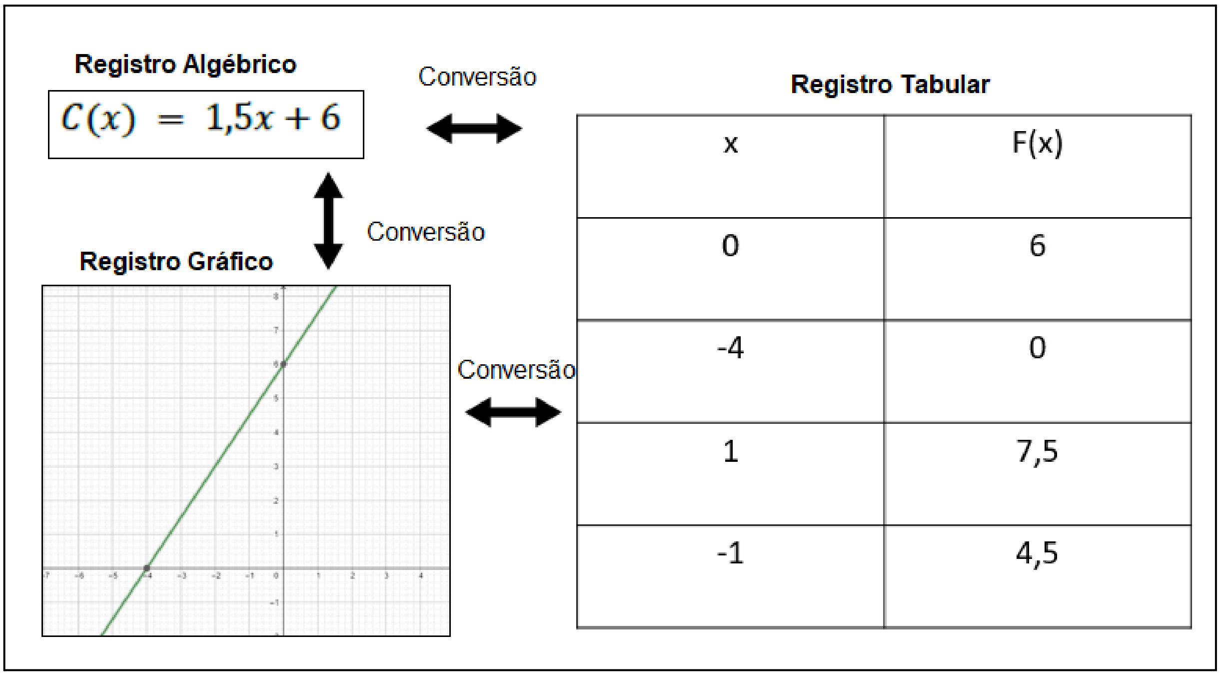
Figura 3 – Tratamento de um registro algébrico de uma função afim.

$$(1) \quad f(x) = 10x - 1 + 7 - 8{,}5x$$
$$(2) \quad f(x) = 1{,}5x + 6$$

Fonte: os autores.

A terceira e última atividade semiótica de conversão pode ser exemplificada utilizando novamente o objeto “função afim”, na Figura 4. Observe que, como explicado por Duval (2012), as conversões ocorrem de um registro para o outro, e podem tomar qualquer sentido de conversão, não existindo somente uma direção para a troca de registro. A Figura 4 mostra as operações de conversão que podem ocorrer entre diferentes registros (na figura o algébrico, o tabular e o gráfico) de um mesmo objeto matemático: uma função afim crescente. Perceba que, as conversões possuem sentido duplo, ou seja, uma conversão pode ter diferentes registros de partida e de chegada. Portanto, uma conversão pode seguir tanto o sentido de um registro algébrico para um gráfico, quanto de um gráfico para um algébrico e assim sucessivamente.

Figura 4 – Conversão entre diferentes registros.



x	F(x)
0	6
-4	0
1	7,5
-1	4,5

Fonte: os autores.

A operação semiocognitiva de conversão se mostra a mais importante e o que dá base à essa ideia de aprendizagem matemática. O funcionamento cognitivo permite mobilizar, formar e reconhecer as representações dos objetos matemáticos, assim como, conduzir e controlar a atividade até seu término. A reprodução ou percepção da representação semiótica não garante a diferenciação entre o representante e o representado. Para que não ocorra confusão, é importante dispor-se de uma variedade de representações semioticamente heterogêneas de um mesmo objeto de maneira coordenada (Duval, 2009).

1.2 Múltiplas Representações

A aprendizagem envolvendo Múltiplas Representações (MR) existe mesmo antes dos avanços tecnológicos para a área educacional. Diversos estudos comprovam que o uso de mais de uma representação promove maior eficácia na aprendizagem dos estudantes, favorecendo o interesse para o objeto de estudo e prendendo sua atenção ao conteúdo (Ainsworth, 1999).

A diversidade representacional desempenha um papel muito importante na compreensão de ideias e conceitos, podendo efetivamente melhorar a aprendizagem dos estudantes (Ainsworth, 2006; 2008).

Em pesquisa de doutorado, Trevisan Sanzovo (2017) conclui que o uso das MR pode permitir aos alunos desenvolverem significados mais complexos e profundos dos conceitos científicos estudados. Essa abordagem enriquece não só a compreensão, mas também a aplicação desse conhecimento de maneira mais diversificada.

Na Matemática, Laburú e Faria (2018) notam ser comum a utilização intuitiva de representações, de forma não intencional, fazendo com que os estudantes possuam dificuldade na articulação perante a diversidade de representações que o objeto matemático pode tomar. A linguagem discursiva por exemplo, não fornece as mesmas possibilidades de uma figura ou diagrama, sendo assim, de um ponto de vista cognitivo, uma representação é parcial em relação aquilo que ela quer representar e, da mesma forma, entre um registro e outro, não são os mesmos conteúdos que são representados (Moretti, 2002). Observe a Figura 5, considerando as diferentes representações cartesianas de uma mesma parábola

Figura 5 – Diversidade representacional numa função quadrática.

(a)	$y = x^2 - 4x + 3$
(b)	$y + 1 = (x - 2)^2$
(c)	$y = (x - 3)(x - 1)$
(d)	esboço da parábola no plano cartesiano

Fonte: adaptado de Moretti (2002, p.347).

Analisando cada uma destas representações na Figura 5 acima, em sua integralidade, veremos que o mesmo objeto matemático foi representado de quatro maneiras distintas, onde as informações dos registros se complementam. Em acordo com o visto, Moretti (2002) analisa que, do ponto de vista cognitivo, a informação se sobressai muito mais clara em (c), onde podemos com clareza ver as raízes, em (b), as coordenadas do vértice da parábola, e em (d), um sistema semiótico diferente e bastante adequado à interpretação do fenômeno em questão.

Ainsworth (1999; 2006; 2014) em análise das funções que as representações desempenham no processo de aprendizagem, denomina as Funções Pedagógicas: (i) complementar, (ii) restringir e (iii) aprofundar, conforme exemplificado pelo Quadro 1, apontando nele a função pedagógica na primeira coluna, seguido de seu detalhamento e exemplo prático, respectivamente.

Quadro 1 – Funções Pedagógicas das MR.

Função pedagógica	Função detalhada	Exemplo prático
Complementar	Complementa e aproveita a diferença das representações, apoiando o processo de aprendizagem e oferecendo apoio ao processo cognitivo.	Usar tabelas, equações e gráficos num simulador
Restringir	Utilizar-se uma representação conhecida/familiar, para auxiliar no entendimento de uma segunda representação (mais aprofundada/complexa).	Fazer uso de uma animação concreta para apoiar um gráfico dinâmico
Aprofundar	A utilização de duas ou mais representações para que o aluno atinja uma compreensão mais profunda.	Relacionar gráficos de velocidade e espaço para entender mais sobre funções e derivadas

Fonte: adaptado de Ainsworth (2014, p.467).

