

Universidade Estadual do Norte do Paraná

Repositório Institucional UENP

<https://repositorio.uenp.edu.br>

Programa de Pós-Graduação em Ensino

Dissertações

2024

Trigonometria para o ensino médio: sequência de atividades pautada na teoria dos registros de representação semiótica e nas múltiplas representações

Goes, Ana Lara de

Universidade Estadual do Norte do Paraná

<https://repositorio.uenp.edu.br/handle/123456789/353>

Baixado de Repositório Institucional UENP



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE
DO PARANÁ**

Campus Cornélio Procópio

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO**

ANA LARA DE GOES

**TRIGONOMETRIA PARA O ENSINO MÉDIO:
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PAUTADA NA TEORIA DOS
REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E NAS
MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES**

ANA LARA DE GOES

**TRIGONOMETRIA PARA O ENSINO MÉDIO:
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PAUTADA NA TEORIA DOS
REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E NAS
MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná – *Campus* Cornélio Procópio, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Trevisan Sanzovo

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Ciências Naturais e Matemática

CORNÉLIO PROCÓPIO – PR
2024

Ficha catalográfica elaborada por Juliana Jacob de Andrade - Bibliotecária, CRB/9 - 1669, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UENP

G598t GOES, Ana Lara de
Trigonometria para o ensino médio: sequência de atividades pautada na teoria dos registros de representação semiótica e nas múltiplas representações. / Ana Lara de GOES; orientador Daniel Trevisan Sanzovo - Cornélio Procópio, 2024.
133 p. :il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino) - Universidade Estadual do Norte do Paraná, Centro de Ciências Humanas e da Educação, Programa de Pós Graduação em Ensino, 2024.

1. Trigonometria. 2. Ensino Médio. 3. Teoria dos Registros de Representação Semiótica. I. Sanzovo, Daniel Trevisan, orient. II. Título.

CDD: 372.011

ANA LARA DE GOES

**TRIGONOMETRIA PARA O ENSINO MÉDIO:
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PAUTADA NA TEORIA DOS
REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E NAS
MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná – *Campus* Cornélio Procópio, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino.

Após realização de Defesa Pública o trabalho foi considerado:

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Daniel Trevisan Sanzovo
Universidade Estadual do Norte do Paraná - UENP

Profa. Dra. Michele Regiane Dias Veronez
Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR

Prof. Dr. Lucken Bueno Lucas
Universidade Estadual do Norte do Paraná - UENP

Cornélio Procópio, 15 de março de 2024.

Dedico este trabalho a minha avó
Maria (*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

À Deus pela sua graça em me auxiliar a enfrentar diariamente os desafios que surgiram ao longo da minha jornada.

Aos meus pais e minha irmã que vivenciaram esta jornada com a mesma intensidade que eu.

Ao meu namorado pelo incentivo constante, por estar ao meu lado em todas as situações e pela prontidão em me ajudar nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Daniel Trevisan Sanzovo, expresso minha sincera gratidão por conduzir com dedicação e comprometimento o meu crescimento profissional e pessoal. Sua paciência, responsabilidade e orientação foram fundamentais para o meu desenvolvimento. Agradeço imensamente pela confiança que depositou em mim e por compartilhar valiosos ensinamentos.

Aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Lucken Bueno Lucas e Profa. Dra. Michele Regiane Dias Veronez, gostaria de expressar minha profunda gratidão pelas valiosas contribuições que forneceram durante este processo. Suas avaliações e sugestões foram fundamentais para enriquecer meu trabalho. Também gostaria de estender meus agradecimentos aos Grupos de Pesquisa em Ensino e Formação de Professores (GPEFOP) e Ensino de Ciências e Matemática (GPECEM) da Universidade Estadual do Norte do Paraná. Os pesquisadores participantes desses grupos forneceram importantes experiências e contribuições que enriqueceram minha pesquisa de maneira significativa.

Agradeço a todos os professores, funcionários e colegas do PPGEN-UENP pela colaboração e troca de conhecimentos ao longo desta trajetória acadêmica.

Agradeço imensamente ao Colégio de Ensino Médio Cambará pelo apoio e acolhida.

GOES, Ana Lara de. **Trigonometria**: uma sequência de atividades pautada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Múltiplas Representações para o Ensino Médio. 2023. 133 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino) – Universidade Estadual do Norte do Paraná, Cornélio Procópio, 2024.

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma proposta de ensino de Trigonometria destinada a estudantes do Ensino Médio, fundamentada nos princípios da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e das Múltiplas Representações. Seu principal objetivo consistiu em desenvolver, aplicar e analisar uma sequência de atividades que permite trabalhar conceitos de Trigonometria na Educação Básica em diversas situações funcionais, alinhados às teorias supracitadas. A presente pesquisa foi desenvolvida com base nos pressupostos da pesquisa qualitativa e para a análise dos dados foram utilizadas a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Análise de Conteúdo, explorando os registros produzidos pelos alunos na resolução das atividades propostas em cada uma das quatro etapas da sequência de atividades. Os participantes desta pesquisa foram alunos do 2^a ano do Ensino Médio de uma escola particular do norte do Paraná. A análise dos dados indicou que os aprendizes mobilizaram coordenadamente ao menos dois registros de representação distintos e que iniciavam suas resoluções sempre por representações familiares, bem como correlacionavam as situações propostas na sequência de atividades com conteúdos matemáticos já estudados anteriormente e resgatavam assuntos de Geometria, técnicas de transformação de medidas e da própria Trigonometria, conferindo um aprofundamento da aprendizagem.

Palavras-chave: Sequência de atividades. Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Múltiplas Representações. Trigonometria. Ensino Médio.

GOES, Ana Lara de. Trigonometry: a sequence of activities based on the theory of registers of semiotic representation and multiple representations. 2023. 133 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino) – Universidade Estadual do Norte do Paraná, Cornélio Procópio, 2024.

ABSTRACT

This dissertation presents a proposal for teaching Trigonometry to high school students, grounded in the principles of the Theory of Registers of Semiotic Representation and Multiple Representations. Its main objective was to develop, apply, and analyze a sequence of activities that allowed working with Trigonometry concepts in Basic Education through various functional situations, aligning with the aforementioned theories. The present research was conducted based on the assumptions of qualitative research, and for data analysis, the Theory of Registers of Semiotic Representation and Content Analysis were employed, exploring the registers produced by students during the resolution of proposed activities in each of the four stages of the sequence of activities. The participants in this research were second-year high school students at a private school in Northern Paraná. Data analysis indicated that students consistently mobilized at least two distinct representation registers and initiated their resolutions by using familiar representations. Additionally, they correlated the situations proposed in the sequence of activities with mathematical content previously studied and recalled Geometry topics, measurement transformation techniques, and Trigonometry, providing a deepening of learning.

Key words: Sequence of activities. Theory of Registers of Semiotic Representation. Multiple Representations. Trigonometry. High school.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Distinção entre os tipos de transformações das representações semióticas	24
Figura 2 – Uso coordenado dos registros de representação semiótica no livro Matemática em contextos.....	27
Figura 3 – As funções pedagógicas das Múltiplas Representações	31
Figura 4 – Passos da Revisão Sistemática de Literatura.	38
Gráfico 1 – Distribuição dos trabalhos por objeto do conhecimento da RSL.....	53
Figura 5 – Categorias e subcategorias da RSL.....	54
Figura 6 - Tipo de registro de representação semiótica mobilizado por trabalho da RSL	55
Figura 7 – Resolução do problema 1 da dupla EL	65
Figura 8 – Resolução do problema 2 da dupla EL	65
Figura 9 – Resolução do problema 1 da dupla AML	67
Figura 10 – Resolução do problema 2 da dupla AML	68
Figura 11 – Resolução do problema 1 da dupla LP	70
Figura 12 – Resolução do problema 2 da dupla LP	71
Figura 13 – Resolução do problema 1 da dupla AMA	72
Figura 14 – Resolução do problema 2 da dupla AMA	73
Figura 15 - Resolução do problema 1 da dupla BJ	75
Figura 16 – Resolução do problema 2 da dupla BJ.....	76
Figura 17 – Resolução do problema 1 da dupla GL	77
Figura 18 – Resolução do problema 2 da dupla GL	79
Figura 19 – Resolução da etapa 2 do grupo MLJB.	81
Figura 20 – Resolução da etapa 2 do grupo GALP.....	83
Figura 21 – Resolução da etapa 2 do grupo ELAM.....	85
Figura 22 – Resolução da aluna LZ	89
Figura 23 – Resolução da aluna EN.....	90
Figura 24 – Resolução da aluna AT	92
Figura 25 - Resolução do aluno PA.....	94
Figura 26 – Resolução do aluno GG	95
Figura 27 – Resolução do aluno LH	97
Figura 28 – Resolução da aluna ML.....	98

Figura 29 – Resolução da aluna AR.....	100
Figura 30 – Resolução do aluno MA.....	101
Figura 31 – Resolução do aluno LN.....	102
Figura 32 – Resolução do aluno JP.....	104
Figura 33 – Resolução da aluna BA.....	105
Figura 34 – Resolução da etapa 4 do grupo MLJB.....	107
Figura 35 - Resolução da etapa 4 do grupo GALP.....	109
Figura 36 – Resolução da etapa 4 do grupo ELAM.....	111

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Classificação das representações	21
Quadro 2 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática)	25
Quadro 3 – Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações.....	41
Quadro 4 – Portal de Periódicos da CAPES	41
Quadro 5 – Artigos encontrados no Google Acadêmico	43
Quadro 6 – Dissertações encontradas no Google Acadêmico.....	44
Quadro 7 – Teses encontradas no Google Acadêmico.....	50
Quadro 8 – Estrutura geral da sequência de atividades.....	61
Quadro 9 – Análise da dupla EL.....	66
Quadro 10 – Análise da dupla AML.....	69
Quadro 11 – Análise da dupla LP.....	72
Quadro 12 – Análise da dupla LP.....	74
Quadro 13 – Análise da dupla BJ.....	77
Quadro 14 – Análise da dupla GL	79
Quadro 15 – Análise da etapa 2 do grupo MLJB.....	82
Quadro 16 – Análise da etapa 2 do grupo GALP.	85
Quadro 17 – Análise da etapa 2 do grupo ELAM	87
Quadro 18 – Análise da aluna LZ.....	90
Quadro 19 – Análise da aluna EN	92
Quadro 20 – Análise da aluna AT.....	93
Quadro 21 – Análise do aluno PA.....	95
Quadro 22 – Análise do aluno GG.....	96
Quadro 23 – Análise do aluno LH.....	98
Quadro 24 – Análise da aluna M	99
Quadro 25 – Análise da aluna AR.....	100
Quadro 26 – Análise do aluno MA	102
Quadro 27 – Análise do aluno LN	103
Quadro 28 – Análise do aluno JP.....	105
Quadro 29 – Análise da aluna BA	106
Quadro 30 – Análise da etapa 4 do grupo MLJB.....	109

Quadro 31 – Análise da etapa 4 do grupo GALP	111
Quadro 32 – Análise da etapa 4 do grupo ELAM.....	113

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AC	Análise de Conteúdo
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
MR	Múltiplas Representações
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNE	Plano Nacional de Educação
PPGEN	Programa de Pós-Graduação em Ensino
RCP	Referencial Curricular do Paraná
SA	Sequência de Atividades
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica
UENP	Universidade Estadual do Norte do Paraná

SUMÁRIO

1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	15
2	REFERENCIAL TEÓRICO	20
2.1	TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA (TRRS)	21
2.2	MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES (MR) E A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC).....	30
3	A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UMA REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA (RSL)	38
3.1	PRÉ-ANÁLISE.....	39
3.2	EXPLORAÇÃO DO MATERIAL DA RSL	40
3.3	ANÁLISE DE DADOS DA RSL	40
3.4	TRATAMENTO DOS RESULTADOS E INTERPRETAÇÕES DA RSL	52
3.5	CONSIDERAÇÕES FINAIS DA RSL	55
4	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	57
4.1	NATUREZA DA PESQUISA.....	57
4.2	PERFIL DOS PARTICIPANTES	58
4.3	DESENVOLVIMENTO DO PRODUTO EDUCACIONAL	59
4.4	INSTRUMENTOS PARA COLETA E ANÁLISE DE DADOS	62
5	APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS	64
5.1	ETAPA 1.....	64
5.2	ETAPA 2.....	80
5.3	ETAPA 3	88
5.4	ETAPA 4	107
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	114
	REFERÊNCIAS	115

APÊNDICES	121
APÊNDICE A – Declaração de Anuência da Instituição.....	122
APÊNDICE B – Termo de Assentimento Livre e Esclarecido	124
APÊNDICE C – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.....	126
ANEXOS	130
ANEXO A – Carta náutica do grupo MLJB – etapa 2	131
ANEXO B – Carta náutica do grupo GALP – etapa 2	132
ANEXO C – Carta náutica do grupo ELAM – etapa 2	133

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Conforme Silva e Lima (2021), a palavra 'Trigonometria' deriva do grego 'tri' (três), 'gonos' (ângulos) e 'metron' (medir) e é utilizada para se referir ao ramo da Matemática que trata de problemas que envolvem o cálculo das medidas dos lados e ângulos de um triângulo.

Segundo Ribeiro (2016), a construção de calendários, determinação das estações do ano, previsões de eclipses, sistemas de navegações e o estabelecimento do mês lunar são apenas alguns exemplos de problemas de Astronomia que somente puderam ser solucionados utilizando-se como ferramenta primeira a Trigonometria.

Da mesma maneira, Costa (2019) ressalta que os primeiros indícios do estudo da Trigonometria emergiram tanto no Egito quanto na Babilônia a partir de cálculos de semelhança de triângulos. Segundo esses autores, esse conhecimento ainda teria sido extensamente aplicado na construção de pirâmides e na elaboração de relógios de Sol.

Apesar do notável interesse dos babilônios pela Astronomia, foi na Grécia que ocorreu um avanço significativo tanto nessa ciência quanto na Trigonometria. Hiparco, possivelmente o mais proeminente astrônomo da antiguidade, desempenhou um papel fundamental nesse contexto. Por meio de suas observações, ele determinou o perigeu, o movimento médio da Lua e compilou um catálogo de 850 estrelas.

Hiparco também introduziu na Grécia a divisão do círculo em 360° e o método de localização de pontos na superfície da Terra por meio de latitudes e longitudes (Eves, 2011). Já a construção da 'tábua de cordas', que fornece os senos dos ângulos de 0° a 90° , é comumente atribuída a Hiparco e Ptolomeu.

Conforme a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) e o Referencial Curricular do Paraná (Paraná, 2018), o ensino da Trigonometria tem início nos anos finais do Ensino Fundamental (a partir do 9º ano) e fornece apoio aos conteúdos subsequentes no Ensino Médio.

É importante observar que os currículos escolares podem variar um pouco entre diferentes estados e escolas no Brasil. No entanto, ensino da Trigonometria acontece de forma gradual e geralmente inicia com conceitos fundamentais, como razões trigonométricas, identidades básicas e resolução de

triângulos simples. À medida que os alunos progredem, abordam tópicos mais avançados, como funções trigonométricas, gráficos trigonométricos, identidades trigonométricas mais complexas, e aplicações práticas desses conceitos.

Entretanto, durante minha experiência profissional, tenho constatado dificuldades por parte dos alunos em assimilarem conceitos de Trigonometria, principalmente devido à sua natureza abstrata. De acordo com Weber (2005), a Trigonometria é um tema de compreensão desafiadora, pois constitui um dos primeiros tópicos da Matemática que envolve o raciocínio algébrico, geométrico e gráfico. O autor conclui que muitos estudantes do Ensino Médio não estão familiarizados com esse tipo específico de raciocínio matemático.

Em seus estudos, W. Silva (2013), evidencia que os recursos didáticos voltados para a Trigonometria apresentam o conteúdo de forma excessivamente expositiva e técnica, carecendo de embasamento em contextos históricos e aplicações práticas no cotidiano. Para Brito e Morey (2004) o uso excessivo do formalismo impede que o aluno compreenda significativamente os conceitos de Trigonometria ou os aplique em diferentes contextos.

Ademais, os Parâmetros Curriculares Nacionais, propõe que a abordagem da Trigonometria deve estar associada à resolução de problemas de medições, especialmente no cálculo de distâncias inacessíveis e na elaboração de modelos que representem fenômenos periódicos (Brasil, 1998). Nesse contexto, entende-se que um projeto que integre outras áreas do conhecimento pode se revelar uma valiosa oportunidade para uma aprendizagem mais significativa, evitando, no entanto, um foco excessivo no cálculo algébrico de identidades e equações.

Em consonância a isso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), sugere que, para que alunos desenvolvam o pensamento matemático, é necessário utilizar representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e realizar a mobilização de ao menos dois registros de representação (Brasil, 2018).

Nessa perspectiva, ressaltamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) desenvolvida pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval (1995), a qual privilegia o uso da linguagem e das representações em atividades matemáticas.

Para Duval (2009), a Matemática apresenta dificuldades em todos os níveis de ensino e isso se deve ao fato dos objetos matemáticos não serem

diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, de modo que para se ter acesso a esses objetos é necessário representá-los.

Nesse contexto, a TRRS define as representações semióticas como o emprego de signos pertencentes a um sistema de representações, tais como uma figura geométrica, enunciado em língua natural, fórmula algébrica ou gráficos. Desta forma, a produção do conhecimento está diretamente ligada ao desenvolvimento das representações semióticas e a compreensão conceitual matemática implica no uso coordenado de ao menos duas representações semióticas distintas (Duval, 2009).

Segundo Duval (2003), um sistema semiótico é considerado um registro de representação semiótica se permitir três atividades cognitivas fundamentais ligadas à *semiósis*¹: formação de uma representação identificável, tratamento e conversão².

A TRRS, alinhada à BNCC, enfatiza a atividade cognitiva de conversão, visto que cada registro apresenta aspectos próprios que podem não ser suficientes para a compreensão integral do conteúdo matemático. Logo, pode não haver aprendizagem quando situações e atividades não levam em consideração a necessidade de vários registros de representação, bem como a sua conversão (Duval, 2012).

Nesse sentido, também evidenciamos o referencial das Múltiplas Representações (MR) que pode ser entendido como a interação, no discurso científico, de diferentes formas de representar um mesmo conceito (Tytler; Prain; Peterson, 2007). Dessa forma, Laburú e Silva (2011) propõem que o ensino pautado na pluralidade de representações se constitui em um mecanismo pedagógico fundamental, pois aprimora o processo de significação e oferece várias formas de interpretação e entendimento.

Klein (2011, p.40) sugere como linguagens de representação as “descritivas (verbal, tabular, gráfica, diagramática, fotográfica por mapas ou cartas), experimentais, figurativas (pictórica, analógica ou metafórica), gestuais ou corporais”. Assim, ao propor atividades em que o aluno apresente seu entendimento com representações distintas, possibilita coordenar, organizar, estruturar e aprimorar seus conhecimentos (Laburú; Silva, 2011).

¹ Como veremos adiante, *semiósis* é a apreensão ou a produção de uma representação semiótica (Duval, 2004).

² Cada uma delas (formação, tratamento e conversão) serão vistas em detalhes na seção teórica intitulada *Teoria dos Registros de Representação Semiótica*.

Posto isso, enfatizamos as três funções pedagógicas das MR propostas por Ainsworth (1999):

- a) Complementar: ao utilizar duas ou mais representações que se complementam e oferecem informações únicas sobre um fenômeno;
- b) Restringir: que utiliza uma representação familiar para induzir uma complexa;
- c) Aprofundar: relaciona duas ou mais representações para obter o conhecimento aprofundado sobre um domínio.