Nesse contexto, as “funções de complementar, restringir e/ou aprofundar um novo conhecimento, a partir de uma nova representação, **não são excludentes**, pois, uma mesma representação pode apresentar uma ou mais destas funções pedagógicas.” (Faria; Laburú, 2021, p.315, grifo nosso)

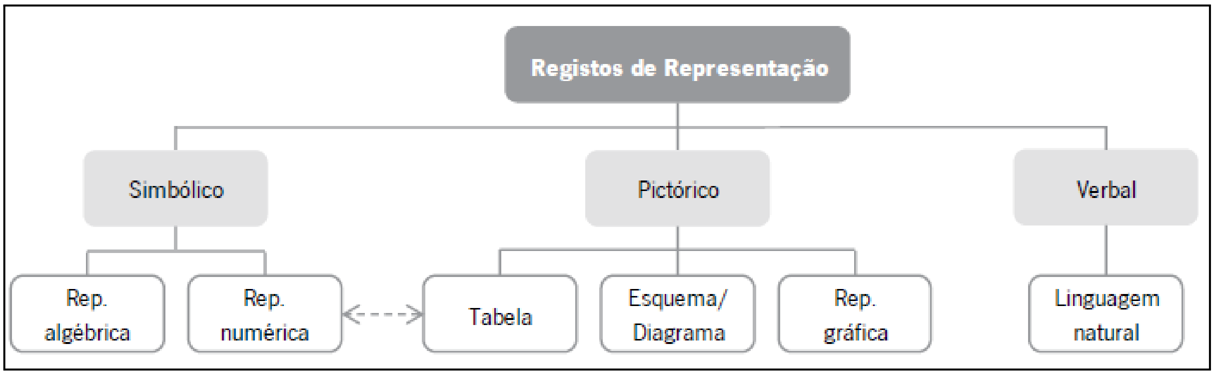
Diante do exposto, a noção das funções pedagógicas das MR, além do fato de que a compreensão matemática esteja intrinsecamente associada ao uso coordenado de ao menos dois registros de representação semiótica distintos (Duval, 2003), oferecem oportunidades para que estudantes possam abstrair e obter compreensões mais aprofundadas acerca do conceito estudado, fundamentos adotados para a elaboração do presente PE, apresentado em detalhes a seguir.

1.3 Vantagens e Desvantagens no Uso dos Registros

Como já elucidado em seções anteriores, os registros de representação semióticos na aprendizagem Matemática se diferem de outras áreas do conhecimento, pois nesta, os objetos de estudo são abstratos e inacessíveis sem o auxílio de uma representação (Duval, 2009).

Um registro para Raymond Duval (2009) é um sistema semiótico com regras bem estabelecidas quanto à natureza dos elementos que a compõem e as manipulações que o mesmo permite. Embora ele defina quatro tipos de registros (algébrico, numérico, visual e verbal), seguiremos a classificação presente na Figura 6, adaptada de Bento (2022), que separa os registros em três categorias: Simbólico, Pictórico (chamaremos de imagético) e Verbal, seguido de suas subcategorias.

Figura 6 – Categorias de registros de representação semióticos.



Fonte: Bento (2022, p. 16).

Além disso, surge o questionamento de quais possíveis registros poderíamos utilizar para a elaboração do nosso PE, de maneira que podemos aplicar os referenciais supracitados. Nesse sentido, adotaremos a visão de Bento (2022), que fez uma releitura de diversas obras a respeito da utilização de cada um desses registros categorizados pela Figura 6. Assim, ela constrói um esquema que relaciona possíveis vantagens e desvantagens de representações específicas. Em outras palavras, o que se ganharia e perderia, na utilização de cada tipo de registro de representação semiótico em atividades matemáticas.

Complementando as indicações de vantagens e desvantagens do uso de representações de Bento (2022), acrescentamos as referências de Barros (2014), Lemke (1998a; 1998b) e Laburú; Silva (2011) para complementar. O Quadro 2 apresenta tal leitura, mostrando, na primeira coluna, o registro, seguido da representação, das vantagens e das desvantagens nas colunas seguintes.

Quadro 2 – Possíveis vantagens e desvantagens dos registros representacionais semióticos (domínio das funções).

Registro	Representação	Vantagens	Desvantagens
Simbólico	Algébrica	V01 - É facilmente manipulável [a]; V02 - Em muitos casos é a única representação que permite provar rigorosamente [a]; V03 - Maior eficácia no cálculo da derivada num valor do domínio da função [b]; V04 - Complementa a informação de outra representação (p.ex., da representação gráfica) [b].	D01 - A precipitação para esta representação como um fim desprovê-a de propósito/sentido, devido ao elevado nível de abstração necessário para a compreender [a]; D02 - Revela menos informação [b]; D03 - Um uso com sentido requer a compreensão de conceitos ambíguos (p. ex., distinção entre variável, parâmetro, incógnita, etc.) e das “regras” (p. ex., das operações) [a].
Imagético (Pictórico)	Tabular	V05 - Pela sua estrutura são úteis para consultas pontuais ou na determinação de padrões e regularidade [a]; V06 - Ajudam na atribuição de significado a conceitos algébricos (p. ex., a noção de variável dependente ou expressão) [a];	D04 - Oferece poucos dados da natureza da função [a]; D05 - Pode sugerir generalizações erradas ao testar apenas alguns valores [a] e ao omitir valores “raros”.
	Gráfica	V07 - Permite “testar” mais casos que as representações numéricas ou tabulares [a]; V08 - É intuitiva e de fácil interpretação até para os alunos com dificuldades em Álgebra [a]; V09 - Auxilia a compreensão e visualização dos conceitos [b]; V10 - Permite comparar a função com a sua derivada [b].	D06 - Não proporciona necessariamente valores exatos [a]; D07 - Pode induzir conclusões precipitadas [a; b]; D08 - Implica saber utilizar a calculadora gráfica [b]; D09 - Uso isolado pode não ser suficiente para a aprendizagem [b].
	Figural	V11 - Melhor indicadas para estabelecerem referências quantitativas que necessitem expressar grau [e].	D10 - São pobres em expressarem significados em termos de categorias [c; d].

Verbal	Linguagem natural	V12 - Possibilita o estabelecimento de relações entre a Matemática e outras áreas, motivando os alunos [a]; V13 - Ajuda na passagem do concreto para o abstrato descrevendo os conceitos ambíguos [a]; V14 - Poderosa para expressar raciocínios semânticos, qualificar ideias ou realizar relações entre categorias [e].	D11 - O fato de existirem termos específicos da Matemática comuns aos usados no dia a dia pode confundir os alunos, sobretudo quando o significado coloquial não for diretamente transponível [a]; D12 - Não permite efetuar manipulações de modo eficiente/claro e, em alguns casos, realizar qualquer transformação [a]; D13 - É pobre em descrever variações contínuas, questões complexas de relação quantitativa e de movimentos no espaço [c; d].

Nota: [a] Bento (2022); [b] Barros (2014); [c] Lemke (1998a); [d] Lemke (1998b); [e] Laburú; Silva, (2011);

Fonte: adaptado de Bento (2022); Barros (2014); Lemke (1998a, 1998b) e Laburú; Silva (2011).

Atividades para a aprendizagem das derivadas de funções matemáticas

2 PRODUTO EDUCACIONAL

O Produto Educacional (PE) apresentado neste documento é parte integrante da Dissertação de Mestrado Intitulada: “Aprendizagem de Derivadas com base na Teoria dos Registros de Representações Semióticas e nas Múltiplas Representações”, disponível em <http://www.uenp.edu.br/mestrado-ensino>. Para maiores informações, entre em contato com e-mail: gui_sxw@hotmail.com.

A Sequência a seguir foi elaborada visando a viabilidade de um material para a aprendizagem de Derivadas das funções polinomiais fundamentada nas teorias visitadas nas sessões anteriores, para tanto, se faz necessário que o público-alvo conheça previamente os conceitos de limite numérico. Devido à estrutura sequencial desse PE, a avaliação proposta para as etapas a seguir são de natureza formativa, sendo assim, cabe ao professor a utilização contínua de seus instrumentos avaliativos – nesse caso, os registros produzidos nas atividades – para inferência dos registros produzidos pelos alunos.

O Quadro 03 sintetiza a estrutura geral das atividades elaboradas neste PE, apresentando na primeira coluna as etapas, seguido dos objetivos, Funções Pedagógicas, Representações e Vantagens, além do número de aulas nas colunas seguintes, respectivamente.

Quadro 03 – Estrutura geral das etapas da sequência de atividades

Etapa	Objetivo	Funções Pedagógicas	Representações (Vantagens*)	Aulas
Atividade 1: Construção do conceito formal da derivada como um limite	Interpretar o conceito formal de uma derivada através da conversão de um registro gráfico para um registro algébrico	Aprofundar Complementar	Algébrico (V02; V04: D06; D09; D13) Gráfico (V08; V09: D01; D02; D03) Língua natural (V12; V13; V14: D07; D08; D12)	2
Atividade 2: Regras de Derivação das funções matemáticas	Identificar e utilizar as regras de derivação de algumas funções polinomiais	Aprofundar Complementar Restringir	Algébrico (V02; V03; V04: D04; D05; D06; D09) Gráfico (V08: D12) Língua natural (V12; V13; V14: D07; D08; D12) Tabular (V05; V06: D02; D11)	2

Atividade 3: Máximos e mínimos de uma função contínua (Pontos críticos)	Aplicar os conceitos de derivada a fim de encontrar pontos de máximos e mínimos numa função contínua	Aprofundar Restringir	Algébrico (V02; V04: D06; D09; D13) Gráfico (V07; V08; V09; V10: D01; D02; D03) Língua natural (V12; V13; V14: D07; D08; D12)	2
Atividade 4: Otimização do volume de uma caixa	Utilização do conceito de derivada aplicado ao máximo de uma função volume do sólido geométrico	Aprofundar Restringir	Algébrico (V01; V02; V04: D06; D09; D13; D10) Figural (V11: D06; D09; D13) Língua natural (V12; V13; V14: D07; D12)	2
Atividade 5: Otimização do lucro de uma empresa	Utilização do conceito de derivada aplicado ao máximo de uma função lucro de uma empresa	Aprofundar Complementar	Algébrico (V01; V02; V04: D06; D09; D13) Gráfico (V09: D03; D11) Língua natural (V12; V13; V14: D07; D08; D12)	2

*NOTA: consideradas para escolha dos registros utilizados e de acordo com Quadro 02.
Fonte: o próprio autor

A estruturação da Sequência de Atividades deste PE foi pensada num sentido de auxiliar a aprendizagem de modo que, inicialmente, o estudante compreenda o conceito formal do que é uma função Derivada, como aplicá-lo para a obtenção de diversas derivadas de funções matemáticas usuais, aprofundar o conteúdo com a análise de pontos críticos e, por fim, aplicar em situações problema contextualizadas.

2.1. Primeira Etapa

A primeira etapa a ser desenvolvida é justamente a construção do conceito formal da Derivada utilizando um limite de variação tendendo a 0 como explicado no Quadro 04, que mostra na primeira coluna os itens contidos nesta etapa inicial (como os objetivos, tema, procedimentos, etc.) e, ao lado, suas respectivas explicações e descrições. Vejamos que, nos procedimentos metodológicos, utilizamos imagens de representações gráficas produzidas no *software GeoGebra*, bem como imagens de representações algébricas de coeficiente angular e limite.

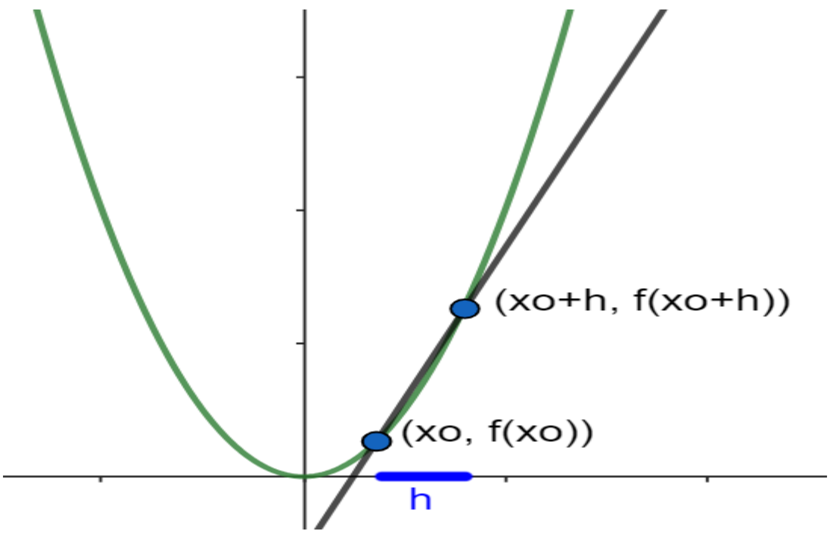
Quadro 04 – Detalhamento da Etapa 1

Etapa 1 – Construção do conceito formal da Derivada como um limite	
Atividade	Aula Expositiva: Construção do conceito formal da Derivada como um limite
Tema	Derivada de uma função na forma de um limite
Objetivo Geral	Interpretar o conceito formal de uma Derivada por meio de conversões entre registros gráficos e algébricos
Objetivos Específicos	● Identificar a diferença entre a inclinação de uma reta e a de uma curva; ● Compreender, por meio dos registros de representação produzidos (gráfico e algébrico), bem como a conversão entre eles, a aproximação necessária para determinar a inclinação de uma curva; ● Perceber o conceito de limite da variação tendendo a 0 como uma função Derivada capaz de determinar a inclinação de cada ponto que pertença à função.
Tempo previsto	2 aulas
Materiais Necessários	Computador; *Datashow*; *Powerpoint*; Folha de sulfite A4 (em branco); Lápis; Borracha.
Procedimentos Metodológicos	Aula expositiva dialogada com proposição de problemas contextualizados
Desenvolvimento do conteúdo	Inicialmente, será apresentada uma explanação sobre uma situação-problema que envolve o conceito de velocidade média no percurso de um ciclista, descrito em uma tabela. A tabela estabelece a relação entre o deslocamento ao longo dos 10 primeiros segundos do percurso. Após a apresentação do conceito de velocidade média, será feita uma pergunta aos participantes sobre o problema da velocidade instantânea desse mesmo ciclista.

t (seg)	S(t) (m)
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110

A partir desse problema, estabelece-se um paralelo entre essa situação e a definição do coeficiente angular de uma reta (inclinação). Para determinar o coeficiente angular de uma reta, isto é, sua inclinação, são necessários dois pontos pertencentes a essa reta. O coeficiente angular é obtido, portanto, pela razão entre as variações das coordenadas y e x desses mesmos dois pontos.

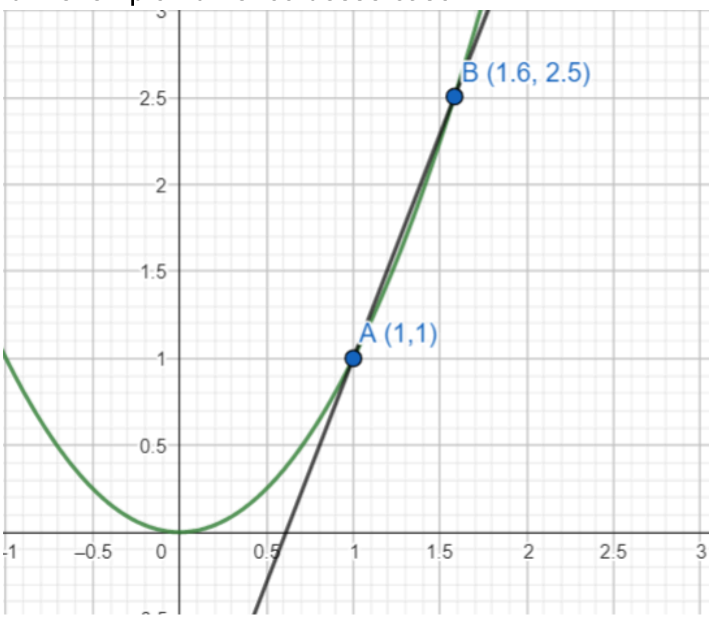
Em sequência, será indicada, com o auxílio do software GeoGebra (Calculadora Gráfica), uma parábola, ou seja, uma função do segundo grau, de modo a evidenciar que existe uma diferença entre a inclinação de uma curva (variação) e a inclinação de uma reta. Para calcular o coeficiente angular (inclinação) da curva, procede-se por meio da aproximação realizada pela reta secante entre dois pontos dessa curva, conforme ilustrado na imagem abaixo. Para tornar mais eficiente a visualização da alteração da distância entre os dois pontos, recomenda-se a utilização do controle deslizante do software.