Laburú e Faria (2018) indicam que o alinhamento entre as MR e a TRRS pode proporcionar um entendimento conceitual mais amplo aos estudantes desde que seja contextualizada com a dificuldade do aluno.

Diante do exposto, realizou-se uma Revisão Sistemática de Literatura a respeito da TRRS e MR na Educação Matemática e foi constatada uma notável ênfase dos autores na abordagem do ensino de Álgebra, especificamente no objeto de conhecimento funções. Além disso, observou-se uma carência de publicações relacionadas ao ensino de Trigonometria.

Assim sendo, decidimos, nesta pesquisa, buscar respostas para a seguinte pergunta: *como uma sequência de atividades pautada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Múltiplas Representações pode favorecer a aprendizagem de alunos do 2ª ano do Ensino Médio a respeito do conteúdo de Trigonometria?*

Assim, os objetivos desta pesquisa consistem em:

- Realizar uma revisão bibliográfica para discutir outros trabalhos já publicados, cujo foco seja o uso da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e as Múltiplas Representações na Educação Matemática.
- Elaborar uma sequência de atividades para a aprendizagem de Trigonometria, incorporando os princípios da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e das Múltiplas Representações.
- Implementar a sequência de atividades desenvolvida em uma turma de 2ª ano do Ensino Médio.
- Analisar os resultados obtidos a partir das produções dos participantes da pesquisa, com ênfase nos registros produzidos pelos alunos durante a resolução das atividades.

A partir disso, esperamos com a aplicação desse Produto Educacional, proporcionar aos alunos estímulos que os levem a utilizar coordenadamente os diferentes registros de representação e construir uma visão mais integrada da Matemática com a realidade. Aos professores, buscamos oferecer recursos adicionais para o enriquecimento das aulas.

O presente estudo foi organizado em seis seções. Em sua introdução, já exposta, aborda-se a justificativa, a problemática envolvida no estudo e seu objetivo.

Na segunda seção é descrita a fundamentação teórica da pesquisa, no qual são apresentados aspectos sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, as Múltiplas Representações, a conexão dessas teorias com a Base Nacional Comum Curricular.

Na terceira seção apresentamos uma revisão sistemática de literatura que nos orientou quanto aos encaminhamentos da pesquisa.

A quarta seção é dedicada aos aportes metodológicos da pesquisa, incluindo-se seção detalhando o desenvolvimento do Produto Educacional.

Na quinta seção, apresentamos a análise dos dados. Em seguida, na sexta e última seção, são feitas as considerações finais do estudo. E, por fim, as referências trazem as obras que fundamentaram o desenvolvimento da pesquisa e do Produto Educacional.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A Educação Matemática pode ser considerada como um campo de estudos favorável à análise de atividades cognitivas fundamentais, tais como o raciocínio, resolução de problemas, conceitualização e compreensão de textos.

De modo particular, a aprendizagem da Matemática considera que essas atividades cognitivas necessitam do uso de sistemas de representações que vão além do que somente utilizar a linguagem natural ou imagens, sendo essa uma questão própria da natureza do funcionamento cognitivo do pensamento humano.

Em vista disso, Raymond Duval, filósofo e psicólogo francês, discute em suas obras, especialmente na intitulada *Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels* (Duval, 1995) que não se pode ter compreensão em matemática sem a distinção entre objeto e sua representação, pois um mesmo objeto matemático pode ser acessado por diferentes formas de representação, e evidencia a importância da sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) para pesquisas no âmbito da aprendizagem matemática.

Para além disso, Duval (2009) defende que toda confusão entre objeto e sua representação ocasiona a perda da compreensão ao longo do tempo, pois os conhecimentos vão se tornando inutilizáveis quando não inseridos em seus contextos de aprendizagem.

Nesse sentido, o autor ressalta que as representações semióticas são indispensáveis tanto para a comunicação das representações mentais quanto para o desenvolvimento da atividade matemática³, visto que a capacidade de efetuar tratamentos sobre seus objetos depende exclusivamente do sistema de representação semiótico utilizado.

Ciente da pluralidade potencial das diversas representações, recorreremos às ideias propostas por Shaaron Ainsworth (1999; 2006; 2014) acerca das funções pedagógicas das Múltiplas Representações (MR), no que se refere às diferentes formas de representar um mesmo objeto matemático. E com o intuito de alcançar o objetivo proposto de investigar como uma sequência de atividades

³ Entendemos por atividade matemática a capacidade e as maneiras, de domínio de um grupo cultural identificado, de observar, conjecturar, experimentar, inferir, classificar, ordenar, contar e medir, conforme proposto por D'Ambrosio (1988).

pautada na TRRS e MR pode auxiliar na aprendizagem de alunos do Ensino Médio sobre o conteúdo de Trigonometria, esta seção apresenta os pressupostos teóricos-metodológicos que sustentam nossos encaminhamentos.

Assim, na subseção 2.1, discorremos sobre a TRRS, versando sobre as representações semióticas e a aprendizagem, a classificação dos diferentes tipos de representação, as atividades cognitivas fundamentais de representação ligadas à *semiósis* e as condições de uma aprendizagem fundada sobre a coordenação dos registros.

Em seguida, na subseção 2.2, tratamos sobre aspectos gerais das MR, dissertando sobre as funções pedagógicas das MR e sua relação com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) na área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio.

2.1 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA (TRRS)

A TRRS foi desenvolvida por Raymond Duval em 1995 com base em estudos sobre Semiótica desenvolvidos pelos pesquisadores Charles Sanders Peirce e Ferdinand de Saussure e define o conceito de registro semiótico, bem como as suas diferentes representações aplicadas à Matemática.

Historicamente, o conceito das representações foi inserido pela primeira vez em investigações psicológicas acerca da aquisição de conhecimentos e no estudo do seu tratamento. Na década de 1920 do século passado, com a publicação da obra *A representação do mundo da criança*, de Piaget (1926), estudavam-se as representações mentais, que eram consideradas como sendo as crenças e explicações das crianças a respeito de fenômenos naturais e psíquicos.

Posteriormente, disseminou-se a ideia de representação interna ou computacional a partir dos estudos de Broadbent (1958), privilegiando o tratamento na codificação de informações. Algumas décadas depois, surgiu a terceira forma de representação, denominada de representação semiótica e foi caracterizada por produções constituídas pelo emprego de regras de sinais, tais como enunciados em língua natural, fórmulas algébricas, gráficos, figuras geométricas, dentre outros, que podem ser convertidos em representações equivalentes em um outro sistema semiótico.

No Quadro 1 reunimos e classificamos esses três grandes tipos de representações em concordância com o proposto por Duval (2009).

Quadro 1 - Classificação das representações

	INTERNA	EXTERNA
CONSCIENTE	MENTAL	SEMIÓTICA
NÃO-CONSCIENTE	COMPUTACIONAL	

Fonte: Adaptado de Duval (2009).

As representações são denominadas conscientes e inconscientes quando o indivíduo é capaz ou não de notar “algo”. A passagem de uma representação não-consciente para uma consciente depende do processo de objetivação, que corresponde à descoberta, pelo próprio indivíduo, de algo que ele mesmo não considerava.

Cabe ressaltar que as representações conscientes possuem caráter intencional, isto é, por meio de uma *significação*⁴ se faz a apreensão conceitual de um objeto. No caso da Matemática, podemos citar como exemplo a apreensão dos conceitos sobre figuras geométricas a partir de sua representação figural.

De mesmo modo, as representações são consideradas internas e externas quando se trata da oposição do que é visível e daquilo que não é. As representações internas de um indivíduo não podem ser comunicadas a outro sem antes se tornarem externas.

Já as representações externas são, por natureza, representações semióticas, pois são acessíveis a todos os indivíduos que aprenderam o sistema semiótico usado. A partir disso, considera-se que as representações semióticas são conscientes e externas, simultaneamente, pois tornam acessíveis ou visíveis as representações mentais de um indivíduo e possuem valor significante.

Ao se tratar do funcionamento cognitivo do pensamento humano, Duval (1995) destaca duas atividades mentais denominadas por *semiósisis* e *noésisis*. A *semiósisis* é definida como a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e a *noésisis* como a apreensão de um objeto. Assim, na aprendizagem matemática, é imprescindível reconhecer que a *noésisis* e a *semiésisis* estão

⁴ União efetiva entre significante (parte material do signo) e significado (conceito vinculado).

intrinsecamente interligadas, uma vez que não existe conhecimento matemático que um indivíduo possa manipular sem a correspondente atividade de representação.

No entanto, Duval (2012) considera que a coordenação de muitos registros de representação semiótica é uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma delas. Nesse sentido, para que um sistema semiótico possa ser considerado um registro de representação, deve-se permitir três atividades cognitivas fundamentais inerentes à *semiósis*.

A primeira atividade cognitiva se trata da formação de uma representação identificável, em outros termos, isso implica em selecionar um conjunto de caracteres e determinações para expor uma representação mental ou evocar um objeto. Para isso, são utilizados alguns sistemas como a enunciação de uma frase em língua materna, o desenho de uma figura geométrica, a expressão de uma fórmula algébrica, esquemas, gráficos, dentre outros.

Entretanto, uma representação semiótica deve cumprir regras de conformidade, isto é, não deve sair do domínio definido pelas regras que constituem aquele sistema de representação e são essenciais para a sua identificação e reconhecimento, tais como (Duval, 2009):

- a) A determinação de unidades elementares como, por exemplo, os símbolos e vocabulário;
- b) As combinações admissíveis das unidades elementares para a formação de unidades superiores como, por exemplo, a gramática no caso da Língua Portuguesa;
- c) Condições para que uma representação seja uma produção pertinente e completa como, por exemplo, as regras canônicas dos gêneros textuais.

Desse modo, o conjunto das regras de conformidade desempenham a função primordial de tornar o indivíduo capaz de identificar sentidos em uma representação que ele mesmo não produziu.

A segunda atividade cognitiva se refere ao tratamento das representações semióticas, do qual pode ser compreendido como uma transformação de representação interna a um registro de representação ou sistema. No caso da Matemática, podemos tomar como exemplo de tratamento os cálculos realizados em sistemas de escrita simbólica por meio de algorismos e letras em um

mesmo registro de escrita de números.

No entanto, o cálculo também pode assumir o papel de qualquer transformação de escrita de números combinando-se as atividades de tratamento e conversão. De modo geral, podemos afirmar que o tratamento das representações semióticas possui a função de expansão informacional, que seguem determinadas regras, tais como as regras de derivação, coerência, associativas, dentre outras.

A terceira atividade cognitiva está relacionada com a conversão de representações, na qual ocorre a transformação da representação de um objeto/situação/informação de um registro semiótico em uma representação deste mesmo objeto/situação/informação num outro registro semiótico distinto. Neste caso, podemos citar como exemplos de conversão a ilustração de uma frase, a passagem de uma imagem para um texto descritivo, a colocação equacional dos dados de um enunciado em língua materna e a tradução de uma língua para outra distinta.

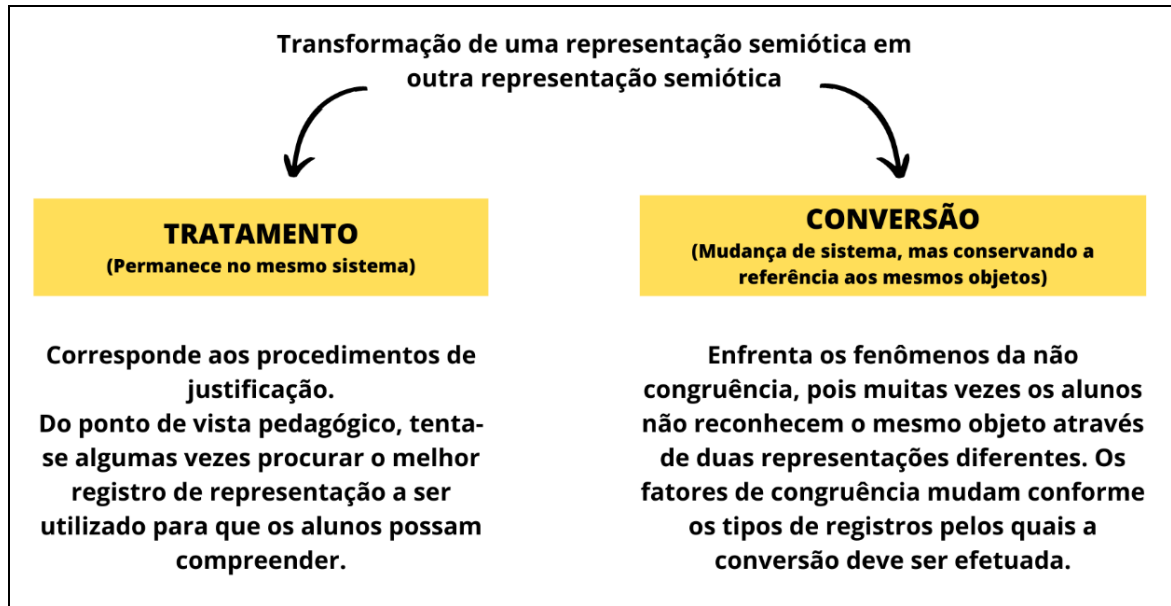
Para a Matemática, em muitos casos, a conversão de uma representação de um registro semiótico para outro pode conservar totalmente ou parcialmente o conteúdo presente na representação inicial, e requer, segundo Duval (2012), no caso das expressões numéricas, a percepção da diferença da significação operatória ligada ao significante. Por exemplo, as operações $0,25 + 0,25 = 0,50$ e $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, que embora representem o mesmo número, utilizam regras de tratamento distintas.

Ademais, a atividade de conversão também não pode ser confundida com a interpretação e a codificação, de modo que a interpretação exige uma mudança de contexto e não uma mudança de registro. Já a codificação, se refere à utilização de uma série de substituições para realizar a transcrição de um registro de representação semiótico inicial para outro distinto. Não sendo possível obter a atividade de conversão por meio de regras de analogia ou codificação.

Do ponto de vista cognitivo, Duval (2003) aborda que a distinção das três atividades cognitivas ligadas à *semiósis* é essencial para a aprendizagem conceitual, sendo a atividade de conversão responsável por conduzir aos mecanismos subjacentes à compreensão, se constituindo na menos espontânea e de maior grau de dificuldade de aquisição por parte dos alunos.

A Figura 1 apresenta a distinção entre os dois tipos diferentes de transformação de representações semióticas abordadas por Duval (2003).

Figura 1 - Distinção entre os tipos de transformações das representações semióticas



Fonte: Adaptado de Duval (2003, p.15).

Ao analisar a natureza da assimilação da Matemática e investigar as razões das dificuldades de compreensão frequentemente observadas em muitos alunos, surge a consideração da complexidade inerente dos conceitos matemáticos.

A distinção na atividade cognitiva exigida pela Matemática em comparação com outros campos do conhecimento está relacionada ao fato de que os objetos matemáticos não são acessíveis ou observáveis diretamente por meio de instrumentos, como ocorre em disciplinas como Biologia e Astronomia. A compreensão de conceitos matemáticos, como o número, por exemplo, ocorre por meio de um sistema de representação.

Para a aprendizagem matemática, há uma grande variedade de representações semióticas que podem ser utilizadas. Além dos sistemas numéricos de representação, existem também as representações geométricas, algébricas, gráficas e em língua natural. No Quadro 2 destacamos as quatro classificações de registros semióticos estabelecidos por Duval (2003) para as atividades de matemática.

Quadro 2 - Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática)

	REPRESENTAÇÃO	REPRESENTAÇÃO NÃO-
--	----------------------	---------------------------

	DISCURSIVA	DISCURSIVA
<p>REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.</p>	<p>Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar:</p> <ul style="list-style-type: none"> • argumentação a partir de observações, de crenças ...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas. 	<p>Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3).</p> <ul style="list-style-type: none"> • apreensão operatória e não somente perspectiva; • construção com instrumentos.
<p>REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.</p>	<p>Sistemas de escritas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • numéricas (binária, decimal, fracionária ...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). <p>Cálculo</p>	<p>Gráficos cartesianos.</p> <ul style="list-style-type: none"> • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2003, p.14).

De acordo com Duval (2003), os registros multifuncionais discursivos são registros não algoritmizáveis que podem ser expressos por sistemas de escrita, tais como a língua natural. Os registros multifuncionais não-discursivos não são algoritmizáveis e não podem ser representados por sistemas de escrita, neste caso, dispomos, como exemplo, das figuras geométricas e maquetes.

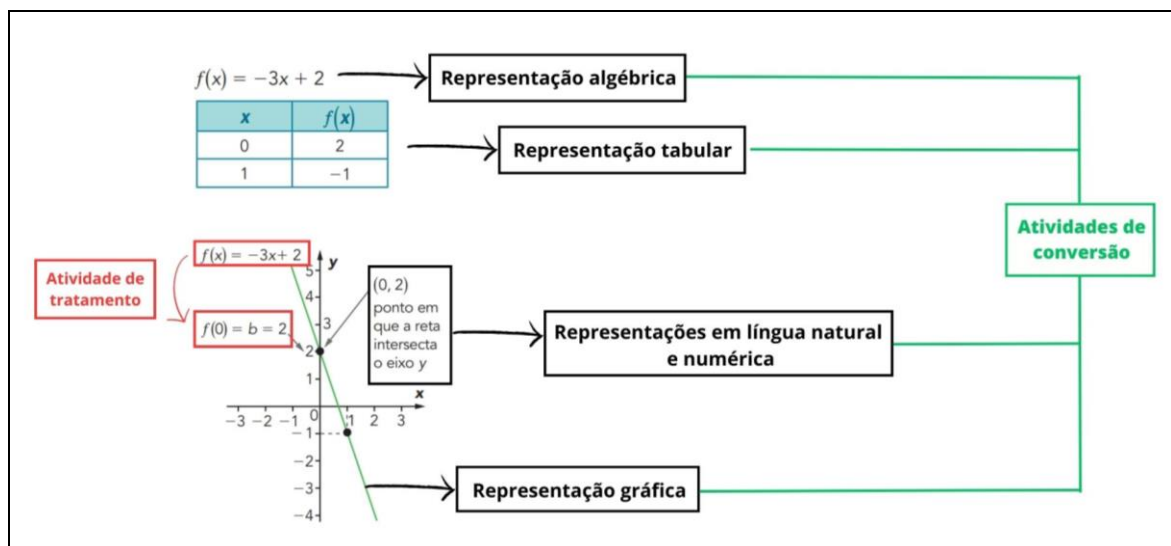
De mesma forma, os registros monofuncionais discursivos possuem representações algoritmizáveis em sistemas de escrita como as numéricas e algébricas. Por fim, os registros monofuncionais não-discursivos são caracterizados pelos registros não algoritmizáveis e que também não podem ser representados por sistemas de escrita como os gráficos.

A compreensão da Matemática, segundo Duval (2012) se dá a partir do uso coordenado de ao menos dois registros de representação semióticos

distintos, sendo essa uma condição necessária para que o esquema didático de uma representação corresponda a um funcionamento cognitivo efetivo.

Esta importância pode ser constatada em livros didáticos de Matemática, com a presença de representações em língua natural, fórmulas, expressões, figuras geométricas ou gráficos cartesianos. Na Figura 2, podemos observar a existência de diversas formas de representação semiótica no livro intitulado *Matemática em contextos* (Dante, 2020) no estudo de função afim, além de permitir visualizar as três atividades cognitivas fundamentais inerentes à *semiósis*.