Para a elaboração dessa figura no GeoGebra, insere-se a função f(x) = x². Em seguida, no menu *Ferramentas*, seleciona-se a opção “reta” para construir uma reta que passa por dois pontos, os quais são escolhidos como pontos genéricos pertencentes à parábola.

O coeficiente angular dessa curva nos pontos x0 e x0+h será, aproximadamente, o coeficiente angular da reta secante que passa por esses dois pontos.

Vejamos um exemplo numérico desse caso:



Na figura acima, o coeficiente angular da reta secante à parábola se dá por:

(1) Coeficiente angular = $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

(2) Coeficiente angular = $\dfrac{2{,}5 - 1}{1{,}6 - 1}$

(3) Coeficiente angular = $\dfrac{1{,}5}{0{,}6}$ = 2,5.

Assim, percebe-se que o resultado 2,5 para o coeficiente angular dessa reta não será exatamente o coeficiente angular entre os dois pontos da curva, porém, uma boa aproximação.

Se voltarmos à nossa representação gráfica, percebe-se que “h” é a distância horizontal entre os pontos que escolhemos para definir a inclinação e, portanto, quanto menor for h, mais próximo do valor real do coeficiente estaremos.

	Dando seguimento, vamos agora abordar o conceito de limite à secante entre os dois pontos analisados com a distância entre os dois pontos tendendo a 0 (zero), chegando ao conceito geométrico de Derivada por limite. Se aplicarmos um limite de h tendendo a 0, iremos obter o coeficiente angular exato para qualquer ponto dessa curva, sendo essa a definição de Derivada de uma função: “o coeficiente angular (ou inclinação) da reta que tange (toca) os pontos da função”. $\boxed{\lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)}$ Sendo assim, aplicando o limite à curva f(x) = x², veremos que: $\lim_{h \to 0}\left(\frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h}\right)$ $\lim_{h \to 0}\left(\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}\right)$ $\lim_{h \to 0}\left(\frac{2xh + h^2}{h}\right)$ $\lim_{h \to 0}\left(\frac{h(2x+h)}{h}\right)$ $\lim_{h \to 0}(2x + h)$ Para h tendendo a 0, o resultado desse limite é 2x, portanto essa é a inclinação da reta que passa pelos pontos que pertencem à esta curva x². Assim, retornamos ao problema inicial desta Etapa, onde desejávamos compreender a velocidade do ciclista em um determinado instante. Aplicando a Derivada da função de deslocamento, os estudantes tentarão novamente solucionar. É importante enfatizar a necessidade da diversidade representacional desse objeto matemático (como feito acima) empregando os registros gráficos, algébricos e em língua natural de forma simultânea. Optamos pela utilização do registro gráfico pois é intuitivo e de fácil interpretação e auxilia a compreensão e visualização dos conceitos, porém não proporciona necessariamente valores exatos e o uso isolado pode não ser suficiente para a aprendizagem, dessa forma, complementamos com o algébrico.
Registros de	Algébrica, Gráfica e Língua natural.

Representação Semiótica utilizados	
Atividades Cognitivas da Semiose previstas	Tratamento do registro gráfico e algébrico; Conversão do registro gráfico para o algébrico.
Funções Pedagógicas previstas	Complementar (apoiar a aprendizagem do conceito abordado aproveitando as diferenças entre as representações algébrica, gráfica e em língua natural); Aprofundar (usando as representações algébrica, gráfica e em língua natural para uma compreensão mais profunda acerca do conceito abordado).
Avaliação	Por meio da análise da produção e conversão de registros de representações semióticas executadas pelos alunos ao resolverem as atividades deste encontro.

Fonte: o próprio autor

2.2. Segunda Etapa

Para a continuação da próxima etapa, é importante que ocorra o *feedback* da primeira atividade, pois o mesmo irá auxiliar a continuidade da etapa seguinte descrita no Quadro 05, onde novamente, na primeira coluna estão os itens contidos nesta etapa (como os objetivos, tema, procedimentos, etc.) e, ao lado, suas respectivas explicações e descrições.

Quadro 05 – Detalhamento da Etapa 2

Etapa 2 – Regras de derivação das funções polinomiais	
Atividade	Aula Expositiva: Regras de Derivação das funções polinomiais
Tema	Derivada de funções polinomiais
Objetivo Geral	Identificar e utilizar as regras de derivação de algumas funções polinomiais.
Objetivos Específicos	● Interpretar o método de obtenção de cada regra de derivação demonstrada; ● Compreender a aplicação direta das regras de derivação das funções matemáticas correspondentes.

<table>
<tr><td>Tempo previsto</td><td>2 aulas</td></tr>
<tr><td>Materiais Necessários</td><td>Computador; Datashow; Powerpoint; Folha de sulfite A4 (em branco); Lápis; Borracha.</td></tr>
<tr><td>Feedback</td><td>Recomenda-se que seja feito uma recapitulação do conceito formal da Derivada feito na etapa anterior por meio da solução da atividade proposta ao final da mesma.</td></tr>
<tr><td>Procedimentos Metodológicos</td><td>Aula expositiva dialogada com proposição de problemas contextualizados</td></tr>
<tr><td>Desenvolvimento do conteúdo</td><td>Indica-se iniciar a segunda etapa realizando-se o feedback do problema elucidado ao final da etapa anterior, para que assim, inicie a criação uma tabela das Derivadas de algumas funções propostas por meio das representações gráficas cartesianas e algébricas de limite, ocorrendo então um aprofundamento do conceito de Derivadas para algo mais familiar e manipulável com a representação da tabela construída.

Utilize a definição de Derivada por limite desenvolvida no encontro anterior para determinar algebricamente as Derivadas da tabela abaixo, que mostra na coluna esquerda as funções matemáticas e, ao lado direito, suas respectivas Derivadas escritas através da notação: F’ (x). Reforçamos o uso do registro algébrico, pois em muitos casos é a única representação que permite provar rigorosamente e possui maior eficácia no cálculo da Derivada num valor do domínio da função, complementando a informação de outra representação. Dessa forma construímos o registro tabular para ajudar na atribuição de significado a conceitos algébricos e determinar padrões e regularidade.

É importante ressaltar também a necessidade de apresentar a representação gráfica de cada uma das funções que desejamos derivar durante o processo algébrico de obtenção, visto que, ao utilizar uma representação gráfica facilita a interpretação para os alunos com dificuldades em Álgebra.

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{f(xo+h) \; - f(xo)}{h}\right)$$
<table>
<tr><th>F (x)</th><th>F’ (x)</th></tr>
<tr><td>x</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2x</td><td>2</td></tr>
<tr><td>x²</td><td>2x</td></tr>
<tr><td>x² + 2x</td><td>2x + 2</td></tr>
<tr><td>x³</td><td>3x²</td></tr>
<tr><td>x³ + x² + x</td><td>3x² + 2x + 1</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Durante a criação dessa tabela encontraremos, por meio do tratamento das representações algébricas de limite tendendo a 0 (zero), as regras de derivação correspondente às funções mais usuais da matemática, como: as exponenciais, trigonométricas, logarítmicas, etc. É importante ressaltar novamente a necessidade da diversidade representacional desse objeto matemático.

Exemplificando o processo de derivação da função f(x) = 2x por limite, temos que:
Primeiramente substituir f(x) por 2x no limite:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(2(x+h))-2x}{h}\right)$$

Simplificando a expressão dentro do limite:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{2x+2h-2x}{h}\right)$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{2h}{h}\right)$$

$$\lim_{h\to 0}(2)$$

Então:

$$F'(2x)=2$$

Por fim, vejamos o exemplo de obtenção da Derivada de f(x) = $x^3 + x^2 + x$ por limite:

Para encontrar a Derivada desta função usando a definição de Derivada como um limite, seguimos os seguintes passos:

Substituímos f(x + h) por ($x^3 + x^2 + x$), ficando:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f(x+h)=(x+h)^3+(x+h)^2+(x+h)$$

Realizando a expansão de cada termo temos:

	• Para o primeiro termo: $$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$ • Para o segundo termo: $$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$ • Para o terceiro termo: $$(x+h) = x + h$$ Agora, substituindo todos esses resultados: $$f(x+h) = \left(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3\right) + \left(x^2 + 2xh + h^2\right) + (x+h)$$ Subtraindo f(x + h) de f(x) obtemos: $$\left(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + x^2 + 2xh + h^2 + x + h\right) - \left(x^3 + x^2 + x\right)$$ Cancelando os termos iguais: $$3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2xh + h^2 + h$$ Colocando h em evidência: $$(3x^2 + 2x + 1)h + (3x + 1)h^2 + h^3$$ Dividindo por h a expressão toda do limite: $$(3x^2 + 2x + 1) + (3x + 1)h + h^2$$ Agora, tomando o limite quando h tende a zero obtemos: $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left((3x^2 + 2x + 1) + (3x + 1)h + h^2\right)$$ $$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$$
Registros de Representação	Algébrico, Gráfico, Língua natural e tabular

Semiótica utilizados	
Atividades Cognitivas da Semiose previstas	Formação do registro tabular e gráfico das funções analisadas Tratamento do registro gráfico e algébrico Conversão do registro gráfico para o algébrico e do algébrico para o tabular
Funções Pedagógicas previstas	Complementar (apoiar a aprendizagem do conceito abordado aproveitando as diferenças entre as representações algébrica, gráfica e tabular); Restringir (utilizando da representação tabular e língua natural para auxiliar no entendimento da representação gráfica e algébrica); Aprofundar (usando as representações tabulares em conjunto com as demais para uma compreensão mais profunda acerca do conceito abordado).
Avaliação	Por meio da análise da produção e conversão de registros de representações semióticas executadas pelos alunos ao resolverem as atividades deste encontro.

Fonte: o próprio autor

Para a continuação desta sequência, veremos a aplicação contextualizada das Derivadas na análise gráfica de pontos críticos em funções contínuas, portanto é de extrema importância a familiarização com os processos de obtenção das Derivadas e o entendimento do conceito visto nas atividades desenvolvidas até então.

2.3. Terceira Etapa

Nesse momento, já familiarizado com a obtenção da Derivada de funções, partiremos para a conceitualização de pontos críticos das funções (máximos e mínimos) detalhados abaixo.

Quadro 6 – Máximos e mínimos de uma função contínua

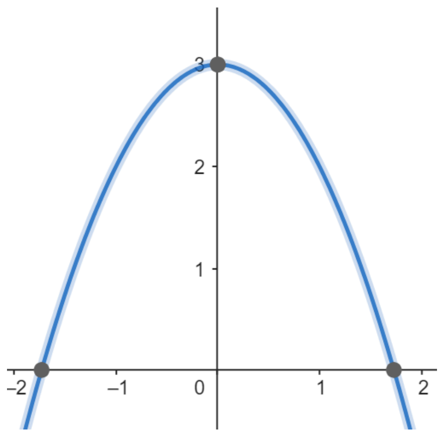
Etapa 3 – Máximos e Mínimos de uma função contínua	
Atividade	Aula expositiva: Máximos e mínimos de uma função contínua.
Tema	Análise de Pontos críticos de uma função.

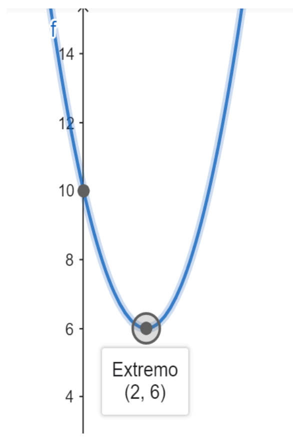
<table>
<tr><td>Objetivo geral</td><td>Aplicar os conceitos de Derivada a fim de encontrar pontos de máximos e mínimos numa função contínua.</td></tr>
<tr><td>Objetivos específicos</td><td>● Identificar a Derivada como ferramenta de análise de pontos críticos numa função contínua;

● Observar a aplicação prática do conceito de otimização utilizando as Derivadas.</td></tr>
<tr><td>Tempo previsto</td><td>2 aulas</td></tr>
<tr><td>Materiais necessários</td><td>Computador; Datashow; Powerpoint; Folha de sulfite A4 em branco; Lápis; Borracha.</td></tr>
<tr><td>Feedback</td><td>Sugiro uma retomada das regras de derivação descritas na tabela da etapa anterior e apresentação dos resultados gerais da lista de exercícios avaliativa da etapa anterior.</td></tr>
<tr><td>Procedimentos Metodológicos</td><td>Aula expositiva dialogada com proposição de problemas contextualizados</td></tr>
<tr><td>Desenvolvimento do conteúdo</td><td>

Utilizando da representação gráfica da função quadrática: $f(x) = -x^2 + 3x$, primeiramente com o auxílio do software GeoGebra, demonstrar a variação do valor da Derivada nos pontos crescentes e decrescentes pertencentes à função, até que essa, atinja um ponto crítico (no caso máximo) assim explanando que esse ponto crítico máximo é um ponto onde a Derivada (inclinação da reta tangente) dessa função tem valor = 0. Logo após, da mesma forma, acrescente a explicação da obtenção de um ponto mínimo numa função quadrática crescente (exemplo: $f(x)=x^2 -4x + 10$).

Para a elaboração das figuras abaixo no GeoGebra, acrescentamos cada uma das funções (primeiro a: $f(x) = -x^2 + 3x$ e em seguida a: $f(x)=x^2 -4x + 10$) na Calculadora Gráfica deste software e, para facilitar a visualização, na opção de configurações no canto superior direito da tela (ícone de uma engrenagem), na aba “malha”, tiramos a exibição de malha do gráfico.





Podemos perceber, então, que na primeira função onde a parábola possui sua concavidade voltada para baixo, o ponto máximo da função é seu vértice na coordenada (0, 3). Da mesma forma, na segunda parábola onde a concavidade está voltada para cima, o ponto mínimo que a função atinge é o vértice de coordenadas (2, 6).</td></tr>
</table>

Dessa forma, vamos encontrar os pontos críticos da função:

$$f(x) = 3x^3 + 9x^2 - 15$$

Primeiro passo é encontrar a Derivada dessa função polinomial:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(3x^3 + 9x^2 - 15) = 9x^2 + 18x$$

Agora, para encontrar os pontos críticos, igualamos a zero a função Derivada:

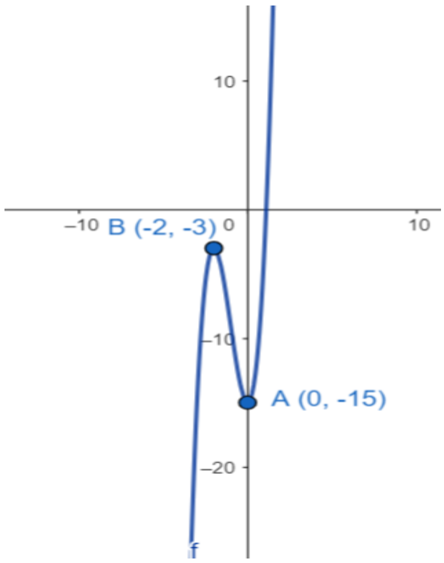
$$9x^2 + 18x = 0$$

Resolvendo temos: $x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2$

Finalmente, para obter os valores de f(x) desses pontos, basta substituir ambos valores encontrados para x na função inicial. Obtendo portanto os pontos: A (0, -15) e B (-2, -3).

Optamos pela utilização do registro gráfico pois é intuitivo e de fácil interpretação e auxilia a compreensão e visualização dos conceitos, porém não proporciona necessariamente valores exatos e o uso isolado pode não ser suficiente para a aprendizagem, dessa forma, complementamos com o algébrico.

Agora, com o auxílio da representação gráfica desta função obtida no *software* GeoGebra, fica claro percebermos que, claramente, esses são os pontos críticos da curva descrita por esta função.



Perceba que A é um ponto de mínimo local, e B um ponto de

	máximo local. A função em questão cresce e decresce infinitamente no conjunto dos números reais. Para finalizar a etapa, é proposto a criação do gráfico, a partir dos pontos críticos, da função: $f(x)= x^3 + 3x^2$. Reforçamos, então, a importância da utilização dos registros algébricos sendo reforçados pelos registros gráficos durante as etapas de ensino da obtenção desses pontos máximos e mínimos.
Principais registros de representação semiótica utilizados	Registro Algébrico, Gráfico e Língua natural
Atividades Cognitivas da Semiose previstas	Formação dos registros algébricos e gráficos Tratamento do registro algébrico Conversão do registro algébrico para o gráfico
Funções pedagógicas previstas	Restringir (utilizando da representação gráfica para auxiliar no entendimento da representação algébrica); Aprofundar (usando as representação algébrica para uma compreensão mais profunda acerca do conceito abordado).
Avaliação	Por meio da análise da produção e conversão de registros de representações semióticas executadas pelos alunos ao resolverem as atividades deste encontro.