Figura 2 - Uso coordenado dos registros de representação semiótica no livro *Matemática em contextos*



Fonte: Adaptado de Dante (2020, p. 38).

Na Figura 2, destacamos os diferentes registros de representações semióticas em paralelo utilizadas para o estudo da função afim. Ela ilustra a atividade de tratamento de representações no registro algébrico (lado esquerdo em vermelho), bem como atividades de conversão entre representações algébrica, tabular, e gráfica (lado direito em verde)

Porém, a atividade de conversão geralmente é menos imediata e simples do que parece ser, pois é necessário analisar como se pode efetuar o procedimento de correspondência sobre o que repousa toda conversão (Duval, 2009). Para determinar se duas representações são congruentes, é necessário segmentar suas unidades significantes (termo a termo) e compará-las em cada um dos dois registros, sendo esta comparação feita diretamente ou por intermédio de

uma terceira representação que possui a função de codificar algumas informações dos registros analisados.

Conforme Duval (2009), a questão da congruência entre registros semióticos segue três critérios de análise. O primeiro deles se trata da possibilidade de uma correspondência semântica dos elementos significantes, isto é, quando cada unidade significativa de uma representação pode ser associada a apenas uma unidade significativa de outra representação.

Este critério pode estar associado à Matemática quando realizamos, por exemplo, a conversão de um registro de representação em língua natural para a algébrica de modo que se deve ter para cada termo um único símbolo associado. Tal como no exemplo 1 a seguir:

Exemplo 1: Minha idade multiplicada por três e subtraída por dois é igual a seis. Qual é a minha idade?

A conversão entre as representações para o registro algébrico é dada pela equação $x \cdot 3 - 2 = 6$. Neste caso, cada unidade significativa do registro em língua natural corresponde a apenas um símbolo no registro algébrico.

De mesmo modo, tomemos o exemplo 2 abaixo:

Exemplo 2: O dobro da minha idade subtraída por dois é igual a seis. Qual é a minha idade?

A conversão entre as representações para o registro algébrico é dada pela equação $2 \cdot x - 2 = 6$. Neste caso, o termo “dobro” está ligado a dois símbolos: o número 2 e o símbolo da multiplicação “.”, logo, o critério da correspondência semântica dos elementos significantes não é satisfeito nesse caso.

O segundo critério concerne na univocidade semântica terminal, onde cada unidade significativa de uma representação de partida corresponde ao mesmo significado no registro de chegada. Para exemplificar essa situação, vamos considerar o exemplo 3 a seguir:

Exemplo 3: Daniel foi a uma loja de roupas e comprou uma bermuda e uma camiseta, totalizando R\$ 200,00. A camiseta custou mais caro que a bermuda, a diferença foi de R\$ 73,00. Quanto custou cada peça comprada por Daniel?

A conversão entre as representações nos registros língua natural e algébrico é expressa pela equação $x + (x + 73) = 200$, no qual x representa o valor pago pela bermuda e $(x + 73)$ o valor da camiseta. Porém, o enunciado em língua

natural traz a palavra “diferença” que semanticamente corresponde a uma subtração na matemática, assim, o significado presente no registro de partida é distinto do símbolo utilizado no registro de chegada, não sendo possível satisfazer o critério de univocidade semântica terminal.

O terceiro critério se refere à organização das unidades significantes e consiste em apreender nas duas representações analisadas as unidades significantes em correspondência na mesma ordem. Para isso, vamos realizar um tratamento no enunciado do registro utilizado no exemplo 3:

Daniel foi a uma loja de roupas e comprou uma bermuda e uma camiseta, totalizando R\$ 200,00. A camiseta custou a mais que a bermuda R\$ 73,00. Quanto custou cada peça comprada por Daniel?

Convertendo a representação do registro em língua natural para a representação do registro algébrico, temos a equação $x + (x + 73) = 200$. Neste caso, ao inserirmos o termo ‘mais’ estamos relacionando diretamente com a operação de adição, representada pelo símbolo ‘+’.

Assim, é possível observar que esta conversão satisfaz os três critérios de congruência (correspondência semântica entre as unidades significantes, univocidade semântica terminal e mesma ordem de apreensão das unidades significantes nas duas representações) conservando, ao menos, parte do mesmo conteúdo.

De forma natural, pode não haver correspondência para nenhum dos três critérios de congruência, apenas dois ou somente um. Desse modo, classificamos as representações quanto ao maior e o menor grau de congruência. Duval (2009) aborda que a dificuldade de conversão de uma representação depende do grau de não-congruência entre as representações dos registros de partida e de chegada.

As condições de uma aprendizagem fundada sobre a coordenação de diferentes registros de representação semiótica não acontecem de forma espontânea, pois mesmo no decorrer de um ensino que mobilize a diversidade de registros, as aprendizagens podem permanecer quase sempre nos monorregistros (registros monofuncionais) (Duval, 2012). Isso implica que, apesar dessa limitação não impedir alguma forma de compreensão dos alunos, ela dificulta a aplicação dos conhecimentos adquiridos em outras situações.

Por isso, Duval (2003), destaca que no desenvolvimento de

sequências para a Matemática há duas condições que devem ser efetivamente respeitadas:

- a) a sequência deve ser constituída de uma série de tarefas que tratem dos dois sentidos da conversão;
- b) para cada sentido da conversão deve haver tarefas que comportem casos de congruência e casos mais ou menos complexos de não congruência.

Assim, para acentuar a compreensão em Matemática, sugere-se considerar que tais sequências sejam constituídas por, ao menos, pares de registros contendo um multifuncional e um monofuncional ou compreendido por um par de registros monofuncionais.

Neste contexto, as ideias propostas pela TRRS possuem um grande potencial no que diz respeito à aprendizagem matemática. No tema abrangido nesta pesquisa, consideramos que os diferentes registros semióticos e seus processos de tratamento e conversão podem proporcionar uma maior compreensão acerca dos conceitos de Trigonometria.

Isso acontece pois, ao se levar em consideração as diferentes representações de um mesmo objeto matemático no decorrer do desenvolvimento das atividades, podemos desconstruir a tendência dos alunos de associarem os objetos matemáticos a apenas um tipo de representação.

Viabilizar a apreensão dos conceitos matemáticos de forma diversificada possibilita-se compreender a complexidade da Matemática, sua abstração e as relações existentes entre suas representações.

2.2 MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES (MR) E A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)

Para Faria e Laború (2021) os modos de representação são caracterizados pela reapresentação de um mesmo conceito matemático de várias formas ou diferentes linguagens. De acordo com os autores, essas linguagens podem ser classificadas como descritivas (como as representações verbais, gráficas, tabulares, diagramáticas, fotográficas, mapas ou cartas), experimentais e matemáticas, figurativas, gestuais ou corporais.

Nessa perspectiva, a multiplicidade de representações deve consistir na combinação dessas diferentes formas de representar o raciocínio, os processos e

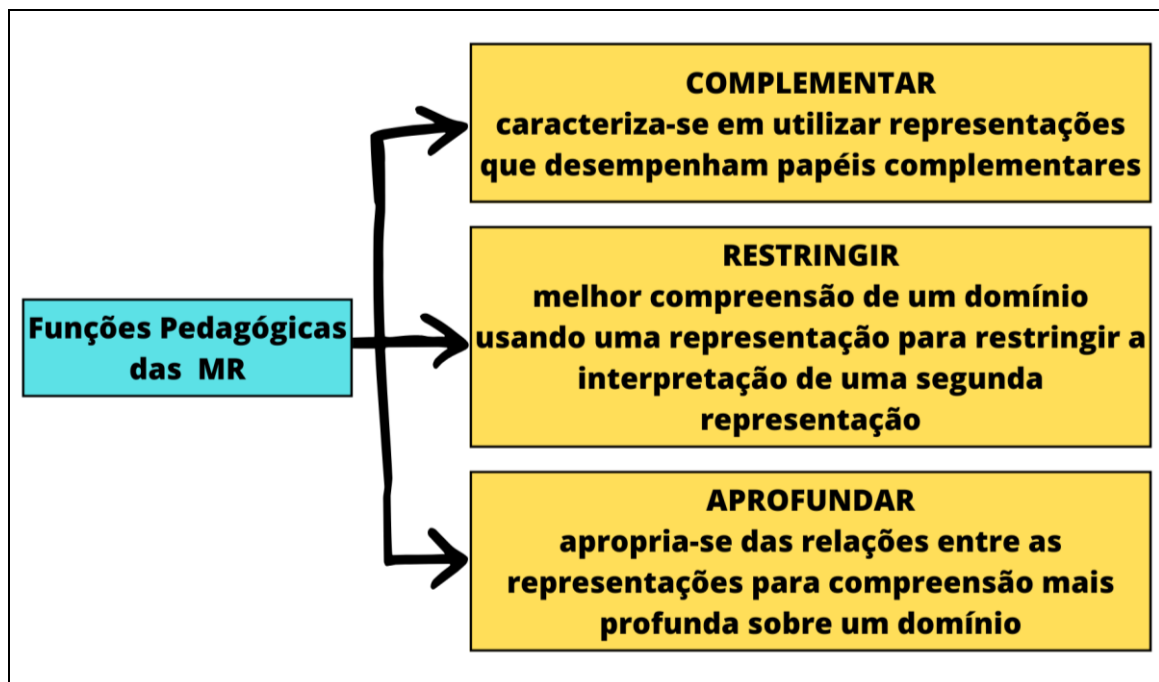
as descobertas dos alunos. Logo, define-se por MR os meios e/ou recursos perceptivos pelos quais os modos de representação podem ser expressos, pensados, comunicados ou executados (Faria; Laburú, 2021).

Em vista disso, Laburú, Zompero e Freitas (2013) dissertam que o significado concedido a um objeto provém da diversidade de representações a ele atribuídas. Portanto, a variedade e a flexibilidade dos sistemas de representação são fundamentais para a compreensão conceitual e determinam, em grande medida, o que é aprendido.

Cada representação de um conceito fornece informações sobre um aspecto específico dele, sem ser capaz de descrevê-lo por completo. Assim, pesquisas apontam que a estratégia das MR pode contribuir para que os aprendizes apresentem níveis de significado mais aprofundados acerca do conteúdo específico estudado (Trevisan Sanzovo, 2017).

De acordo com Ainsworth (2006), uma das razões frequentemente mencionada para a utilização das MR no processo de aprendizagem é o potencial de despertar o interesse do aluno. Então, a autora propõe uma taxonomia funcional para as MR, baseada em três funções principais de aprendizagem não excludentes: complementar, restringir e aprofundar, sintetizadas pela Figura 3.

Figura 3 - As funções pedagógicas das Múltiplas Representações



Fonte: A própria autora.

A função complementar tem como característica o uso de representações que desempenham papéis complementares, ou seja, fornecem informações ou processos que se complementam para beneficiar os alunos com as vantagens de cada representação.

Essa abordagem é indicada quando uma única representação não consegue abranger todas as informações pertinentes de um domínio ou quando a combinação destas últimas tornaria a tarefa do aluno muito complicada. Como exemplo, podemos citar o uso de equações, tabelas e gráficos num simulador de Física (Ainsworth, 2014).

Por sua vez, a função de restringir tem como objetivo auxiliar os alunos a desenvolverem uma melhor compreensão de um domínio usando uma representação para limitar sua interpretação de outra representação. Isso pode ser alcançado de duas maneiras:

- a) utilizando uma representação familiar para apoiar a interpretação de uma representação menos familiar ou mais complexa;
- b) explorando as propriedades de uma representação para restringir a interpretação de outra.

A título de ilustração, Ainsworth (2014) menciona a utilização de uma animação que representa um exemplo concreto para complementar um gráfico dinâmico.

A função de aprofundar pode ser vista como uma forma de utilizar as MR para ensinar a relação entre elas, levando a uma compreensão mais profunda do domínio ao aplicar conceitos que o aluno já domina em novas situações.

Nessa função, é extremamente importante o uso coordenado das representações, pois se os alunos não realizarem a mobilização entre as representações, o aprendizado pode ser comprometido. Relacionar gráficos de espaço e velocidade em função do tempo para entender mais acerca de funções e derivadas exemplifica esta função (Ainsworth, 2014).

Ainda de acordo com Ainsworth (1999), ao iniciar a abordagem com MR, é possível estabelecer uma ligação completa entre elas. Conforme a experiência em seu uso aumenta, essa ligação pode ser substituída por sinais que indiquem a conexão entre as representações, permitindo a sua mobilização automática.

Por fim, se os alunos forem capazes de coordenarem as representações, poderão trabalhar de forma independente em qualquer uma delas. Em resumo, as três funções pedagógicas das MR estão sempre associadas aos objetivos almejados na tarefa.

A implicação primordial das MR para o processo cognitivo, segundo Ainsworth (2014), vai além de apenas analisar os aspectos cognitivos das representações, isto é, devemos integrar esta análise às funções pedagógicas que desejamos que as representações cumpram na aprendizagem de nossos alunos.

Particularmente, entendemos por esse argumento, que as funções das MR podem ser importantes condições quando consideramos representações que contenham informações redundantes, podendo prejudicar a aprendizagem. Portanto, o uso coordenado da TRRS alinhado às MR se caracteriza como uma potente ferramenta para o ensino da Matemática, tendo em vista que cada representação poderá suprir as deficiências de outra no uso coordenado de duas ou mais delas.

Com a BNCC (Brasil, 2018), muitos estudos a respeito da Educação Matemática têm se voltado para o desenvolvimento de habilidades e competências na Educação Básica visando assegurar as aprendizagens essenciais para todas as suas etapas de ensino.

A BNCC é um documento de caráter normativo elaborado pelo Ministério da Educação (MEC) com base nos preceitos do Plano Nacional de Educação (PNE), a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN). Sendo desenvolvida com o objetivo de fomentar a qualidade da Educação Básica e contribuir com o alinhamento das esferas federais, estaduais e municipais ao se tratar dos direitos de igualdade, equidade e diversidade.

Em vista disso, a BNCC aponta a importância em se elaborar propostas pedagógicas que valorizem as identidades linguísticas, étnicas e culturais dos estudantes, de modo a desenvolver as habilidades necessárias para o cumprimento de dez competências gerais que compreendem pedagogicamente os direitos de aprendizagem dos alunos ao longo da Educação Básica.

Assim, define-se por competência como sendo a mobilização de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (Brasil,

2018). Em outras palavras, as decisões pedagógicas precisam ser consoantes com o que os alunos devem saber e saber fazer.

A estrutura geral da BNCC para a etapa do Ensino Médio, foco desta pesquisa, está organizada em quatro áreas do conhecimento, sendo elas (i) *Linguagens e suas Tecnologias*, (ii) *Matemática e suas Tecnologias*, (iii) *Ciências da Natureza e suas Tecnologias* e (iv) *Ciências Humanas e Sociais Aplicadas*.

Em cada uma dessas áreas, são estabelecidas competências específicas que detalham como as competências gerais se manifestam no currículo. Cabe ressaltar que a BNCC não exclui as disciplinas específicas de cada área, mas estimula o fortalecimento das relações entre elas e incentiva a sua contextualização na realidade, de modo a desenvolver aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea (Brasil, 2018).

Segundo a BNCC, o conhecimento específico em Matemática é reconhecido como essencial para todos os alunos da Educação Básica. Isso se deve tanto à sua ampla aplicação na sociedade contemporânea quanto à sua capacidade de formar cidadãos críticos e conscientes de suas responsabilidades sociais.

De modo que no Ensino Médio, os alunos devem fortalecer os conhecimentos adquiridos na etapa do Ensino Fundamental e adicionar novos elementos, ampliando assim suas habilidades para resolver problemas mais complexos que requerem maior reflexão e abstração.

Além disso, é importante que eles desenvolvam uma compreensão mais abrangente da Matemática, sua relação com outras áreas do conhecimento e sua aplicação na realidade. Para que esta última seja alcançada, é necessário que se leve em consideração as vivências cotidianas dos estudantes impactadas pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros (Brasil, 2018).

Diante disso, a área da Matemática e suas Tecnologias possui a responsabilidade de ampliar o letramento matemático⁵ iniciado no Ensino Fundamental, com o propósito de desenvolver habilidades relativas aos processos

⁵ Capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e prever fenômenos.

de investigação, construção de modelos e resolução de problemas. Para isso, os alunos devem utilizar seu próprio estilo de raciocínio, representação, comunicação e argumentação, além de aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados com base em discussões e validações.

Para o desenvolvimento das competências relativas ao raciocínio matemático, a BNCC propõe, em muitas situações, a mobilização de habilidades ligadas à representação e comunicação com o objetivo de justificação do raciocínio. Ao mesmo tempo sugere, para a competência de comunicar, que os estudantes sejam capazes de justificar suas conclusões não apenas utilizando símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também por meio da linguagem materna. Isso implica realizar apresentações orais dos resultados e elaborar relatórios, além de outros tipos de registros.

Entretanto, para esta pesquisa, enfatizamos as competências diretamente associadas com o representar, que para a BNCC se pressupõem na elaboração de registros para evocar um objeto matemático. Embora essa ação não seja única da Matemática, nessa área fica claramente evidente a importância das representações para a compreensão de fatos, ideias e conceitos. Isso ocorre porque o acesso aos objetos matemáticos se dá principalmente por meio dessas representações.

Assim, o documento enuncia que:

Na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade. Por esse motivo, espera-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da Matemática – verificando que os recursos dessa linguagem são mais apropriados e seguros na busca de soluções e respostas – e, ao mesmo tempo, promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio (Brasil, 2018, p. 529).

Neste sentido, fica evidente a importância da TRRS alinhada às MR no que tange a aprendizagem em Matemática. Além de tornar compreensível a conexão entre as competências, de tal modo que o desenvolvimento de uma requer a mobilização das outras.

Assim, enfatizamos a quarta competência específica da área de Matemática e suas Tecnologias “Compreender e utilizar, com flexibilidade e

precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas” (Brasil, 2018, p. 531). Tal competência trata-se da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas em diversas situações.

Nessa perspectiva, a BNCC disserta que quando os estudantes conseguem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que essas representações expressam e, sempre que possível, fazer a conversão entre elas, eles adquirem domínio sobre um conjunto de ferramentas que aumenta significativamente sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar.

Para mais, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 2018) e o Referencial Curricular do Paraná (RCP) (Paraná, 2018) para a disciplina de Matemática ressaltam a importância das representações no processo de ensino e aprendizagem. De acordo com esses documentos, as representações são fundamentais para a compreensão dos conceitos matemáticos, sendo consideradas uma ferramenta essencial para tornar o conhecimento mais acessível e significativo.

Conforme os PCN, as representações, como gráficos, tabelas, diagramas e modelos, são meios eficazes para concretizar e visualizar os conceitos matemáticos (Brasil, 1998). Além disso, destacam que o uso de diferentes representações contribui para o desenvolvimento das habilidades cognitivas dos estudantes, promovendo uma compreensão mais aprofundada

Ao reconhecer a diversidade de estilos de aprendizagem dos alunos, os PCN indicam que o uso de diversas representações atende à variedade de abordagens que podem ser mais eficazes para diferentes estudantes. Pois incentivam os alunos a explorar, raciocinar e desenvolver habilidades de resolução de problemas, promovendo um aprendizado mais participativo (Brasil, 1998).