Fonte: o próprio autor.

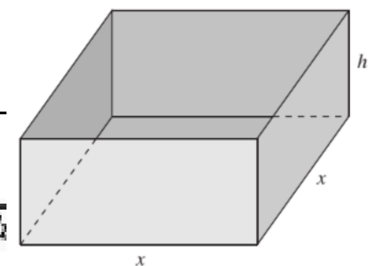
As duas etapas a seguir são atividades práticas envolvendo situações de otimização que necessitam da aplicação dos conceitos visitados nas etapas anteriores. Para os próximos encontros, o *feedback* da terceira atividade é de extrema importância, visto que, elucida uma resolução de uma situação com a Derivada sendo ferramenta chave.

2.4. Quarta Etapa

Nesta etapa, iniciaremos algumas aplicações práticas da área da Matemática que envolvem os conceitos de otimização. Nos problemas desse tema, frequentemente utilizamos Derivadas para encontrar máximos e mínimos de funções (conteúdo trabalhado ao longo das etapas). O Quadro 7 abaixo detalha o desenvolvimento desta etapa das atividades.

Quadro 7 – Otimização do volume de uma caixa

Etapa 4 – Otimização do volume de uma caixa	
Atividade	Prática: Otimização do volume de uma caixa
Tema	Utilização do conceito de Derivada aplicado ao máximo de uma função volume do sólido geométrico.
Objetivo geral	Aplicar os conceitos de derivação para obter pontos críticos de máximos e mínimos para resolver uma situação problema.
Objetivos específicos	● Investigar o problema de otimização do espaço para comportar um volume máximo; ● Compreender o processo de obtenção dos pontos máximos e mínimos de uma função através da derivação;
Tempo previsto	2 aulas
Materiais necessários	Computador; *Datashow*; *Powerpoint*; Folha de sulfite A4 em branco; Lápis; Borracha.
Feedback	Explanação sobre a obtenção por meio dos pontos críticos do gráfico da função: $f(x)= x^3 + 3x^2$. Retomando assim, o problema proposto no final da última etapa.
Procedimentos Metodológicos	Aula expositiva dialogada com proposição de problemas contextualizados
Desenvolvimento do conteúdo	Inicialmente, iremos fornecer o feedback do problema de criação de gráfico por meio da obtenção dos pontos críticos da etapa anterior. Em sequência, faremos a introdução dos fenômenos de otimização direcionados aos estudos do cálculo de Derivadas. A otimização é um ramo fundamental da matemática aplicada e da ciência da computação que se dedica a encontrar as melhores soluções para problemas de decisão onde ocorre a busca da maximização ou da minimização de uma situação. Nos problemas de otimização, frequentemente utilizamos Derivadas para encontrar máximos e mínimos de funções. Para isso, é necessário encontrar a Derivada da função objetivo e igualá-la a zero para encontrar os pontos críticos. Uma das aplicações mais comuns do Cálculo é a determinação de valores ótimos (mínimos ou máximos). Antes de aprender um método geral para resolver problemas de otimização, considere o seguinte exemplo: “Um fabricante quer projetar uma caixa aberta que possui uma base quadrada e uma área de superfície de 108 polegadas quadradas, como mostra a Figura 3.31. Quais dimensões produzem a caixa com volume máximo?” (Larson, 2010, p.217).



Caixa aberta com base quadrada

Fonte: Larson, 2010, p.217.

Solução: Como a base da caixa é quadrada, seu volume é:

$V = x^2 . h$.

Essa equação é chamada de **equação primária** porque oferece uma fórmula para a quantidade a ser otimizada. A Área de superfície da caixa é:

S = (Área da base) + (Área dos quatro lados)

$108 = x^2 + 4.x.h$ (Equação secundária)

Como V (volume) deve ser otimizado, é útil expressar V como uma função de apenas uma variável. Para isso, usando a equação secundária da Área superficial, vamos isolar *h* em termos de *x*.

$$108 = x^2 + 4.x.h$$

$$108 - x^2 = 4.x.h$$

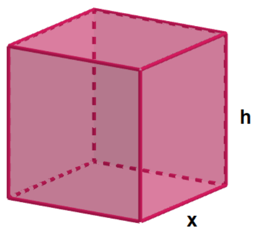
$$h = \frac{108 - x^2}{4x}$$

Inserindo o valor de *h* na equação primária obtemos:

$$V = x^2 \cdot h$$

$$h = \frac{108 - x^2}{4x}$$

$$V = x^2\left(\frac{108 - x^2}{4x}\right)$$

	$$V = 27x - \frac{1}{4}x^3$$ Agora, para maximizar o volume, derivamos V em relação a x e igualamos a zero. Encontrando o valor da dimensão x da caixa que produz o volume máximo, retorna-se para a equação da altura: $$h = \frac{108 - x^2}{4x}$$ Após a demonstração da maximização de um sólido, propomos o seguinte problema: “Sabendo que um sólido retangular (base quadrada) possui uma área de superfície de 100 metros quadrados para ser construído (desconsidere a face superior do sólido)”. **Determine as dimensões que produzem o volume máximo neste sólido.**  **Fonte:** os autores.
Principais registros de representação semiótica utilizados	Registro Algébrico, Figural e Língua natural
Atividades Cognitivas da Semiose previstas	Formação do registro figural e algébrico Tratamento do registro algébrico Conversão do registro figural para o algébrico
Funções pedagógicas previstas	Restringir (utilizando da representação figural para auxiliar no entendimento da representação algébrica); Aprofundar (usando as representação algébrica para uma compreensão mais profunda acerca do conceito abordado).
Avaliação	Por meio da análise da produção e conversão de registros de representações semióticas executadas pelos alunos ao resolverem as atividades deste encontro. Também por entrevista a respeito das representações utilizadas na resolução da atividade prática.

Fonte: o próprio autor.

2.5. Quinta Etapa

Finalizando então a sequência de atividades, a quinta atividade irá lidar com outra situação de otimização, desta vez, num contexto empresarial envolvendo lucro.

Quadro 8 – Otimização do lucro de uma empresa

Etapa 5 – Otimização do lucro de uma empresa	
Atividade	Prática: Otimização do lucro de uma empresa
Tema	Utilização do conceito de Derivada aplicado ao máximo de uma função lucro de uma empresa
Objetivo geral	Aplicar os conceitos de derivação para obter pontos críticos de máximos e mínimos para resolver uma situação problema.
Objetivos específicos	● Investigar o problema de otimização do lucro de uma empresa a fim de maximizar seus ganhos; ● Compreender o processo de obtenção dos pontos máximos e mínimos através da derivação;
Tempo previsto	2 aulas
Materiais necessários	Computador; *Datashow*; *Powerpoint*; Folha de sulfite A4 em branco; Lápis; Borracha; Calculadora.
Feedback	Explanação sobre a situação-problema da etapa anterior: "Quais dimensões produzem então a caixa com volume máximo?".
Procedimentos Metodológicos	Aula expositiva dialogada com proposição de problemas contextualizados
Desenvolvimento do conteúdo	O lucro é um dos principais indicadores financeiros de uma empresa e reflete a eficácia da gestão em gerar valor a partir de suas operações. É essencial para a sustentabilidade e crescimento de qualquer negócio. Em termos empreendedores, matematicamente, o lucro de uma empresa pode ser definido como a diferença entre a receita total (R) e o custo total (C). Em termos simples, a fórmula para calcular o lucro (L) é: **L = R – C** Por sua vez, a receita é o total de dinheiro que a empresa recebe pela venda de seus produtos ou serviços. A receita pode ser calculada pela multiplicação do preço de venda (P) pela quantidade de unidades vendidas (x). A receita então é: **R(x) = P. x**. Os custos são as despesas totais incorridas pela empresa para produzir e vender seus produtos ou serviços. Os custos podem ser divididos em dois tipos principais: ● **Custos Fixos (CF):** São os custos que não variam com o nível de produção ou vendas, como aluguel, salários de

funcionários administrativos, seguros, etc.

● **Custos Variáveis (CV):** São os custos que variam diretamente com o nível de produção, como matérias-primas, mão-de-obra direta, custos de energia, etc.

Portanto, o custo total (C) é a soma dos custos fixos e variáveis e, como o CV varia conforme são produzidas as unidades, temos: **C(x) = CV.x + CF**.

Aplicando esses conhecimentos, podemos pensar que, num determinado mês, uma siderúrgica fabrica pistões para montadoras de motores automotivos. O custo fixo mensal de R$950,00 inclui conta de energia elétrica, de água, impostos, salários e etc. Existe também um custo variável que depende da quantidade de pistões produzidos, sendo a unidade R$41,00. Considerando que o valor de venda de cada pistão no mercado seja equivalente a R$120,00.

Quantas peças, no mínimo, precisam ser vendidas para que se tenha lucro?

Para determinar a quantidade mínima de peças que precisam ser vendidas para que a siderúrgica tenha lucro, precisamos encontrar o ponto de equilíbrio, ou seja, o número de peças onde a receita iguala os custos totais. Em outras palavras, L(x) = 0:

L(x) = R(x) – C(x)

0 = P.x – [(CV.x) + CF]

Substituindo pelos valores do enunciado:

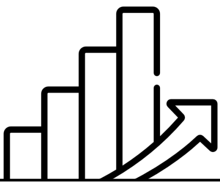
0 = 120x – (41x + 950)

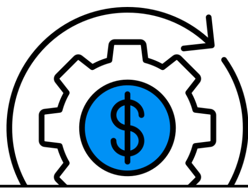
120x = 41x + 950

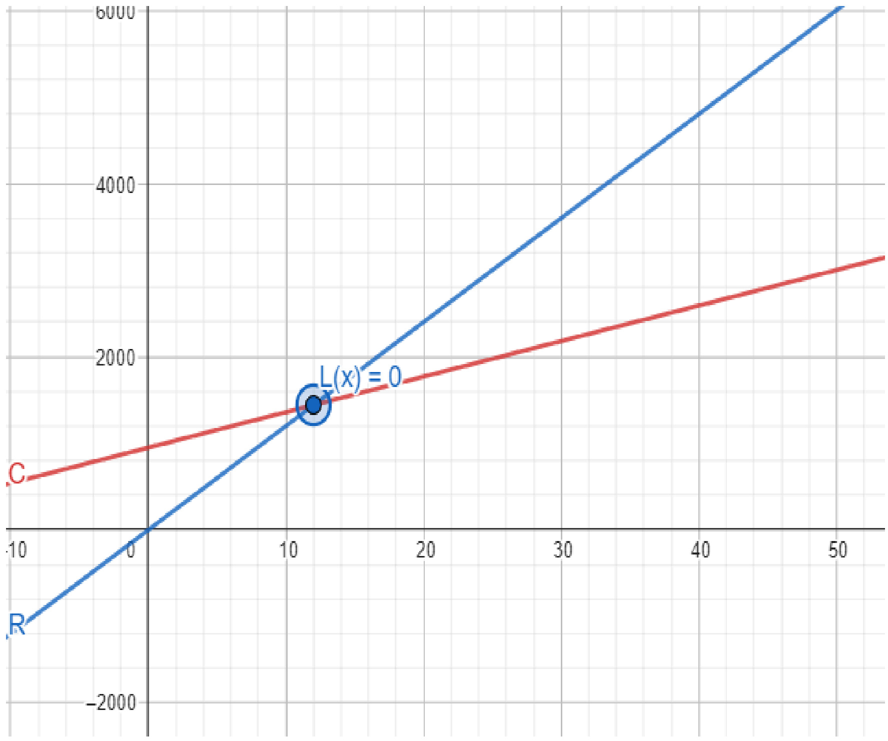
x ≈ 12,03

Como não podemos vender uma fração de peça, arredondamos para o número inteiro mais próximo. Portanto, a siderúrgica precisa vender pelo menos **13 pistões** para ter lucro.

Observe graficamente, com o auxílio do *software* GeoGebra, o que ocorre quando inserimos as funções Receita e Custo (em R$) dessa empresa numa representação gráfica. Perceba que o eixo das abscissas é entendido como unidades produzidas em relação às duas funções, sendo a intersecção o ponto de Lucro = 0







Fonte: os próprios autores.

Ressalta-se que, a optar pelo uso do registro gráfico é intuitivo e de fácil interpretação e auxilia a compreensão e visualização dos conceitos porém não proporciona necessariamente valores exatos e o uso isolado pode não ser suficiente para a aprendizagem, dessa forma, complementamos com o algébrico.

Analise agora a seguinte situação: Você quer empreender no ramo da fabricação de sapatos, então, inicialmente analisa a receita e os custos de uma empresa.

A receita da venda de sapatos podemos entender como a função: **R(x) = 10x**, onde x representa milhares de sapatos.

O custo então da produção de sapatos é compreendido pela função: **C(x) = x³ -6x² + 15x**, com x sendo novamente milhares de sapatos.

Sabendo que o lucro dessa empresa é: **L(x) = R(x) - C(x)** e, utilizando seus conhecimentos de otimização trabalhados até então, responda:

Na produção de quantos milhares de sapatos essa empresa atingirá seu lucro máximo?

Principais registros de representação semiótica utilizados	Registro Algébrico, Gráfico e língua natural
Atividades Cognitivas da semiose previstas	Conversão do registro em língua natural para o algébrico; Tratamento do registro algébrico; Conversão do registro algébrico para o gráfico.
Funções pedagógicas previstas	Aprofundar (usando as representações algébricas para uma compreensão mais profunda acerca do conceito abordado); Complementar (apoiar a aprendizagem do conceito abordado aproveitando as diferenças entre as representações algébrica e gráfica).
Avaliação	Ocorrerá por meio dos registros produzidos pelos alunos ao final da atividade e via lista de exercícios (presente no Apêndice A) à respeito das temáticas abordadas em todas etapas. Também por entrevista com os participantes a respeito das representações utilizadas na resolução da atividade final do encontro.

Fonte: o próprio autor.

RELATO DE IMPLEMENTAÇÃO

O desenvolvimento deste PE ocorreu por meio de um processo articulado de organização e planejamento entre os autores (orientando e orientador) e os professores da universidade na qual a SA foi validada. Esses docentes disponibilizaram o espaço de suas aulas para a realização da pesquisa junto aos estudantes do primeiro ano do curso de Matemática (Licenciatura). Ressalta-se que a escolha desse grupo de participantes se justifica pelo fato de ainda não terem cursado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, prevista na grade curricular apenas a partir do segundo ano, o que garante que a experiência vivenciada estivesse livre de influências prévias relacionadas ao conteúdo investigado.

A implementação da sequência ocorreu em quatro encontros presenciais, um encontro síncrono via *Google Meet* e uma atividade assíncrona. As cinco atividades propostas na sequência foram todas desenvolvidas presencialmente em sala de aula. Os dois primeiros encontros tiveram caráter introdutório, com foco em uma abordagem mais teórica e explicativa do conteúdo. No terceiro encontro, buscou-se mobilizar as habilidades trabalhadas anteriormente, direcionando-as para a prática do conceito de Derivada. Já o quarto e último encontro, realizado em um período estendido de quatro aulas cedidas pelo professor responsável, foi dedicado à resolução das duas últimas etapas, centradas em situações-problema aplicadas ao tema das Derivadas.

Quanto ao encontro síncrono, após finalizar a implementação da sequência de atividades, foi realizada uma aula expositiva à respeito das teorias que fundamentam esse estudo (TRRS e MR). O objetivo principal que permeia esta aula é de introduzir os participantes do estudo – futuros professores – a essas teorias da aprendizagem matemática, para que assim possam expandir seus conhecimentos metodológicos para a profissão a qual estão licenciando.

Por fim, a última etapa da implementação foi uma lista de exercícios enviada de forma assíncrona visando reforçar as habilidades trabalhadas na sequência. Vale ressaltar que essa lista está prevista como meio avaliativo da quinta e última etapa do PE.