Da mesma forma, o RCP aborda que as variadas estratégias para o ensino da Matemática devem possibilitar ao estudante, dentre outras, a capacidade representar, seja por meio de textos, gráficos, Geometria, ou figuras. Bem como devem compreender que o conhecimento matemático permite a intervenção na realidade (Paraná, 2018).

Portanto, segundo os PCN e o RCP de Matemática, a incorporação de representações no ensino pode proporcionar uma Educação Matemática mais enriquecedora, significativa e acessível aos estudantes. Em suma, eles expandem

sua habilidade de pensar de forma Matemática. Além disso, a análise das representações que os aprendizes utilizam para resolver um problema permite compreender como eles interpretaram e raciocinaram para chegar à solução.

Portanto, se faz necessário que os alunos sejam incentivados a explorar múltiplas formas de representação para adquirir conhecimentos em conceitos e procedimentos matemáticos. É indicado que sejam capazes de selecionar as representações mais adequadas para cada situação e, quando necessário, realizar conversões entre elas, assim como o proposto pela TRRS.

Embora a conversão entre diferentes registros nem sempre seja simples, muitas vezes é essencial para uma compreensão adequada do objeto matemático em questão, pois uma determinada representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece, assim como descrito nas funções pedagógicas das MR.

A seguir, apresentamos os resultados obtidos a partir de uma Revisão Sistemática de Literatura que nos orientou quanto aos encaminhamentos da pesquisa.

3 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UMA REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA (RSL)

Esta seção discorre sobre a realização de uma pesquisa de caráter qualitativo com o objetivo de responder a seguinte pergunta: *O que se tem publicado, no Brasil, a respeito da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Múltiplas Representações em Educação Matemática, de 2012 a 2023?*

Com o objetivo de compreender quais elementos matemáticos, estratégias e formas de representação estão sendo abordados em sala de aula, foram examinados diversos estudos que exploram a TRRS (Duval, 1995) e o conceito de MR (Ainsworth, 1999; 2006; 2014) no contexto da Educação Básica.

Para conduzir essa pesquisa exploratória, utilizamos como metodologia e análise de dados a abordagem da Análise de Conteúdo (AC) de Bardin (2011). Essa abordagem compreende um conjunto de técnicas de análise sistemática que são aplicadas a diversos tipos de discursos, facilitando a organização e padronização dos dados coletados. A condução da pesquisa seguiu os três polos cronológicos propostos por Bardin (2011), conforme a figura 4.

Figura 4 – Passos da Revisão Sistemática de Literatura



Fonte: A própria autora.

3.1 PRÉ-ANÁLISE

Nesta etapa definiu-se as questões de pesquisa, bem como as bases de dados para buscas e critérios de inclusão e exclusão dos trabalhos. Para auxiliar na organização das ações de busca, foram elaboradas três questões de pesquisa (QP), sendo estas:

QP1: *Quais conteúdos específicos da Matemática estão sendo ensinados por meio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Múltiplas Representações na Educação Básica?*

QP2: *De que forma a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Múltiplas Representações estão sendo abordadas em sala de aula?*

QP3: *Quais registros são mobilizados em atividades que envolvem a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Múltiplas Representações?*

Assim, considerando-se as questões norteadoras, para a constituição do *corpus*, foram definidas como bases de busca a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e Google Acadêmico.

Para respeitar o rigor metodológico da pesquisa, foram estabelecidos como descritores sistemáticos de busca ("Multimodos" OR "Múltiplas Representações") AND "Educação Matemática" AND ("Teoria dos Registros de Representações Semióticas" OR "Teoria dos Registros de Representação Semiótica"), que retornou para a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações 1 trabalho, para o Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES 11 trabalhos, para o Portal de Periódicos da CAPES 31 trabalhos e para o Google Acadêmico 192 trabalhos.

Após isso, ainda com base nas questões de pesquisa, foram estabelecidos como critérios de inclusão trabalhos do tipo:

- a) dissertações, teses e artigos (estratos A1, A2, A3 e A4 elencados pela Plataforma Sucupira de classificação Qualis no quadriênio 2017 a 2020) em língua portuguesa;

- b) abordagem na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, Múltiplas Representações e Educação Matemática em sala de aula;
- c) estudos primários;
- d) trabalhos que se referem à Educação Básica publicados no período de 2012 a 2022.

O processo de organização do material foi realizado manualmente. A princípio, foram lidos os títulos, palavras-chave e resumos, e percebeu-se que alguns trabalhos não continham todas as informações necessárias nessas seções. Como alternativa, optou-se por ler as seções metodológicas.

No caso dos trabalhos provenientes do Portal de Periódicos da CAPES, foram encontrados inicialmente 198 arquivos. Para auxiliar na aplicação dos critérios de seleção, foram utilizados os filtros disponíveis na própria plataforma, excluindo trabalhos dos tipos livros, recursos web, atas de congressos e documentos em inglês e espanhol. Dessa forma, restaram 31 trabalhos, sendo 26 artigos e 5 dissertações.

3.2 EXPLORAÇÃO DO MATERIAL DA RSL

Como estratégia de organização, foi criada uma planilha no Excel contendo os títulos, códigos, nomes dos autores, anos de publicação, resumos, categorização e instituição de ensino de todos os trabalhos encontrados. Após a leitura dos resumos e seções metodológicas, foram excluídos os trabalhos que não atendiam aos critérios de inclusão, aqueles indisponíveis online ou que apresentaram duplicidade com outras fontes de pesquisa.

Como resultado, restaram 31 trabalhos, sendo 1 da BDTD, 3 do Portal de Periódicos da CAPES e 27 do Google Acadêmico. É importante destacar que, após a aplicação dos critérios de inclusão, foi identificado apenas um trabalho no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, o qual apresentou duplicação com a BDTD, portanto, os trabalhos dessa base de dados foram descartados.

3.3 ANÁLISE DOS DADOS DA RSL

O Quadro 3 sintetiza o trabalho encontrado no banco de dados

BDTD, apresentando em suas colunas a codificação, título, autoria, ano de publicação, tipicidade e banco de dados, respectivamente.

Quadro 3 - Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

Cód.	Título	Autoria	Ano de Publicação	Tipicidade	Banco de Dados
1	Integração multimodal e coordenação de representações semióticas em atividades de função do 1º grau	Renata Aparecida de Faria	2017	Dissertação	BDTD

Fonte: A própria autora.

O estudo conduzido por Faria (2017) teve como objetivo investigar a coordenação de diferentes representações semióticas do conceito matemático conhecido como função do primeiro grau, pautado especialmente nas funções pedagógicas da MR propostas por Ainsworth (1999) e nos aspectos da TRRS desenvolvida por Raymond Duval (1995) relacionados às transformações de tratamento, conversão e coordenação.

O estudo analisou os benefícios da utilização de MR no ensino da Matemática para estudantes do 1º ano do Ensino Médio. Durante a resolução dos problemas, os alunos foram capazes de mobilizar dois ou mais registros de representação, utilizando uma ou mais funções pedagógicas das MR.

Por sua vez o Quadro 4 reúne os trabalhos encontrados no banco de dados Portal de Periódicos da CAPES que corresponderam aos critérios de inclusão e exclusão determinados para essa pesquisa apresentando em suas colunas a codificação, título, autoria, ano de publicação, tipicidade e banco de dados, respectivamente.

Quadro 4 - Portal de Periódicos da CAPES

Cód.	Título	Autoria	Ano de Publicação	Tipicidade	Banco de Dados
29	O geogebra 3d na	José Carlos	2018	Artigo	Portal

	construção da pirâmide a partir de seu tronco: registros de representação semiótica	Pinto Leivas Anne Desconsi Hasselmann Bettin Valdir Pretto			CAPES
30	Uma análise semiótica e cognitiva na aprendizagem de áreas de triângulos e quadriláteros	Cleide Ribeiro Mota Arinos José Luiz Magalhães de Freitas Mustapha Rachidi	2021	Artigo	Portal CAPES
31	(Re)Pensar a apropriação dos significados dos conceitos científicos com uso de softwares de matemática	Roberto Preussler Neiva Ignês Grandó	2013	Artigo	Portal CAPES

Fonte: A própria autora.

O estudo realizado por Leivas, Bettin e Pretto (2018) aborda o uso de softwares de geometria dinâmica para o ensino da Geometria no Ensino Médio. O objetivo dessa pesquisa foi analisar como os registros de representação semiótica são mobilizados por meio da ferramenta Geogebra 3D.

Os resultados dessa pesquisa destacaram a importância da visualização do objeto matemático em diferentes formas de representação para a revisão e construção de conceitos geométricos. Em uma pesquisa semelhante, Arinos, Freitas e Rachidi (2021) investigaram as mudanças de representação e de registro no cálculo de áreas de triângulos e quadriláteros por meio de atividades de exploração heurística das figuras.

Tais atividades permitiram o desenvolvimento da autonomia dos estudantes, incentivando novas formas de aprender, raciocinar e visualizar figuras geométricas. Outro estudo relevante foi realizado por Preussler e Grandó (2013), que analisaram o processo de formação de conceitos de funções trigonométricas utilizando os softwares Cabri-Géomètre e Graphmatica.

Essa abordagem possibilitou a visualização das implicações dessas tecnologias nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática. Portanto, esses estudos demonstram como o uso de softwares e ferramentas tecnológicas

podem enriquecer o ensino da Matemática, facilitando a compreensão dos conceitos e promovendo uma abordagem mais dinâmica e interativa.

O Quadro 5, por sua vez, compreende os artigos encontrados no banco de dados Google Acadêmico, apresentando em suas colunas, a codificação, título, autoria, ano de publicação, tipicidade e banco de dados, respectivamente.

Quadro 5 - Artigos encontrados no Google Acadêmico

Cód.	Título	Autoria	Ano de Publicação	Tipicidade	Banco de Dados
2	Coordenação e multiplicidade representacional em uma atividade de função do 1º grau	Carlos Eduardo Laburú Renata Aparecida de Faria	2018	Artigo	Google Acadêmico
3	Conexão entre múltiplas representações em atividades de função polinomial do 1º grau	Renata Aparecida de Faria Carlos Eduardo Laburú	2021	Artigo	Google Acadêmico
8	Geogebra classroom: uma plataforma virtual com ferramentas matemáticas interativas.	Jeferson Lima Ivanete Zuchi Siple	2021	Artigo	Google Acadêmico
9	Um estudo sobre a aprendizagem de função exponencial no ambiente computacional	Mariana Silva Mendonça Rogério Fernando Pires	2018	Artigo	Google Acadêmico

Fonte: A própria autora.

O estudo realizado por Lima e Siple (2021) descreve uma experiência que utilizou a ferramenta Classroom do Geogebra no contexto do ensino remoto. Os autores relataram a execução de uma atividade que abordou o índice de transmissão da COVID-19, explorando diversas formas de representação de funções. Assim como Mendonça e Pires (2018), constatou-se que o conhecimento sobre função exponencial foi construído por meio da mobilização, manipulação e coordenação das representações utilizando o software Geogebra como ferramenta de aprendizagem.

Laburú e Faria (2018) realizaram uma investigação sobre a

mobilização e coordenação de diferentes representações semióticas no estudo das funções do primeiro grau. Eles observaram a influência pedagógica das MR nas atividades desenvolvidas com uma turma de Ensino Médio.

De forma semelhante, Faria e Laburú (2021) apresentaram três atividades de uma pesquisa de mestrado que investigou a mobilização de representações em diferentes registros da função do primeiro grau e descreveram os instrumentos de coleta de informações utilizados pela pesquisadora durante o desenvolvimento dessas atividades.

O Quadro 6 sintetiza as dissertações encontradas no banco de dados Google Acadêmico e apresenta, em suas colunas, a codificação, título, autoria, ano de publicação, tipicidade e banco de dados, respectivamente.

Quadro 6 - Dissertações encontradas no Google Acadêmico

Cód.	Título	Autoria	Ano de Publicação	Tipicidade	Banco de Dados
4	Um estudo das concepções de estudantes do ensino médio sobre o conceito de função com base na teoria dos registros de representações semióticas.	Lidiane Pereira de Carvalho	2017	Dissertação	Google Acadêmico
5	Modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: um olhar para os registros de representação semiótica.	Andréia Regina Teixeira Nunomura	2021	Dissertação	Google Acadêmico
6	Os registros de representação semiótica na aprendizagem das grandezas massa e comprimento por meio de uma atividade de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica	Wasley Antonio Ronchetti	2018	Dissertação	Google Acadêmico

11	As concepções da álgebra articuladas aos conteúdos de matemática no ensino fundamental.	Jailma Ferreira Guimarães	2013	Dissertação	Google Acadêmico
12	Conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico da função afim: análise a partir da interpretação global de propriedades figurais	José Robson de Araújo	2021	Dissertação	Google Acadêmico
13	As contribuições dos registros de representação semiótica no processo de ensino aprendizagem da função afim: um experimento com alunos do 1º ano do ensino médio do instituto federal do maranhão/IFMA campus avançado rosário.	Willanickson Jacksemuller Santos Lago	2018	Dissertação	Google Acadêmico
15	O conceito de função: da operacionalização da definição à aprendizagem significativa	Jerson Sandro Santos de Souza	2017	Dissertação	Google Acadêmico
17	Ensino de pirâmides no ensino médio: uma sequência didática apoiada na teoria de registro de representação semiótica	Ricardo Almeida dos Santos	2021	Dissertação	Google Acadêmico
18	Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas	Ledevande Martins da Silva	2013	Dissertação	Google Acadêmico
19	Uma sequência de atividades com	Clara Alice Ferreira	2019	Dissertação	Google Acadêmico

	enfoque em representações dinâmicas para o desenvolvimento de conhecimentos de semelhança de triângulos	Cabral			
20	O número como signo: relatos de uma experiência de ensino de frações a partir das teorias sociointeracionistas e dos registros de representações semióticas	Fernanda Medeiros Alves Besouchet Martins	2012	Dissertação	Google Acadêmico
21	Tarefas exploratórias-investigativas para a aprendizagem de função afim	Fábio Luiz Dias Tozo	2016	Dissertação	Google Acadêmico
22	A construção do conceito de número racional no sexto ano do ensino fundamental	Vanessa da Silva Alves	2014	Dissertação	Google Acadêmico
23	As representações semióticas no estudo de inequações no ensino médio	Diego da Silva Queiroz	2021	Dissertação	Google Acadêmico
24	O trabalho educativo com o software de geometria dinâmica no quinto ano do ensino fundamental	Viviane Aparecida de Souza	2017	Dissertação	Google Acadêmico
25	Aprendizagem de estatística na EJA com tecnologia: uma sequência didática com base nos registros de representação semiótica	Reinaldo Feio Lima	2014	Dissertação	Google Acadêmico
26	Representações mobilizadas nas turmas de 1º ano do colégio de aplicação da universidade federal de Sergipe no ensino de função	Leonel Ricardo Machado Meneses	2014	Dissertação	Google Acadêmico

	afim e quadrática				
27	Praxeologia do professor: uma investigação do conceito de fração sob a ótica da teoria antropológica do didático	Roberto Nogueira de Sousa Lopes	2020	Dissertação	Google Acadêmico
28	A mobilização dos registros de representação semiótica na prática pedagógica do processo de ensino-aprendizagem dos números racionais	Laís Isabele Proença	2021	Dissertação	Google Acadêmico

Fonte: A própria autora.

Por meio do Quadro 6, é possível observar que as dissertações encontradas no Google Acadêmico correspondem a aproximadamente 61% dos trabalhos que atenderam aos critérios de inclusão e exclusão desta pesquisa exploratória.

Dentre essas dissertações, Guimarães (2013) desenvolveu sequências de atividades para o estudo das relações algébricas entre grandezas e estruturas, enfatizando a importância de escolher e criar situações-problema que permitam aos alunos investigar e desenvolver estratégias de resolução, ao contrário de fornecer exercícios prontos.

Souza, J. S. S. (2017) realizou uma pesquisa sobre a tradição de ensino do conceito de função, com o objetivo de identificar aspectos facilitadores de sua operacionalização. O autor também elaborou três atividades com base na Engenharia Didática, aplicadas no Ensino Médio, e constatou que uma definição operacional pode ser considerada o elemento desencadeador do processo de aprendizagem significativa do conceito de função.

L. M. Silva (2013) investigou a compreensão de ideias essenciais de funções por alunos e analisou as contribuições da proposição e exploração de problemas em uma turma do Ensino Médio. Os resultados revelaram que a compreensão dessas ideias ocorre por meio de transições entre múltiplas interpretações, características e conexões.

No contexto do tema função, o trabalho de Araújo (2021) destacou a

falta de abordagem da interpretação global das propriedades figurais, proposta por Duval (2011), para a correta leitura e interpretação das representações pelos alunos. Já Carvalho (2017) desenvolveu, aplicou e validou uma situação didática para o ensino do conceito de função, com base na TRRS e no uso do software Geogebra.

Nesta última, a autora observou que os alunos apresentaram dificuldades nas tarefas de conversão entre diferentes representações semióticas e na identificação dos domínios das funções. No entanto, as atividades desenvolvidas melhoraram o reconhecimento de representações gráficas e sua associação com representações algébricas e tabulares.

Da mesma forma, Tozo (2016) examinou as dificuldades no ensino e aprendizagem da função afim por meio da aplicação de tarefas exploratório-investigativas. O autor constatou que as atividades estimularam os alunos a generalizar o conceito e caracterizar a função por meio de registros em língua natural.

Por sua vez, Queiroz (2021) analisou o desempenho dos alunos do Ensino Médio ao abordar a inequação do primeiro grau, utilizando a conversão de registros de representação semiótica como base do processo de ensino e aprendizagem. Os resultados dessa pesquisa demonstraram a importância de trabalhar com múltiplos registros e a necessidade de investir na comunicação Matemática oral e escrita.

Meneses (2014), analisou as representações matemáticas utilizadas por alunos do Ensino Médio durante o ensino de função afim e função quadrática. Os dados foram coletados por meio de uma sequência de atividades, utilizando o livro didático *Matemática: Contexto & Aplicações* (Dante, 2010) e as anotações dos cadernos de quatro alunos participantes.

Os resultados mostraram que, de modo geral, as atividades propostas pelo livro didático e registradas nos cadernos dos alunos não enfatizavam a característica de ida e volta nas conversões de registros, bem como os registros gráficos. Após a aplicação da sequência de atividades, constatou-se que a maioria dos alunos recorreu a processos de algoritmos para executar a maioria das conversões.

Lago (2018) avaliou as contribuições dos registros de representação semiótica no processo de ensino e aprendizagem de alunos do Ensino Médio, com base na Engenharia Didática, e verificou que as maiores dificuldades dos alunos

estavam relacionadas à utilização dos registros gráficos para outras representações.

O trabalho de Santos (2021) utilizou uma sequência didática com o auxílio do software Geogebra para investigar como os alunos percebem as dimensões inferiores de uma pirâmide. Os resultados destacaram a produção e conversão de registros de representação necessários para a aprendizagem de Geometria.

Cabral (2019) desenvolveu uma sequência de atividades com foco em representações dinâmicas para o ensino de semelhança de triângulos, utilizando o software Geogebra. Foi possível identificar que a postura adotada pelo professor desempenha um papel fundamental na eficácia da sequência de atividades, valorizando as conjecturas dos alunos e conduzindo a aula de forma interrogativa.

Souza, V. A. (2017) buscou compreender a viabilidade do software de Geogebra no processo de ensino e aprendizagem de Geometria em turmas do Ensino Fundamental. Os dados foram coletados por meio de gravações das aulas, notas de campo, questionários, entrevistas e interações entre os alunos. Os resultados demonstraram que o uso do software é viável para estudantes dessa faixa etária, possibilitando o desenvolvimento de atividades diferenciadas.

Proença (2021) analisou como a prática docente pode interferir no processo de aquisição e articulação dos diferentes registros de representação dos números racionais, utilizando uma sequência didática durante aulas síncronas e assíncronas para alunos do Ensino Fundamental. A autora concluiu que tanto os materiais quanto a prática pedagógica devem estar alinhados ao objetivo de mobilizar os diferentes registros acerca dos números racionais, a fim de desenvolver as habilidades necessárias para o letramento matemático.

Alves (2014) desenvolveu e aplicou uma sequência didática para promover a apropriação do conceito de Número Racional em uma turma do Ensino Fundamental, com base na Engenharia Didática. A sequência didática permitiu que os alunos desenvolvessem a capacidade de realizar tratamentos e conversões de representações em linguagem natural, decimal, figural e fracionária.

Em relação ao objeto matemático frações, destaca-se o trabalho de Martins (2012), que aplicou e avaliou estratégias e atividades lúdicas e significativas para o ensino e aprendizagem de frações em duas turmas do Ensino Fundamental. Os resultados da pesquisa indicaram que o ensino baseado nas teorias abordadas foi mais significativo do que o método tradicional.

Da mesma forma, Lopes (2020) investigou se as práticas pedagógicas de professores de Matemática estão em consonância com as propostas pelos autores do livro didático *Vontade de Saber Matemática* de Souza e Pataro (2015) sobre o ensino de frações em uma turma do Ensino Fundamental. Os resultados revelaram que a relação entre o professor e o conhecimento ocorreu a partir do conjunto praxeológico, e o trabalho do docente consistiu em mediar o processo de transformação do conhecimento.

Nunomura (2021) abordou o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática no ensino de grandezas e medidas para alunos do Ensino Fundamental, demonstrando que a aprendizagem é subsidiada pelos diferentes registros produzidos pelos alunos.

Ronchetti (2018) investigou a aprendizagem das grandezas de massa e comprimento por meio de uma atividade de Modelagem Matemática sobre o lixo orgânico e sua transformação em adubo orgânico. Segundo o autor, essa abordagem contribuiu para a aprendizagem dos alunos sobre o objeto matemático.

Lima (2014) teve como objetivo compreender as contribuições de uma sequência didática sobre representações tabulares e gráficas, com o uso de tecnologias, para a aprendizagem de Estatística na Educação de Jovens e Adultos.

O autor verificou que atividades de leitura e interpretação de tabelas e gráficos possibilitaram a exploração de diferentes registros de representação, incluindo os de linguagem natural e numérico, além de promover o tratamento, conversão e coordenação entre eles.

O Quadro 7 indica as teses encontradas no banco de dados Google Acadêmico e apresenta em suas colunas, respectivamente, a codificação, título, autoria, ano de publicação, tipicidade e banco de dados.

Quadro 7 - Teses encontradas no Google Acadêmico

Cód.	Título	Autoria	Ano de Publicação	Tipicidade	Banco de Dados
7	A teoria dos registros de representação semiótica em um ambiente virtual de aprendizagem: uma proposta metodológica explorando os conceitos de ponto, reta e	Joseide Justin Dallemole	2019	Tese	Google Acadêmico

	circunferência no ensino médio.				
10	A conversão entre representações semióticas: um estudo no domínio das frações à luz de Duval e Vergnaud	Larissa Elfisia de Lima Santana.	2018	Tese	Google Acadêmico
14	Transformação de frações em números: uma experiência no ensino fundamental.	Izabela Cesario Correa Ananias	2019	Tese	Google Acadêmico
16	Compreensão conceptual de sistemas lineares: estudo de caso com o software geogebra em celulares	Vanessa Isabel Cataneo	2020	Tese	Google Acadêmico

Fonte: A própria autora.

O trabalho de Santana (2018) afirma que os maiores obstáculos na aprendizagem de frações estão relacionados com a multiplicidade de situações e representações relacionados a esse objeto matemático. Nesse sentido, a autora propõe em seu trabalho investigar como a conversão de frações é afetada por diferentes competências, sentidos, situações e representações semióticas. Como resultado, identificou aspectos relacionados ao desempenho, tipos de erros frequentes e estratégias de conversão que induziam ao erro por parte dos alunos.

Por sua vez, o trabalho de Ananias (2019) abordou as diferentes representações na apreensão das frações como parte de inteiro. Para isso, elaborou atividades inspiradas na metodologia de *Design Experiment* e constatou o amadurecimento dos alunos na compreensão de ordem e posição das frações em retas numéricas, bem como na correspondência a resultados de divisões entre números naturais.

Dalemolle (2019) investigou a implementação de uma proposta metodológica para o Ensino Médio sobre os conteúdos de Geometria Analítica articulada com os registros de representação semiótica por meio de um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA). O autor identificou o desenvolvimento de habilidades matemáticas e as dificuldades apresentadas pelos alunos e constatou que abordagens didático-pedagógicas que mobilizem e articulem diferentes registros de representação semióticos foram primordiais para o desenvolvimento da pesquisa.

Por fim, Cataneo (2020) investigou a potencialização da compreensão conceitual sobre sistemas lineares de primeiro grau a partir de atividades de conversão de registros mediadas pelo software Geogebra no Ensino Fundamental. Além de observar que o uso individual e consciente do software em sala de aula, como ferramenta de apoio, contribuiu para o interesse e produtividade dos alunos.

3.4 TRATAMENTO DOS RESULTADOS E INTERPRETAÇÕES DA RSL

Durante as análises, revisitamos as questões norteadoras da pesquisa de RSL e, para respondê-las, elencamos três categorias à priori, sendo estas: unidades temáticas, recursos didáticos e registros mobilizados. Após isso, foi possível observar algumas similaridades nos trabalhos e conseqüentemente a emergência de onze subcategorias.

A categoria 'Unidades Temáticas' compreendeu os conteúdos específicos de Matemática abordados nas análises dos trabalhos. Esses conteúdos foram organizados com base nas Unidades Temáticas sugeridas pela Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018).

Na subcategoria 'Números', encontramos 2 teses e 3 dissertações que se dedicaram ao desenvolvimento do pensamento numérico, com foco nos números racionais. Já na subcategoria 'Álgebra', temos 2 teses, 10 dissertações e 5 artigos que exploram o pensamento algébrico. Desses trabalhos, 13 abordaram o tema das funções, 1 tratou de sistemas lineares, 1 de equações algébricas, 1 de inequações algébricas e 1 sobre conceitos de Álgebra.

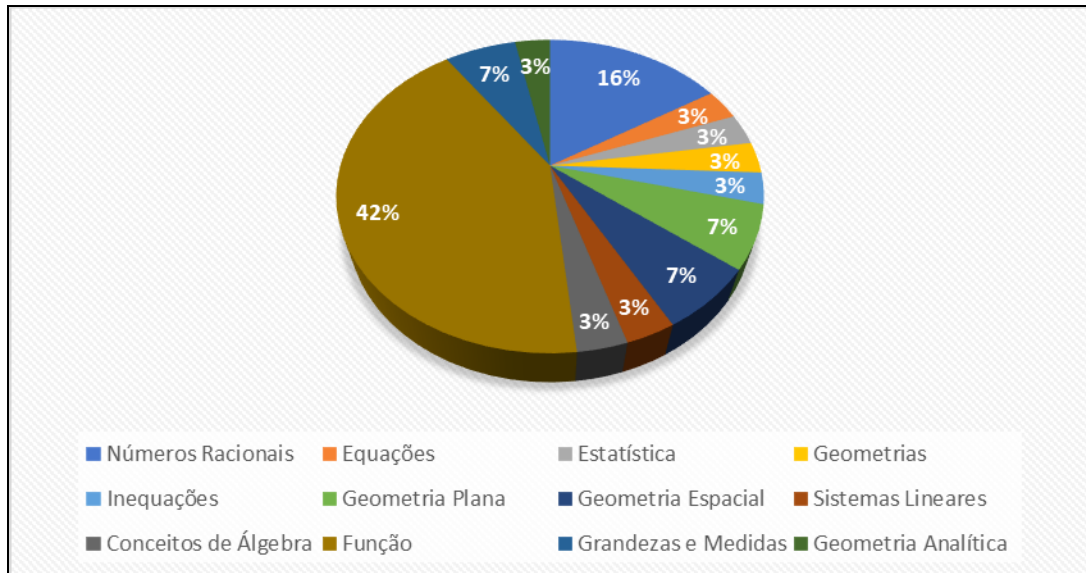
A subcategoria 'Geometria' inclui 1 tese, 3 dissertações e 2 artigos que se concentraram no desenvolvimento do pensamento geométrico. Desses trabalhos, 1 abordou conceitos de Geometria Analítica, 2 exploraram Geometria Espacial, 2 discutiram Geometria Plana e 1 trabalho articulou diferentes abordagens geométricas simultaneamente.

Na subcategoria 'Estatística', encontramos apenas um trabalho relacionado ao tratamento e interpretação de dados. É importante ressaltar que nenhum trabalho abordou a temática de Probabilidade, por isso essa subcategoria não recebeu o título de Estatística e Probabilidade.

Por fim, a subcategoria 'Grandezas e Medidas' engloba dois

trabalhos que se propuseram a estudar as medidas e as relações entre elas. A distribuição percentual desses trabalhos por conteúdo matemático pode ser visualizada no Gráfico 1.

Gráfico 1 - Distribuição dos trabalhos por objeto do conhecimento da RSL



Fonte: A própria autora.

A categoria 'Recursos Didáticos' englobou as estratégias utilizadas em sala de aula para abordar os conteúdos matemáticos, das quais surgiram duas subcategorias. A subcategoria 'Atividades' incluiu trabalhos nos quais foram aplicadas sequências de atividades ou sequências didáticas sem o uso de tecnologias. Nessa subcategoria, foram classificados 19 trabalhos (13 dissertações, 3 teses e 3 artigos).

Por outro lado, a subcategoria 'Tecnologias de Informação' abrangeu os trabalhos que utilizaram softwares como ferramenta para auxiliar na visualização das diversas representações. Nesse caso, foram identificados 12 trabalhos (6 dissertações, 2 teses e 4 artigos).

A categoria 'Registros Mobilizados' contemplou os tipos de registros de representação semiótica mais utilizados pelos alunos nas atividades. Foram observadas quatro subcategorias, organizadas de acordo com a classificação de Duval (2003).

A subcategoria 'Monofuncional Discursivo' compreendeu os registros de tratamentos algoritmizáveis em sistemas de escrita. Nessa subcategoria,

verificou-se uma maior incidência de mobilização dos registros numérico (17), algébrico (18) e tabular (16).

A subcategoria ‘Monofuncional Não-discursivo’ incluiu registros de tratamento algoritmizáveis que não puderam ser expressos na forma discursiva, como registros gráficos que foram mobilizados em 21 trabalhos. Por sua vez, a subcategoria ‘Multifuncional Discursivo’ abrangeu os registros de tratamento não algoritmizáveis em sistemas de escrita, como registros em língua natural, que foram identificados em 23 trabalhos.

Por fim, a subcategoria ‘Multifuncional Não-discursivo’ apresentou os registros de tratamento não algoritmizáveis que não puderam ser expressos na forma discursiva. Exemplos desses registros incluem registros figurais, que foram mobilizados em 19 dos trabalhos, e maquetes, identificadas em 2 trabalhos.

A Figura 5 mostra uma síntese das categorias e subcategorias da RSL.

Figura 5 - Categorias e subcategorias da RSL



Fonte: A própria autora.

A partir da análise dos dados observamos que cada estudo abordou, em média, quatro tipos diferentes de registros de representação, com maior ênfase nas classificações de Monofuncional-Discursivo e Multifuncional-Discursivo. A Figura

6 apresenta a distribuição das representações mobilizadas em cada trabalho analisado.

Figura 6 - Tipo de registro de representação semiótica mobilizado por trabalho da RSL

Tipo de Registro	Número do Trabalho																														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Numérico	■	■			■	■		■	■	■	■		■	■					■	■	■	■				■		■		■	
Algebrico	■	■	■	■			■	■	■		■	■			■	■	■				■			■			■				
Simbólico																															
Tabular	■	■	■	■	■	■		■			■	■	■		■				■		■	■				■					■
Aritmético	■	■																													
Gráfico				■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■			■		■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
Língua Natural	■	■	■	■	■			■	■	■	■		■			■	■			■	■	■	■	■	■		■		■	■	■
Figural	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■			■	■	■			■	■	■	■	■	■		■		■	■	■
Maquete	■		■																												

Fonte: A própria autora.

Isso pode indicar uma maior facilidade na mobilização de registros em sistemas de escrita, como evidenciado pelos 51 estudos que exploraram mobilizações em registros numéricos, algébricos e tabulares, bem como pelos 23 estudos que investigaram a mobilização da linguagem natural. Essas mobilizações representam, respectivamente, 41,1% e 18,5% do total de representações analisadas.

Uma observação interessante sobre a análise dos estudos, que não está categorizada, mas vale ressaltar, é a presença de pesquisas voltadas para diferentes etapas de ensino da Educação Básica. Foram encontrados nove estudos relacionados ao Ensino Fundamental, 14 relacionados ao Ensino Médio e um que abordou tanto o Ensino Fundamental quanto o Ensino Médio juntos. Além disso, foi identificado um estudo direcionado para a modalidade de Ensino de Jovens e Adultos.

É importante destacar que, para o ano de 2022, não foram encontrados trabalhos que abordassem a temática da articulação entre a Teoria dos registros de Representação Semiótica e Múltiplas Representações na Educação Matemática.

3.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS DA RSL

A realização desta pesquisa exploratória possibilitou a identificação

do conteúdo publicado no Brasil nos últimos dez anos sobre a TRRS e MR na Educação Matemática. Além disso, permitiu a visualização de que apenas uma pequena quantidade (13,2%) dos trabalhos publicados abordou essa temática.

A partir das análises realizadas foi constatada uma preocupação dos autores em relação ao ensino de Álgebra, mais especificamente ao objeto de conhecimento funções, que representou aproximadamente 76,5% dos trabalhos encontrados nessa categoria.

Além disso, observou-se uma escassez de publicações relacionadas ao ensino de Trigonometria, Probabilidade, Análise Combinatória, Matemática Financeira e Conjuntos Numéricos. Também não foram identificados trabalhos voltados à modalidade de ensino Educação Especial. Esses resultados indicam a necessidade de investigações sobre esses assuntos.

Outra observação feita a partir da categoria Recursos Didáticos foi que softwares têm sido amplamente utilizados como recursos complementares de aprendizagem. No entanto, ainda prevalecem abordagens que não fazem uso dessas ferramentas. Em relação aos registros utilizados pelos alunos, verificou-se que todos os trabalhos analisados empregaram diferentes tipos de registros de representação semiótica, com destaque para as representações em língua natural, seguidas pelos registros gráficos e figurais.

Na seção a seguir, apresentamos os aportes metodológicos da pesquisa e detalhamos o processo de desenvolvimento do Produto Educacional.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta seção, apresentamos os procedimentos metodológicos adotados para conduzir esta pesquisa. Por se tratar de um trabalho vinculado a um Mestrado Profissional, foi necessário criar um PE que buscasse minimizar as dificuldades encontradas no processo de aprendizagem matemática.

Para tanto, concentramos o nosso estudo na TRRS e nas MR, sendo dividido em três etapas: pré-aplicação, aplicação e pós-aplicação do PE.

Na etapa de pré-aplicação, realizamos a seleção e os estudos dos objetos que serviram de base para a elaboração da sequência de atividades. Em seguida, na etapa de aplicação, realizamos a implementação do PE na Educação Básica. Por fim, na etapa de pós-aplicação, executou-se a análise dos dados obtidos com o objetivo de validar o PE desenvolvido.

4.1 NATUREZA E TIPO DA PESQUISA

A presente pesquisa foi desenvolvida com base nos pressupostos da pesquisa qualitativa. Conforme Bogdan e Biklen (1994), A investigação qualitativa, amplamente utilizada na área de educação e de ensino, fornece estratégias que permitem o estudo de temáticas não estritamente quantificáveis, como os processos de ensino e de aprendizagem de conteúdos científicos.

Essa abordagem valoriza o uso de dados coletados em contextos naturais, que são ricos em informações sobre pessoas, locais e conversas, e requerem um tratamento estatístico complexo. Em virtude dessas características, esse tipo de pesquisa recebe o nome de qualitativa ou naturalista.

Flick (2009) ressalta que a pesquisa qualitativa parte do pressuposto de que as realidades em estudo são construções sociais. Nesse contexto, o foco está na perspectiva dos participantes, em suas práticas cotidianas e em seus conhecimentos relacionados à questão em estudo.

Bogdan e Biklen (1994) apresentam cinco características que definem uma pesquisa qualitativa. A primeira delas se refere à ideia de que a fonte direta de dados é o ambiente natural. Desse modo, em nosso estudo, a fonte direta de dados foi o ambiente de implementação da Sequência de Atividades. Isso implica

que os dados foram coletados no contexto em que as atividades foram realizadas pelos alunos.

A segunda característica relaciona-se com o fato de a investigação qualitativa seguir abordagem descritiva, isto é, há a captura de informações detalhadas sobre o desenvolvimento e implementação das atividades. Diante desse contexto, o levantamento de dados nesta pesquisa foi conduzido por meio de diversas abordagens, tais como anotações de campo realizadas durante a execução das atividades, notas das retomadas realizadas após as atividades, nas quais os alunos dialogaram com a professora, e análise dos registros elaborados pelos próprios alunos.

Para a terceira característica, os autores colocam que os investigadores qualitativos estão mais interessados no processo de aprendizagem. Sob essa perspectiva, em nosso estudo, nos preocupamos em elaborar uma sequência de atividades pautadas na TRRS e MR com vistas a favorecer o processo de aprendizagem em Trigonometria.

A quarta característica se refere ao fato da não obrigatoriedade de formulação de hipóteses previamente, com o intuito de testá-las ou refutá-las. Em nosso caso, as hipóteses emergiram ao longo do processo de investigação.

Por fim, a quinta característica destaca a ênfase da abordagem qualitativa em compreender como as pessoas atribuem significado às suas vidas ou a aspectos específicos dela. Isso envolve a investigação sobre como interpretam eventos ou fatos e por que escolhem essas interpretações em particular. Nesta pesquisa, buscamos capturar as perspectivas dos participantes, revelando as maneiras como eles percebem e compreendem a Matemática no mundo ao seu redor.

4.2 PERFIL DOS PARTICIPANTES

A seleção dos participantes da pesquisa foi direcionada pela própria formulação do problema de investigação, que inclui explicitamente o desenvolvimento e aplicação de uma sequência de atividades pautada na TRRS e MR acerca do conteúdo de Trigonometria.

Nesse contexto, o PE elaborado para este estudo é destinado aos alunos da única turma de 2ª ano do Ensino Médio de uma instituição privada situada

na região Norte do estado do Paraná, em consonância ao Currículo seguido pela instituição, que prevê, em grande maioria, o estudo de conteúdos relacionados à Trigonometria para esta etapa de ensino no conjunto de aprendizagens da Formação Geral Básica propostos pelo Novo Ensino Médio.

A turma selecionada conta com 20 estudantes de idade entre 15 a 16 anos, residentes na própria cidade onde a instituição está localizada e em cidades vizinhas.