De modo geral, o processo transcorreu conforme o planejado: a maioria dos participantes desenvolveu as atividades propostas com elevado engajamento, contribuindo para tornar as aulas mais dinâmicas por meio de dúvidas, questionamentos e discussões. O principal desafio enfrentado, entretanto, foi a evasão e a ausência de alguns estudantes ao longo dos encontros. Parte dos licenciandos faltou em um dos dias da aplicação, não fazendo parte da pesquisa, assim como uma outra parte compareceu apenas no primeiro encontro e, por motivos diversos, desistiram posteriormente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o objetivo de facilitar a aprendizagem de Cálculo, foram adotadas várias estratégias na elaboração desta Sequência de Atividades, abordando diferentes enfoques para motivá-los a aprender e buscar conhecimento. Uma das abordagens utilizadas foi relacionar o conteúdo derivado de uma variável com os referenciais da TRRS e das MR, combinando-as com situações práticas durante as atividades. Essa abordagem permitiu que os alunos mobilizassem diversas formas de representar o conteúdo específico, enriquecendo o aprendizado por meio da diversidade representacional.

Além disso, a contextualização teórica se mostrou de bastante importância para estimular o aprendizado do objeto matemático, compreendendo o que é uma Derivada, sua interpretação e aplicações práticas auxiliou na compreensão do conteúdo, auxiliando tanto o professor em seu processo pedagógico quanto incentivando o aluno a buscar mais conhecimento. Acreditamos que a combinação desses referenciais teóricos com a abordagem da Sequência de Atividades pode contribuir efetivamente para o desenvolvimento da aprendizagem em Matemática dos estudantes.

Portanto, espera-se que este material sirva como um guia para o aprimoramento do ensino de Matemática, mais especificamente do Cálculo Diferencial e Integral, estimulando o interesse dos alunos e tornando a aprendizagem mais envolvente.

REFERÊNCIAS

AINSWORTH, S. The functions of multiple representations. **Computers & education,** v. 33, n. 2-3, p. 131-152, 1999.

AINSWORTH, S. DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. **Learning and instruction**, v. 16, n. 3, p. 183-198, 2006.

AINSWORTH, S. **The educational value of multiple-representations when learning complex scientific concepts**. In J. K. Gilbert, M. Reiner, & M. Nakhleh (Eds.), Visualization: Theory and practice in science education (p. 191–208). New York: Springer, 2008.

AINSWORTH, S. The multiple representations principle in multimedia learning. In R. E. Mayer (Ed**.), The Cambridge handbook of multimedia learning** (2nd ed). Cambridge: Cambridge University Press. 2014, p.464–486.

BARROS, J. J. T. D. V. **As representações no ensino e na aprendizagem da derivada de uma função: um estudo com alunos do 11.o ano de escolaridade**. 2014. 98p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário) - Universidade do Minho, Braga, Portugal, 2014. Disponível em: <https://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/37760>. Acesso em: 18 jul. 2024.

BENTO, J. R. **As Representações semióticas e a Comunicação na aprendizagem da Matemática: uma experiência com alunos do 10º ano no âmbito do estudo das transformações geométricas de gráficos de funções.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário) - Universidade do Minho, Braga, 2022.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano; registro semiótico e aprendizagens intelectuais**. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Maria Rosâni Abreu da Silveira – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R.; Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

FARIA, R. A.; LABURÚ, C. E. Conexão entre múltiplas representações em atividades de função polinomial do 1º Grau. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, v.16, p.310-325, 2021.

LABURÚ, C. E.; FARIA, R. A. Coordenação e Multiplicidade Representacional em uma atividade de Função do 1° grau. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 7, n. 13, p.61-86, 2018.

LABURÚ, C. E.; SILVA, O. H. M. Multimodos e múltiplas representações: fundamentos e perspectivas semióticas para a aprendizagem de conceitos científicos. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 16, n. 1, p. 7-33, 2011.

LARSON, R. Cálculo aplicado: curso rápido. Tradução: All Tasks. São Paulo: **Cengage Learning**. São Paulo, 2010.

LEMKE, J. L. Teaching all the languages of science: Words, symbols, images, and actions. In: **Conference on Science Education in Barcelona**. 1998a.

LEMKE, J. L. Multiplying meaning: Visual and verbal semiotics in scientific text. In: MARTIN, J.; (EDS.), R. V. **Reading science**. London: Routledge, 1998b. p. 87-113.

MORETTI, M. T. O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática. **Revista Contrapontos**, v. 2, n. 3, p. 343-362, 2002.

TREVISAN SANZOVO, D. **Níveis Interpretantes alcançados por estudantes de licenciatura em ciências biológicas acerca das Estações do Ano por meio da utilização da estratégia de Diversidade Representacional: uma Leitura Peirceana para sala de aula.** 2017. 192p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

VISEU, F. Representações na aprendizagem da derivada de uma função por alunos do ensino secundário. **Zetétike**, Campinas, v.25, n.2, p.265-288, 2017.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Lista de Exercícios da Etapa 5:

APRENDIZAGEM DE DERIVADAS COM BASE NA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E NAS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES

1) Encontre a Derivada das funções abaixo por meio do limite de aproximação tendendo a zero visitado em nossos primeiros encontros:

A) $f(x) = 4x^2 - 1$

B) $f(x) = x^3 + x$

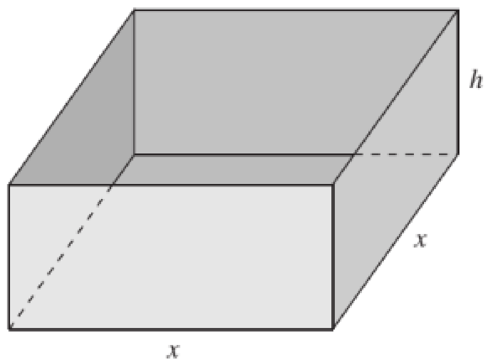
2) Defina analiticamente os pontos críticos das curvas abaixo, indicando quais momentos o gráfico indica concavidade voltada para cima ou para baixo.

A) $f(x) = x^2 - x - 2$

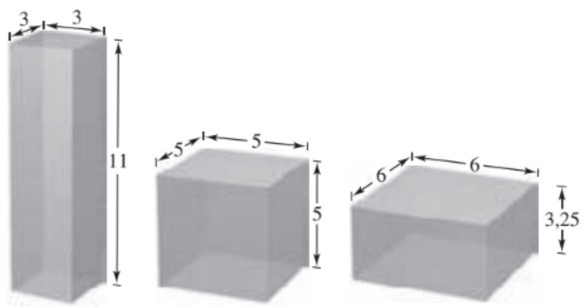
B) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$

C) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x - 1$

3) Determine as dimensões de um sólidos retangular (com uma base quadrada) com volume máximo, sendo sua área superficial de 337,5 centímetros quadrados.



4) Analise a figura a seguir:



A) Verifique se cada um dos sólidos retangulares possui uma área de 150 polegadas quadradas (lembrando que a unidade de medida de suas dimensões é a polegada).

B) Determine o volume de cada objeto.

C) Determine as dimensões que maximizam o volume possível de um destes sólidos retangulares com área de superfície de 150 polegadas quadradas.

ANEXOS

ANEXO A

Ementa da Disciplina de CDI-I da Universidade de aplicação

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I

Carga horária: 120	Teórica: 120	Prática:	PCC:	AEX:	TICS/EAD: vide item 8

Ementa: Limite e continuidade de funções reais. Diferenciação de funções reais e suas aplicações. A integral de funções de uma variável e suas aplicações. Técnicas de integração. Equações diferenciais simples: método da separação de variáveis.

Bibliografia Básica:

BOULOS, P. **Cálculo Diferencial e Integral, v.1**. São Paulo: MKRON Books, 1999.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo, Vol. I**. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 2016.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 1**. 3. ed. São Paulo. ed. Harbra. 2017.

STEWART, J. **Cálculo, Vol. 1**. 8. ed. São Paulo: Cengage, 2017.

Bibliografia Complementar:

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração**. 5. ed. São Paulo: Makron, 1992.

IEZZI, G. *et al.* **Fundamentos de Matemática Elementar**, Vol. I a X, (ou Série Compacta), São Paulo: Atual Editora Ltda1985.

KAPLAN, W. **Cálculo Avançado**. 7. reimp. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1991.

LARSON, R.; HOSTETLER, R. P.; EDWARDS, B. H. **Cálculo, v.1**. 8. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

SIMMONS, J. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Editora McGraw Hill, 1987.

STEWART, J. **Calculus: Concepts and contexts**. Cengage Learning, 2009.