Após a assinatura do Termo de Assentimento pela instituição (Apêndice A), como critérios de exclusão dos participantes, foi considerada a não assinatura do Termo de Assentimento Livre e Esclarecido - TALE (Apêndice B) e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE (Apêndice C), bem como não ter concluído uma das etapas da sequência de atividades. Em virtude disso, apenas 12 participantes tiveram suas produções incluídas para análise na atual investigação.

4.3 DESENVOLVIMENTO DO PRODUTO EDUCACIONAL

A linha de pesquisa Ensino e Aprendizagem em Ciências Naturais e Matemática representa um campo no âmbito educacional com enfoque na investigação e desenvolvimento de estratégias pedagógicas que visam promover a compreensão e o interesse dos alunos nessas disciplinas fundamentais. O PE intitulado "Sequência de Atividades de Trigonometria com base nas Múltiplas Representações e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica", apresentado nessa seção, alinha-se de maneira coesa com essa linha de pesquisa.

Ao adotar a abordagem de Múltiplas Representações, a sequência reconhece a diversidade de formas pelas quais os alunos podem compreender e internalizar conceitos trigonométricos complexos. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica, por sua vez, fornece uma estrutura conceitual robusta para analisar as diferentes linguagens e formas simbólicas usadas no ensino dessas disciplinas.

Desse modo, considerando o problema de pesquisa, objetivos e justificativa da atual investigação, devidamente detalhados em seção introdutória do presente texto, além das ponderações obtidas com a realização da revisão de literatura acerca da TRRS e das MR na Educação Matemática, descrita em seção

própria, apresentamos a seguir o desenvolvimento do Produto Educacional.

Tal PE é caracterizado como “PTT 1 – Material didático instrucional” na ficha de avaliação quadrienal (2017-2020) da área de Ensino⁶, consistindo numa Sequência de Atividades (SA). Seu intuito foi elaborar e disponibilizar um material didático que pudesse contribuir tanto para o ensino quanto para a aprendizagem da Trigonometria, linha de pesquisa a que pertence a atual investigação. Para tanto, todas as suas etapas e atividades foram pensadas e embasadas nos pressupostos da TRRS e das MR.

A SA destaca-se por incorporar um diferencial significativo ao abordar os conceitos de Trigonometria por meio de sua aplicação em situações práticas. Ao adotar essa abordagem, a sequência não apenas transmite conhecimentos teóricos, mas também estabelece uma ponte clara entre a teoria e sua relevância no mundo real.

O uso dessa estratégia visa despertar o interesse dos alunos ao demonstrar como os conceitos trigonométricos podem ser diretamente aplicados para resolver problemas do cotidiano ou em contextos específicos. Ao contextualizar a Trigonometria de forma prática, a SA proporciona uma experiência de aprendizado mais envolvente, estimulando não apenas a compreensão dos alunos, mas também cultivando um apreço mais profundo pela utilidade e aplicabilidade desses conhecimentos matemáticos.

Dessa forma, a SA não apenas pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático, mas também promove uma abordagem mais motivadora e contextualizada no ensino de Trigonometria.

Além disso, a SA foi desenvolvida de maneira multidisciplinar, incorporando conteúdos de História, Geografia, Matemática e Astronomia com carga horária total de 16 horas, destinada aos estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

No Quadro 8 apresentamos a estrutura geral da SA, explicitando as etapas e as atividades referentes a cada uma delas, os objetivos, o modo de participação dos alunos, representações semióticas utilizadas e a duração de cada atividade.

Quadro 8 – Estrutura geral da sequência de atividades

⁶ Disponível em: https://www.gov.br/capes/pt-br/centrais-de-conteudo/FICHA_ENSINO.pdf, acesso em: 08/02/2024.

Etapa	Objetivo	Participação	Representações Semióticas	Hora/Aula
Atividade 1: A Terra é plana?	Estimar a medida da circunferência da Terra.	Duplas	Multifuncional não-discursiva Monofuncional discursiva Multifuncional discursiva	04
Atividade 2: Localização em alto mar	Estimar distâncias marítimas pelo método da triangulação.	Grupos com 4 alunos	Multifuncional não-discursiva Monofuncional discursiva Multifuncional discursiva	04
Atividade 3: Como os navios são lançados ao mar?	Utilizar as razões trigonométricas no triângulo retângulo para estudar planos inclinados usados para o lançamento e recolhimento de embarcações	Individual	Multifuncional não-discursiva Multifuncional discursiva Monofuncional discursiva	04
Atividade 4: Como estimar a distância Terra-Lua?	Estimar a distância Terra-Lua pelo método de paralaxe.	Grupos com 4 alunos	Multifuncional não-discursiva Monofuncional discursiva Multifuncional discursiva	04

Fonte: A própria autora.

Cada etapa do processo da SA foi meticulosamente planejada e desenvolvida pela pesquisadora com o propósito de estimular o progresso do aluno, reconhecendo-o não apenas como um receptor passivo de conteúdo, mas como um agente ativo na construção de seu próprio conhecimento. Com esse objetivo em

mente, foram criadas atividades que exploram a aplicação de conceitos de Trigonometria em situações do mundo real. Ressaltamos que os dados oriundos da implementação da SA serão analisados em seção posterior.

Nesse contexto, o professor desempenha o papel de mediador, utilizando questionamentos, reflexões e facilitando diversas interações entre os estudantes.

A SA é apresentada por meio de etapas, as quais englobam atividades a serem desenvolvidas. Para conduzir essas atividades de forma eficiente, são disponibilizados na segunda seção do PE textos complementares intitulados "Material do Aluno", os quais foram especialmente criados para dar suporte à aplicação da SA, apresentando figuras e sugestões de problemas para o desenvolvimento das atividades. Esses recursos podem ser acessados integralmente em <http://www.uenp.edu.br/mestrado-ensino>.

4.4 COLETA DE DADOS E REFERENCIAL DE ANÁLISE

Conforme já abordado anteriormente na subseção 2.1, no que tange a TRRS, para Duval (2012) a compreensão da matemática se dá pelo uso coordenado de ao menos dois registros de representação semiótica distintos. Em vista disso, para a coleta e análise de dados dessa pesquisa nos apoiamos nos pressupostos da TRRS e na exploração dos registros produzidos pelos alunos na resolução das atividades propostas em cada etapa. Ressaltamos, ainda, que ao final de cada etapa, a professora realizou uma retomada com os estudantes acerca das representações elaboradas.

Desse modo, na primeira etapa, propomos como material de análise os registros de representação semiótica e suas respectivas transformações executados pelos alunos nos procedimentos de cada uma das etapas do PE, conforme sintetizado pelo Quadro 8.

Como referencial auxiliar para organização e padronização dos dados coletados, nos fundamentamos na Análise de Conteúdo (AC) de Bardin (2011). Segundo a autora, esta estratégia se caracteriza por um conjunto de técnicas de análise, por procedimentos sistemáticos, que se aplicam a discursos diversificados. Assim, compreende-se que a Análise de Conteúdo leva em consideração os significados do conteúdo a ser analisado, sendo este o motivo primordial de nossa escolha por esse conjunto de técnicas de análise.

De acordo com Bardin (2011), a organização da análise por meio da AC se dá a partir de três polos cronológicos, são eles: a pré-análise; a exploração do material; o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

A fase de pré-análise se trata da organização das ideias iniciais a fim de conduzir as operações sucessivas no plano de análise, trata-se, de modo geral, da escolha dos documentos, formulação de hipóteses, objetivos e indicadores que fundamentam a interpretação dos dados.

Já a fase da exploração do material é definida como os procedimentos executados manualmente ou por meio de operações realizadas por computador, das quais envolvem principalmente atividades de codificação, decomposição ou enumeração que seguem regras sistemáticas de análise.

Finalmente, a fase do tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação são operações que permitem expor as informações fornecidas pela análise em quadros, diagramas, figuras ou modelos, para assim realizar as interpretações levando-se em consideração os objetivos previstos ou descobertas inesperadas.

Nesse contexto, apresentamos na próxima seção o processo de análise de dados.

5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Durante a realização das atividades, observou-se que os aprendizes empregaram registros de representação conforme a necessidade ou atendendo aos pedidos da professora. Assim, os alunos utilizaram diversas formas de representação semiótica e as coordenaram à medida que conduziam processos de tratamento e conversão. Ademais, também se observou a presença das funções pedagógicas das MR e de objetos matemáticos relacionados à Trigonometria.

Seguindo os pressupostos dos referenciais da AC e TRSS, os excertos obtidos nas atividades 'A Terra é plana?', 'Localização em alto mar', 'Como os navios são lançados ao mar?' e 'Como estimar a distância Terra-Lua?' foram codificados em 68 registros, simbolizados por R1, R2, R3, ..., R68.

A seguir, apresentamos a análise dos dados de cada etapa da SA. Cabe ressaltar que foram analisados os registros produzidos por 12 alunos, conforme descrito em seção própria, distribuídos em: etapa 1: duplas; etapa 2: grupos de 4 integrantes; etapa 3: individual; etapa 4: grupos de 4 integrantes.

5.1 ETAPA 1

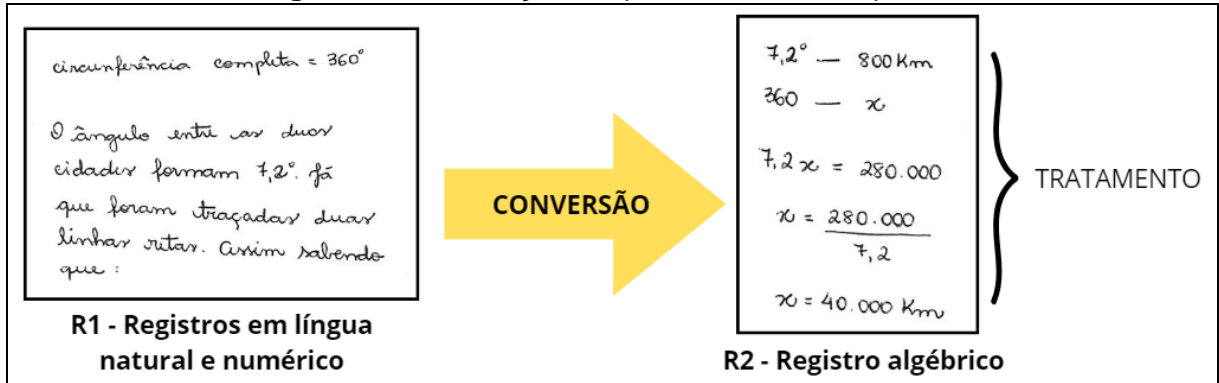
Na etapa 1, elaborou-se a atividade denominada A Terra é plana? com base no método empregado por Eratóstenes para estimar a circunferência da Terra. Esse procedimento, na época, permitiu confirmar a natureza 'esférica' do planeta Terra. Para essa etapa, foram propostos dois problemas calcular a circunferência e o raio da Terra.

A análise dessa atividade foi realizada com base nos registros produzidos pelas duplas EL, AML, LP, AMA, BJ e GL, alunos de uma turma de 2º ano do Ensino Médio. Durante a análise das produções acerca do primeiro problema (cálculo da circunferência da Terra), destacaram-se dois métodos de resolução, sendo eles a regra de três simples e operações matemáticas básicas (processos de multiplicação e divisão). Já para o segundo problema (cálculo do raio da Terra), identificamos apenas resoluções pelo método equação do comprimento da circunferência.

A seguir apresentamos, para cada dupla, os registros elaborados pelos alunos, nossa análise dos dados coletados a partir da resolução dos problemas propostos e um quadro síntese.

Iniciamos nossa análise dessa primeira etapa apresentando, por meio da Figura 7, a resolução do primeiro problema produzido pela dupla EL que utilizou o método regra de três simples.

Figura 7 – Resolução do problema 1 da dupla EL



Fonte: Dados da pesquisa.

Com base na Figura 7 observamos que a dupla iniciou a resolução da atividade por meio da produção de um registro em **língua natural e numérico (R1)**. Quando questionados a respeito do trecho 'Já que foram traçadas duas linhas retas' presente nesse registro, a dupla explicou que fazia referência à uma figura presente no material do aluno que mostrava o prolongamento das estacas em direção ao centro da Terra, responsáveis pela formação do ângulo central de $7,2^\circ$ na circunferência.

Dessa forma, notamos que o registro **R1** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois apoiou o entendimento da figura das estacas em direção ao centro da Terra presente no material do aluno proposto na SA.

Em seguida, a dupla realizou a **conversão** do registro **R1** para o registro **algébrico (R2)** a partir da construção de uma regra de três simples. Nesse momento, identificamos a atividade de **tratamento**, uma vez que operações matemáticas básicas foram empregadas para realizar os cálculos.

Como ambos os registros apresentavam o compartilhamento de informações a respeito dos ângulos 360° e $7,2^\circ$, também identificamos que essas representações desempenharam a função pedagógica **complementar**.

A seguir apresentamos a Figura 8 que mostra a resolução do segundo problema produzida pela dupla EL.

Figura 8 – Resolução do problema 2 da dupla EL.

$C = 2\pi r$ $40.000 = 2 \cdot 3,14 r$ $40.000 = 6,28 r$ $\frac{40.000}{6,28} = r$ $r = 6.369,426... \text{ km}$	}	TRATAMENTO
R3 - Registro algébrico		

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao apresentarmos o segundo problema à turma identificamos que os alunos prontamente afirmaram que resolveriam o problema utilizando a equação do comprimento da circunferência. Ao indagarmos as duplas sobre o método de resolução, explicaram que escolheriam essa equação devido à associação do formato do planeta Terra a uma circunferência (figura presente no material do aluno da SA), cuja medida do comprimento já havia sido descoberta por eles na resolução do problema 1.

Assim, identificamos que o registro **algébrico (R3)** produzido pela dupla EL, apresentou a atividade de **tratamento**, pois utilizou operações básicas da Matemática em sua resolução. Além disso, podemos entender que **R3**, em conjunto com **R1 e R2**, desempenharam a função pedagógica **aprofundar**, uma vez que EL utilizou das relações entre as representações produzidas no problema 1 (R1 e R2) em conjunto com R3 para resolver o problema 2.

Ainda, identificamos que os registros **R2 e R3** desempenharam a função pedagógica **complementar**, pois compartilharam entre si a informação do comprimento da circunferência do planeta Terra.

Diante disso, apresentamos o Quadro 9 com uma síntese da análise do que foi produzido pela dupla EL (Figuras 7 e 8), com os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

Quadro 9 – Análise da dupla EL

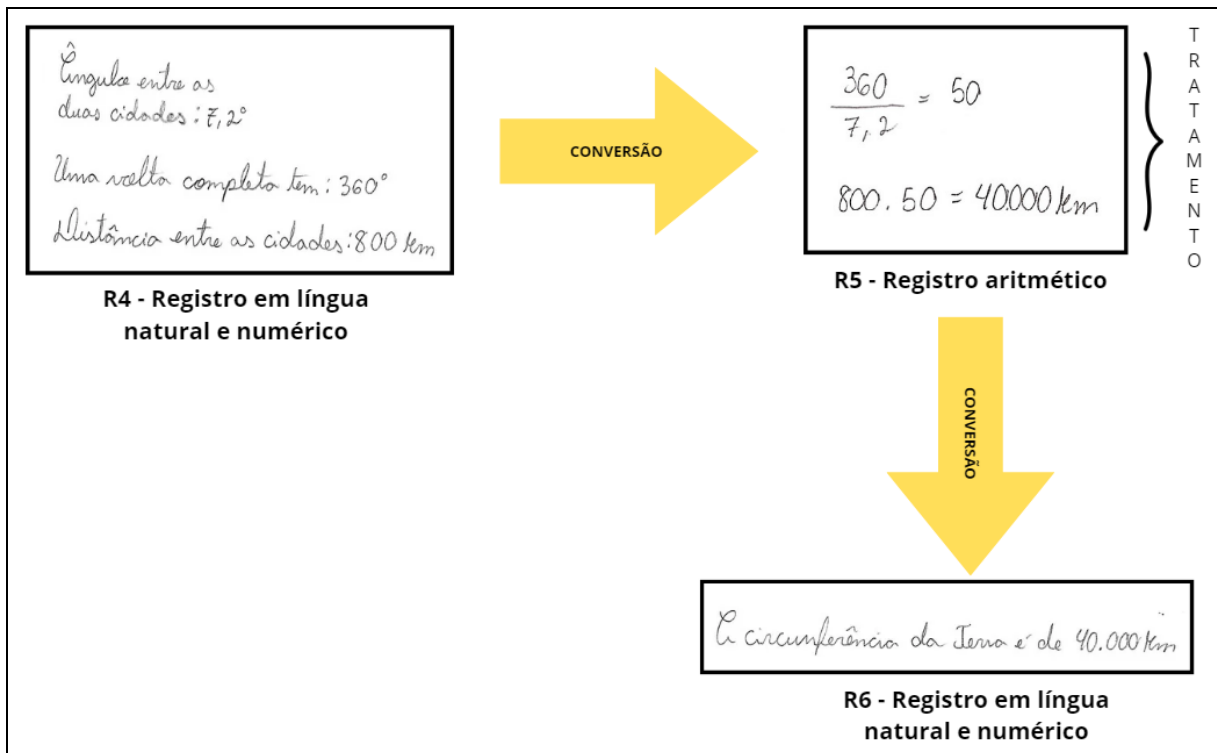
Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas

R1 - Língua natural e numérico	Conversão (de R1 para R2)	Complementar (R1 e R2 relativos aos ângulos 360° e 7,2°; R2 e R3 no comprimento da circunferência da Terra)
R2 – Algébrico	Tratamento (em R2 e R3)	Restringir (R1 em conjunto com Figura do material SA para entendimento das estacas em direção ao centro da Terra)
R3 - Algébrico		Aprofundar (R1, R2 e R3 na resolução do segundo problema)

Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, iniciamos a análise da dupla AML, apresentando a Figura 9 com a resolução do primeiro problema, na qual utilizaram o método operações básicas da Matemática.

Figura 9 – Resolução do problema 1 da dupla AML



Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que a dupla iniciou a resolução do problema por meio da produção do registro em **língua natural e numérico (R4)**. Na Figura 9 consta

que a dupla anotou algumas informações consideradas importantes a respeito do ângulo formado entre as cidades de Siena e Alexandria, a distância entre elas e também o ângulo relativo a uma volta completa na circunferência.

Ao serem questionados quanto a esse registro, os alunos explicaram que se tratavam de informações apresentadas no vídeo 'Quer que desenhe? Eratóstenes'. Logo, identificamos que **R4** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois usou **R4** para apoiar a interpretação da dupla a respeito das informações apresentadas pelo vídeo 'Quer que desenhe? Eratóstenes'.

Em seguida, a dupla realizou a **conversão** do registro **R4** para o registro **aritmético (R5)**, determinando a divisão entre os ângulos de 360° e $7,2^\circ$. Após isso, multiplicaram o resultado da divisão pela medida 800 quilômetros, estimando a medida da circunferência da Terra.

Ao questionarmos a dupla quanto ao método de resolução do problema, responderam que a atividade foi 'fácil' de resolver, pois a partir do experimento de Eratóstenes foi possível saber que no contorno do planeta Terra cabiam 50 vezes a distância entre as cidades de Siena e Alexandria, informação presente no texto 'O cálculo de Eratóstenes' presente no material do aluno.

Com base nisso, identificamos que **R5** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois apoiou o entendimento da dupla a respeito de informações presentes no texto 'O cálculo de Eratóstenes' presente no material da SA.

Do mesmo modo, identificamos que **R4** e **R5** desempenharam a função pedagógica **complementar**, pois suas informações foram exploradas em conjunto na estimativa da circunferência da Terra.

Por fim, a dupla realizou a **conversão** do registro **R5** para o registro **em língua natural e numérico (R6)** expressando a conclusão de seus cálculos.

A seguir, iniciamos a análise do segundo problema da dupla AML, apresentando a Figura 10 que mostra a resolução produzida pelo método equação do comprimento da circunferência.

Figura 10 – Resolução do problema 2 da dupla AML

R7 - Registro algébrico

Fonte: Dados da pesquisa.

Observando a Figura 10, identificamos que o registro **algébrico (R7)** elaborado pela dupla AML apresentou a atividade de **tratamento**, ao empregar operações matemáticas básicas em sua resolução. Além disso, podemos entender que **R7**, em conjunto com **R4**, **R5** e **R6**, desempenharam a função pedagógica **aprofundar**, uma vez que AML utilizou das relações entre as representações produzidas no problema 1 (R4, R5 e R6) em conjunto com R7 para resolver o problema 2.

Adicionalmente, identificamos que os registros **R6** e **R7** exerceram a função pedagógica **complementar**, ao compartilhar informações sobre o comprimento da circunferência do planeta Terra entre si.

Diante disso, apresentamos o Quadro 10 com uma síntese da análise do que foi produzido pela dupla AML (Figuras 9 e 10), com os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

Quadro 10 – Análise da dupla AML

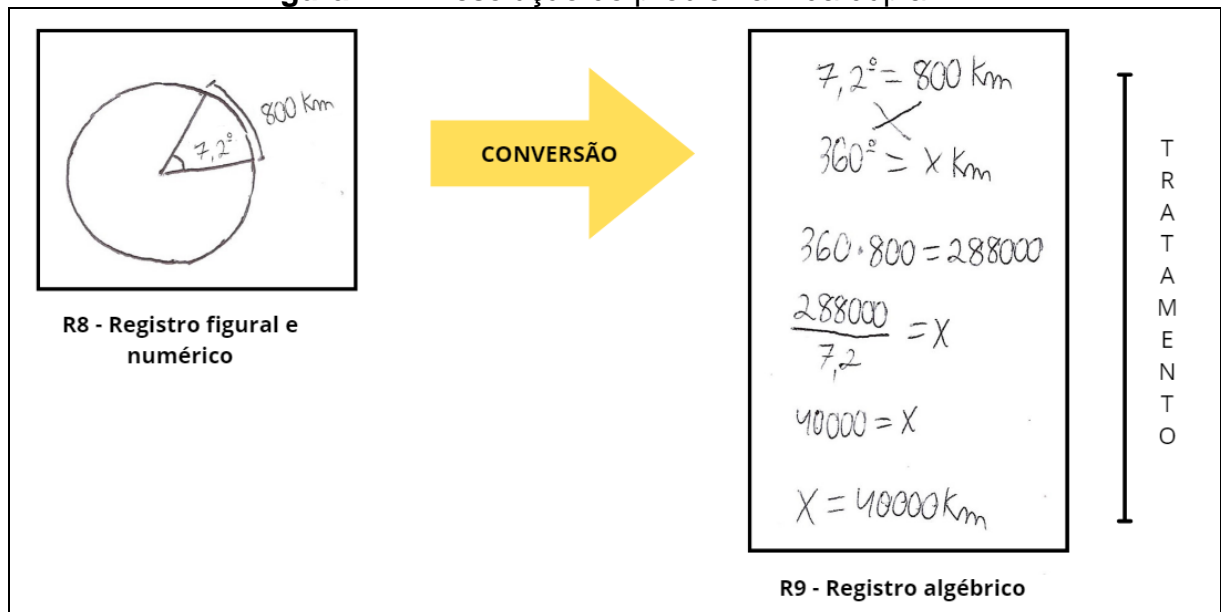
Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
R4 - Língua natural e numérico	Conversão (de R4 para R5; de R5 para R6)	Complementar (R4 e R5 em conjunto para a estimativa da circunferência da Terra; R6 e R7 no comprimento da circunferência da Terra)
R5 - Aritmético		
R6 – Língua natural	Tratamento (em R4;	

e numérico	em R7)	Restringir (R4 restringiu a interpretação do vídeo 'Quer que desenhe? Eratóstenes'; R5 restringiu o entendimento do texto 'O cálculo de Eratóstenes' presente no material da SA)
R7 - Algébrico		Aprofundar (R4, R5, R6 e R7 na resolução do segundo problema)

Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, iniciamos a análise da dupla LP, apresentando a Figura 11 com a resolução do primeiro problema, na qual utilizaram o método regra de três simples.

Figura 11 – Resolução do problema 1 da dupla LP



Fonte: Dados da pesquisa.

Na resolução apresentada na Figura 11 identificamos que inicialmente os alunos representaram o planeta Terra, o ângulo central de $7,2^\circ$ e também o arco formado pela distância entre as cidades de Siena e Alexandria por meio de um registro **figural e numérico (R8)**. Ao serem questionados a respeito dessa representação, os alunos responderam que foi a forma mais fácil que encontraram para 'resumir' a descoberta de Eratóstenes apresentada no vídeo 'Quer

que desenhe? Eratóstenes’. Desse modo, identificamos que essa representação desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois apoiou a interpretação da dupla a respeito do vídeo ‘Quer que desenhe? Eratóstenes’.

Em seguida, a dupla realizou a **conversão** do registro **R8** para o **algébrico (R9)** fazendo uso de uma regra de três simples. Em seus cálculos os alunos também apresentaram a multiplicação do ângulo de 360° pela distância de 800 quilômetros, o que infere a transformação de **tratamento** desse registro.

Por fim, identificamos a função pedagógica **complementar** para os registros **R8** e **R9**, pois utilizaram de forma conjunta as medidas $7,2^\circ$ e 800 quilômetros.

A seguir, iniciamos a análise do segundo problema da dupla LP, apresentando a Figura 12 que mostra a resolução produzida pelo método equação do comprimento da circunferência.

Figura 12 – Resolução do problema 2 da dupla LP

$$40000 = 2\pi R$$

$$\frac{40000}{2\pi} = R$$

$$\frac{40000}{6,28} = R$$

$$R = 6369 \text{ Km}$$

} TRATAMENTO

R10 - Registro algébrico

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao analisar a Figura 12, identificamos que o registro **algébrico (R10)** desenvolvido pela dupla LP apresentou a atividade de **tratamento**, ao empregar operações matemáticas básicas em sua resolução. Além disso, podemos entender que **R10**, em conjunto com **R8** e **R9**, desempenharam a função pedagógica **aprofundar**, uma vez que LP utilizou das relações entre as representações produzidas no problema 1 (R8 e R9) em conjunto com R10 para resolver o problema 2.

Ademais, observamos que os registros **R9** e **R10** desempenharam a função pedagógica **complementar**, ao compartilhar informações sobre o comprimento da circunferência do planeta Terra.

Diante do exposto, apresentamos o Quadro 11, que sintetiza a análise do que foi produzido pela dupla LP (Figuras 11 e 12), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

Quadro 11 – Análise da dupla LP

Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
R8 - Figural e numérico	Conversão (de R8 para R9)	Complementar (R8 e R9 nas medidas 7,2° e 800 quilômetros; R9 e R10 no comprimento da circunferência da Terra)
R9 – Algébrico	Tratamento (em R9 e R10)	Restringir (R8 restringiu a interpretação do vídeo ‘Quer que desenhe? Eratóstenes’)
R10 - Algébrico		Aprofundar (R8, R9 e R10 na resolução do segundo problema)

Fonte: Dados da pesquisa.

Em seguida, iniciamos a análise da dupla AMA, apresentando a Figura 13 com a resolução do primeiro problema, na qual utilizaram o método regra de três simples.

Figura 13 – Resolução do problema 1 da dupla AMA



Fonte: Dados da pesquisa.

A partir da Figura 13, identificamos que os alunos utilizaram registros em **língua natural e numérico (R11)** para representar informações acerca das cidades de Siena e Alexandria. Quando questionados sobre esse registro, os alunos responderam que essas informações haviam sido tratadas no vídeo 'Quer que desenhe? Eratóstenes'. Além disso, também registraram a palavra 'circunferência', que de acordo com a dupla, se referiu ao conteúdo matemático já estudado por eles que norteou a resolução da atividade.

Assim, identificamos que o registro **R11** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois apoiou a interpretação da dupla a respeito de informações presentes no vídeo 'Quer que desenhe? Eratóstenes' e pelo uso de uma representação familiar ('circunferência') para a resolução do problema.

Em seguida, a dupla realizou a **conversão** entre o registro **R11** para o registro **algébrico (R12)** indicada a partir da regra de três simples. Segundo os alunos, por meio desse registro tentaram expressar uma proporção entre o ângulo de $7,2^\circ$ e a distância de 800 quilômetros, assim como para o ângulo de 360° e 'todo' o planeta Terra.

Destarte, identificamos que a representação **R12** também desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois entendemos que os alunos recorreram ao uso de uma representação familiar para realizarem seus cálculos.

Além disso, também consideramos que o **R11** e o registro **R12** desempenharam a função pedagógica **complementar**, pois compartilhavam as informações $7,2^\circ$ e 800 quilômetros.

A seguir, iniciamos a análise do segundo problema da dupla AMA, apresentando a Figura 14 que mostra a resolução produzida pelo método equação do comprimento da circunferência.

Figura 14 – Resolução do problema 2 da dupla AMA

TRATAMENTO

$$R = \frac{40\,000}{2\pi} \rightarrow \frac{20\,000}{\pi} \rightarrow 6\,366,2$$

$$R \approx 6\,366,2 \text{ km}$$

R13 - Registro algébrico

Fonte: Dados da pesquisa.

Observando a Figura 14, identificamos que o registro **algébrico (R13)** elaborado pela dupla AMA apresentou a atividade de **tratamento**, ao utilizar operações matemáticas básicas em sua resolução. Além disso, podemos entender que **R13**, em conjunto com **R11 e R12**, desempenharam a função pedagógica **aprofundar**, uma vez que AMA utilizou das relações entre as representações produzidas no problema 1 (R11 e R12) em conjunto com R13 para resolver o problema 2.

Além disso, notamos que os registros **R12 e R13** desempenharam a função pedagógica **complementar**, ao compartilhar informações sobre o comprimento da circunferência do planeta Terra.

Diante do exposto, apresentamos o Quadro 12, que sintetiza a análise do que foi produzido pela dupla AMA (Figuras 13 e 14), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

Quadro 12 – Análise da dupla LP

Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
R11 - Língua natural e numérico	Conversão (de R11 para R12)	Complementar (extração de informações diferentes via R11 e R12; em R12 e R13 no comprimento da circunferência do planeta Terra)
R12 – Algébrico	Tratamento (em	

R13 - Algébrico	R12 e R13)	Restringir (R11 restringiu a interpretação de informações presentes no vídeo 'Quer que desenhe? Eratóstenes' e pelo uso da representação familiar 'circunferência' como base para trabalhar ângulos; R12 uso de representação familiar em cálculos)
		Aprofundar (R11, R12 e R13 na resolução do segundo problema)

Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, iniciamos a análise da dupla BJ, apresentando a Figura 15 com a resolução do primeiro problema, na qual utilizaram o método operações básicas da Matemática.

Figura 15 – Resolução do problema 1 da dupla BJ

CONVERSÃO → volta completa

$\frac{360}{7,2} = 50$ arco que separa as cidades

ângulo entre as duas cidade

distância entre as cidades

$800 \cdot 50 = 40000 \text{ Km}$

TRATAMENTO → circunferência da Terra

R14 - Registros em língua natural e R15 - Registros aritméticos

Fonte: Dados da pesquisa.

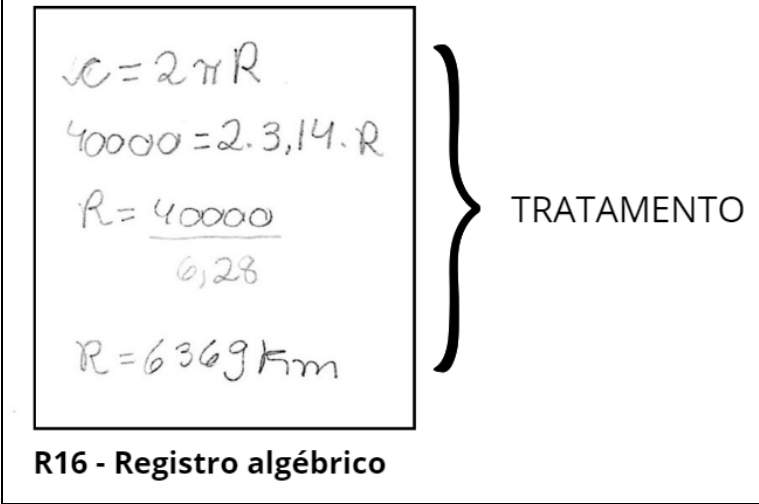
Podemos perceber, pela Figura 15, que esta dupla utilizou registros em língua natural (R14) e aritmético (R15) para expressar a solução do problema, bem como realizou a transformação de **tratamento** por meio das operações de multiplicação e divisão. Observamos ainda, que os alunos realizaram a **conversão** do registro R15 para o registro R14, indicada pelas flechas desenhadas pelos próprios alunos e pela correspondência entre os elementos desses registros.

Ademais, evidenciamos no registro **R14**, o reconhecimento dos conceitos matemáticos acerca da circunferência por parte dos alunos ao indicarem informações como ‘*volta completa*’, ‘*ângulo entre as duas cidades*’ e ‘*arco que separa as cidades*’. Ao serem questionados sobre esse registro, os alunos explicaram que tinham o intuito de mostrar à professora o que significava cada número utilizado na resolução.

Assim, identificamos que **R14** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois entendemos que a dupla recorreu ao uso de uma representação familiar para explicar seus cálculos. Do mesmo modo, identificamos que os registros **R14** e **R15** desempenharam em conjunto a função pedagógica **complementar**, pois compartilhavam a informação da razão entre os ângulos 360° e $7,2^\circ$.

A seguir, iniciamos a análise do segundo problema da dupla BJ, apresentando a Figura 16 que mostra a resolução produzida pelo método equação do comprimento da circunferência.

Figura 16 – Resolução do problema 2 da dupla BJ



The image shows a handwritten mathematical solution for finding the radius of a circle. The steps are as follows:

$$C = 2\pi R$$

$$40000 = 2 \cdot 3,14 \cdot R$$

$$R = \frac{40000}{6,28}$$

$$R = 6369 \text{ Km}$$

A large curly bracket on the right side of the equations is labeled "TRATAMENTO". Below the equations, the text "R16 - Registro algébrico" is written.

Fonte: Dados da pesquisa.

Observando a Figura 16, identificamos que o registro **algébrico** (**R16**) elaborado pela dupla BJ apresentou a atividade de **tratamento**, ao efetuar operações matemáticas básicas em sua resolução. Além disso, podemos entender que **R16**, em conjunto com **R14** e **R15**, desempenharam a função pedagógica **aprofundar**, uma vez que BJ utilizou das relações entre as representações produzidas no problema 1 (**R14** e **R15**) em conjunto com **R16** para resolver o problema 2.

Além disso, notamos que os registros **R15 R16** desempenharam a função pedagógica **complementar**, ao compartilhar informações sobre o comprimento da circunferência do planeta Terra.

Diante do exposto, apresentamos o Quadro 13, que sintetiza a análise do que foi produzido pela dupla BJ (Figuras 15 e 16), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

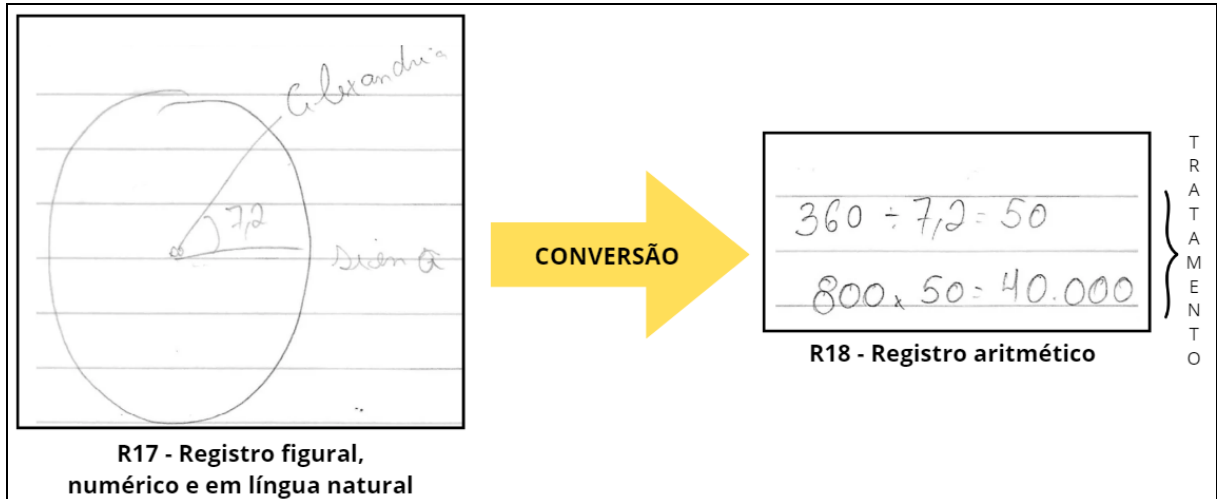
Quadro 13 – Análise da dupla BJ

Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
R14 - Língua natural	Conversão (de R15 para R14) Tratamento (em R14; em R16)	Restringir (R14 uso de representações familiares para restringir o entendimento da resolução)
R15 – Aritmético		Complementar (R14 e R15 na razão entre os ângulos 360° e $7,2^\circ$; R15 e R16 no comprimento da circunferência da Terra)
R16 - Algébrico		Aprofundar (R14, R15 e R16 na resolução do segundo problema)

Fonte: Dados da pesquisa.

Em seguida, iniciamos a análise da dupla GL, apresentando a Figura 17 com a resolução do primeiro problema, na qual utilizaram o método operações básicas da Matemática.

Figura 17 – Resolução do problema 1 da dupla GL



Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos perceber, a partir do registro **figural, numérico e em língua natural (R17)**, que os alunos dessa dupla dão indícios de que compreenderam que o ângulo formado pela projeção da sombra da estaca em direção ao centro da Terra correspondia a apenas uma parte de sua circunferência, isto é, o arco formado pela distância entre as cidades de Siena e Alexandria. Nesse caso, identificamos que **R17** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois restringiu a interpretação da dupla a respeito das informações de uma figura apresentada no texto 'O cálculo de Eratóstenes' do material do aluno.

Em seguida, por meio da **conversão** do **R17** para o registro **aritmético (R18)**, os alunos calcularam a divisão entre os ângulos 360° e $7,2^\circ$, inferindo a transformação de **tratamento**. Quando questionados sobre o motivo de realizarem essa divisão, os alunos responderam que esta foi uma forma de escrever que 'o ângulo de $7,2^\circ$ cabe 50 vezes dentro do ângulo de 360° '.

Nesse sentido, identificamos que o registro **R18** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois também restringiu a interpretação da dupla a respeito de informações apresentadas no texto 'O cálculo de Eratóstenes'.

Posteriormente, os alunos multiplicaram a distância entre as cidades de Alexandria e Siena por 50 para determinarem a circunferência do planeta Terra. Identificamos que os registros **R17** e **R18** desempenharam a função pedagógica **complementar**, pois compartilharam entre si o ângulo $7,2^\circ$.

A seguir, iniciamos a análise do segundo problema da dupla GL, apresentando a Figura 18 que mostra a resolução produzida pelo método equação do comprimento da circunferência.

Figura 18 – Resolução do problema 2 da dupla GL

R19 - Registro algébrico

Fonte: Dados da pesquisa.

Por meio da Figura 18, identificamos que o registro **algébrico (R19)** elaborado pela dupla GL apresentou a atividade de **tratamento**, no uso de operações matemáticas básicas em sua resolução. Além disso, podemos entender que **R19**, em conjunto com **R17 e R18**, desempenharam a função pedagógica **aprofundar**, uma vez que GL utilizou das relações entre as representações produzidas no problema 1 (R17 e R18) em conjunto com R19 para resolver o problema 2.

Ainda, notamos que os registros **R18 e R19** desempenharam a função pedagógica **complementar**, ao compartilhar informações sobre o comprimento da circunferência do planeta Terra.

Tendo em vista as informações anteriores, concluímos nossa análise da etapa 1 apresentando o Quadro 14, que sintetiza a análise do que foi produzido pela dupla GL (Figuras 17 e 18), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

Quadro 14 – Análise da dupla GL

Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
R17 – Figural, numérico e língua natural	Conversão (de R17 para R18) Tratamento (em	Complementar (R17 e R18 na informação do ângulo 7,2°; R18 e R19 no comprimento da circunferência da Terra)

R18 – Aritmético R19 - Algébrico	R18 e R19)	Restringir (R17 restringiu a interpretação de uma figura apresentada no texto ‘O cálculo de Eratóstenes’; R18 restringiu a interpretação do texto ‘O cálculo de Eratóstenes’) Aprofundar (R17, R18 e R19 na resolução do segundo problema)
---	------------	---

Fonte: Dados da pesquisa.

5.2 ETAPA 2

Na etapa 2, elaborou-se a atividade denominada Localização em alto mar, que teve como objetivo a aplicação da Trigonometria nos cálculos de rotas para deslocamentos marítimos. Essa atividade também buscou integrar conhecimentos de diferentes áreas, como História, Astronomia e Geografia, e apresentou o problema de estimar distâncias marítimas por meio do método da triangulação usando uma carta náutica.

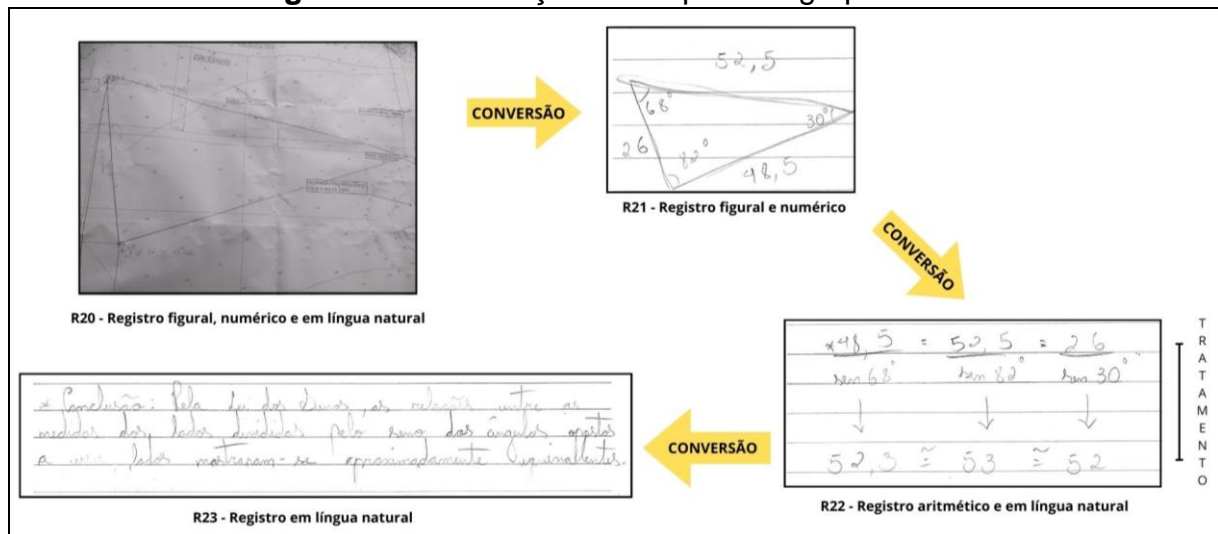
A análise dessa atividade foi realizada com base nos registros produzidos pelos grupos MLJB, GALP e ELAM, compostos por quatro integrantes. Observamos que os grupos fizeram uso de duas formas de resolução, sendo elas lei dos senos e lei dos cossenos.

Em suas resoluções, os grupos inicialmente produziram registros de um triângulo a partir da inserção de três pontos na carta náutica, que devido às configurações das imagens, encontram-se disponíveis nos Anexos A, B e C. Em seguida, para responderem ao problema proposto, os grupos realizaram as medições em milhas náuticas e em centímetros dos lados desse triângulo. Após isso, foi solicitado aos alunos que confirmassem as medidas dos lados do triângulo utilizando Trigonometria.

A seguir apresentamos, de cada grupo, os registros elaborados pelos alunos, nossa análise dos dados e um quadro síntese.

Iniciamos nossa análise dessa segunda etapa apresentando, por meio da Figura 19, a resolução do problema produzido pelo grupo MLJB que utilizou o método lei dos senos.

Figura 19 – Resolução da etapa 2 do grupo MLJB



Fonte: Dados da pesquisa.

A partir da Figura 19, identificamos que os alunos iniciaram a resolução do problema pela construção do registro **figural, numérico e em língua natural (R20)** de um triângulo na carta náutica (ver Anexo A, que apresenta R20 em uma melhor resolução). Em seguida, realizaram a **conversão** do registro **R20** para o registro **figural e numérico (R21)** apresentando os ângulos internos e medidas dos lados (em centímetros) do triângulo produzido na carta náutica.

Quando questionados sobre essa conversão de registros, os alunos explicaram que o registro **R21** os auxiliou na visualização do triângulo produzido na carta náutica. Assim, identificamos que essa representação desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois apoiou a interpretação do registro **R20**.

Após isso, os alunos realizaram a **conversão** do **R21** para o registro **aritmético e em língua natural (R22)** fazendo uso da lei dos senos. Observando a Figura 19 identificamos a correspondência entre os elementos dos registros **R21** e **R22** no que se refere aos ângulos internos e medidas dos lados do triângulo. Desta forma, identificamos que os registros **R21** e **R22** desempenharam em conjunto a função pedagógica **complementar**, pois compartilhavam informações entre si.

Em seguida, os alunos resolveram as divisões presentes no registro **R22** o que infere o **tratamento** desse registro. Ao serem questionados a respeito do método escolhido para a resolução do problema, os alunos explicaram que optaram pela lei dos senos pois a lei dos cossenos era mais 'difícil'. Desse modo, identificamos que o registro **R22** também desempenhou a função pedagógica

restringir, pois caracterizou o uso de uma representação familiar na resolução dos cálculos.

Por fim, o grupo realizou a **conversão** do registro **R22** para o registro **em língua natural (R23)** expressando a conclusão de seus cálculos. A partir desse registro, identificamos que o grupo apresentou indícios do entendimento da propriedade da lei dos senos, onde para um triângulo qualquer, a razão entre cada lado e o seno do ângulo oposto a esses lados é constante.

Desse modo, podemos entender que **R23**, em conjunto com **R20**, **R21 e R22**, desempenharam a função pedagógica **aprofundar**, uma vez que MLJB utilizou das relações entre as representações produzidas (R20, R21 e R22) em conjunto com R23 para resolver o problema proposto.

Diante do exposto, apresentamos o Quadro 15, que sintetiza a análise do que foi produzido pelo grupo MLJB (Figura 19), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

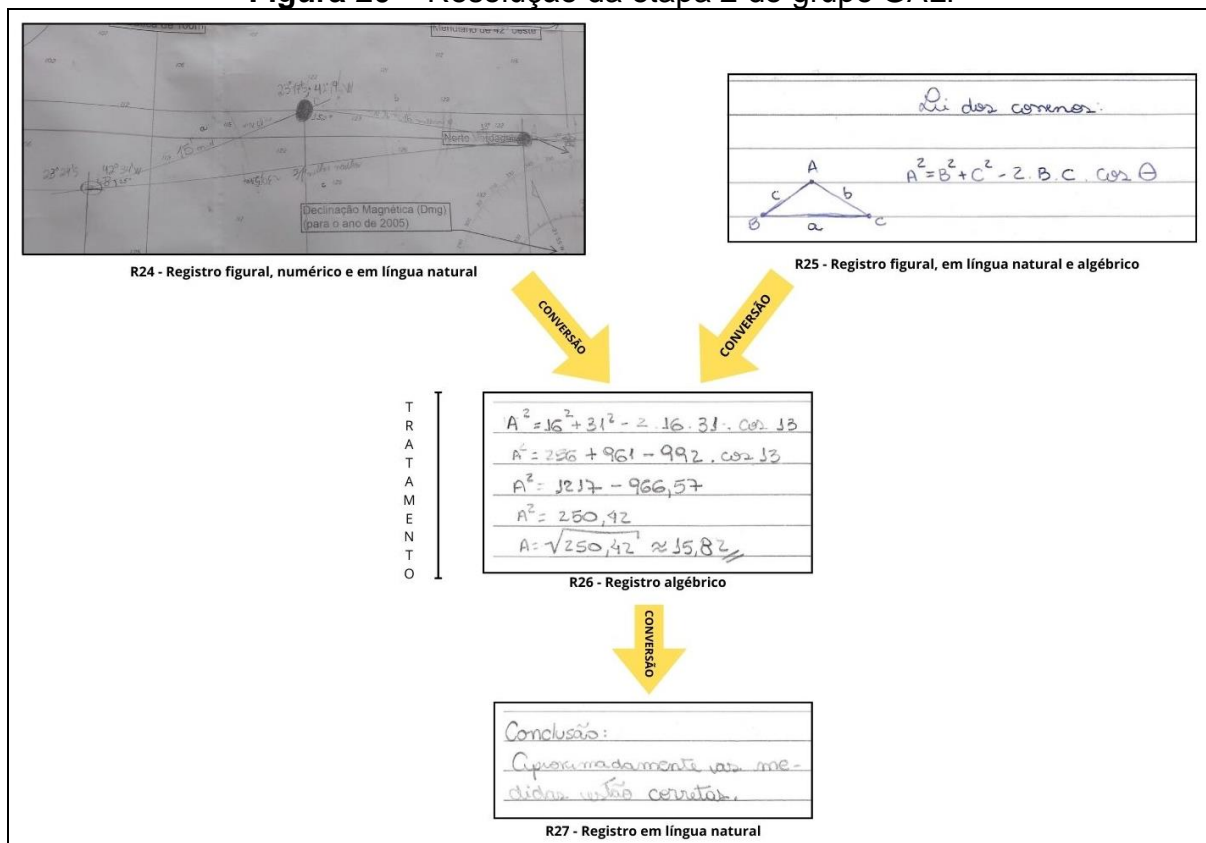
Quadro 15 – Análise da etapa 2 do grupo MLJB

Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
R20 - Figural, numérico e em língua natural	Conversão (de R20 para R21; de R21 para R22; de R22 para R23)	Complementar (R21 e R22 compartilhavam as medidas dos lados e ângulos do triângulo)
R21 - Figural e numérico		Restringir (R21 restringiu a interpretação de R20; R22 uso de representação familiar nos cálculos)
R22 - Aritmético e em língua natural		Tratamento (em R22)
R23 - Língua natural		
R19 - Algébrico		

Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, iniciamos a análise do grupo GALP, apresentando a Figura 20 com a resolução da segunda etapa, na qual utilizaram o método lei dos cossenos.

Figura 20 – Resolução da etapa 2 do grupo GALP



Fonte: Dados da pesquisa.

Este grupo iniciou a resolução do problema produzindo o registro **figural, numérico e em língua natural (R24)** de um triângulo na carta náutica (ver Anexo B, que apresenta R24 em uma melhor resolução). Em seguida, também produziu o registro **figural, em língua natural e algébrico (R25)** com um triângulo que não possuía informações que remetesse ao triângulo da carta náutica.

Quando questionamos o grupo sobre o **R25**, explicaram que pensaram em resolver o problema a partir do Teorema de Pitágoras, mas como não encontraram nenhum ângulo de 90° no triângulo, pensaram em utilizar a lei dos cossenos, que para eles era a mais 'fácil'. Desse modo, recorreram ao livro que utilizavam nas aulas de Matemática e copiaram o triângulo e a expressão da lei dos cossenos.

Assim, identificamos que o registro **R25** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois tratou-se do uso de uma representação familiar na resolução do problema proposto.

Em seguida, os alunos realizaram simultaneamente a **conversão** dos registros **R24 e R25** para o registro **algébrico (R26)** por meio da substituição das medidas dos lados e ângulo do triângulo da carta náutica na equação da lei dos cossenos.

Desta forma, identificamos que os registros **R24 e R25** desempenharam a função pedagógica **complementar**, pois suas informações foram usadas de forma complementar para se obter o registro **R26**.

Após realizar o **tratamento** do registro **R26**, os alunos realizaram a **conversão** deste para o registro **em língua natural (R27)** expressando a conclusão de seus cálculos. Quando questionados sobre o motivo de terem considerado as *'medidas corretas'*, o grupo explicou que haviam escolhido dois lados do triângulo para realizarem os cálculos e observaram que o resultado final apresentou um valor aproximado da medida do terceiro lado desse triângulo (15 milhas náuticas).

Com base nesse diálogo, podemos entender que **R27**, em conjunto com **R24, R25 e R26**, desempenharam a função pedagógica **aprofundar**, uma vez que GALP utilizou das relações entre as representações produzidas (R24, R25 e R26) em conjunto com R27 para resolver o problema proposto.

Ante o exposto, apresentamos o Quadro 16, que sintetiza a análise do que foi produzido pelo grupo GALP (Figura 20), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

Quadro 16 – Análise da etapa 2 do grupo GALP

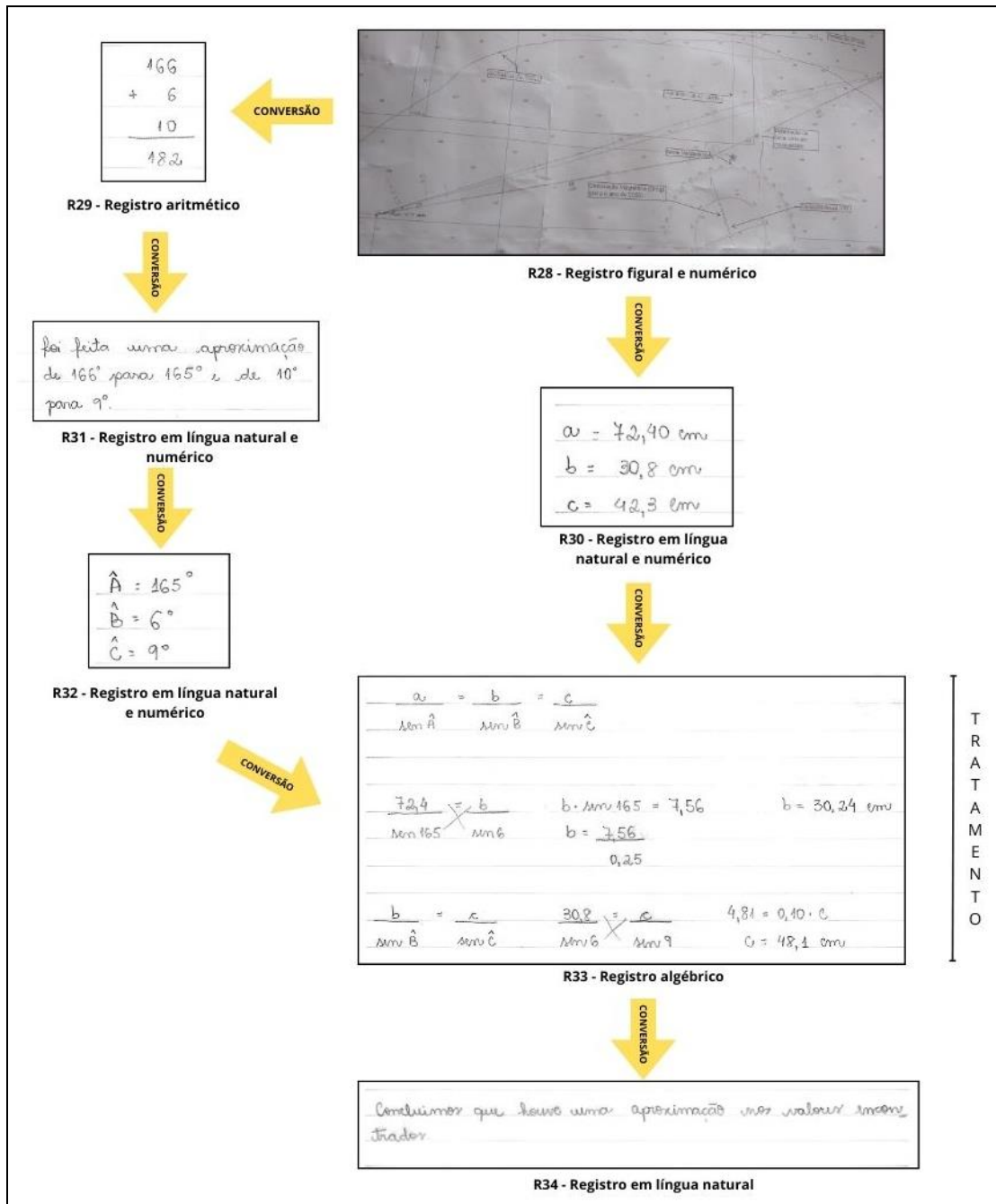
Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
R24 - Figural, numérico e em língua natural	Conversão (de R24 para R26; de R25 para R26; de R26 para R27) Tratamento (em	Complementar (R24 e R25 usadas em conjunto para obter R26)
R25 - Figural, em língua natural e		Restringir (R25 uso de uma representação familiar na resolução do problema)

algébrico	R26)	
R26 – Algébrico		
R27 - Língua natural		Aprofundar (R24, R25, R26 e R27 aprofundou a compreensão sobre a lei dos cossenos)

Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, finalizamos a análise da segunda etapa apresentando a Figura 21 com a resolução do grupo ELAM, na qual utilizaram o método lei dos senos.

Figura 21 – Resolução da etapa 2 do grupo ELAM



Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo ELAM iniciou a resolução da atividade construindo o registro **figural e numérico (R28)** do triângulo na carta náutica (Anexo C, que apresenta R28 em uma melhor resolução). Em seguida, realizaram a **conversão** do registro **R28** para o **aritmético (R29)** e **em língua natural e numérico (R30)** simultaneamente, indicando as medidas dos ângulos internos e lados do triângulo.

Após isso, o grupo realizou a **conversão** do registro **R29** para o registro **em língua natural e numérico (R31)** expressando a necessidade de algumas adequações na medida dos ângulos internos do triângulo. Quando

questionados a respeito desse registro, os alunos explicaram que na primeira aferição, a soma dos ângulos internos do triângulo teria ultrapassado consideravelmente a medida 180° , e que isso estava ligado ao fato de terem desenhado inicialmente o triângulo sem o auxílio de uma régua adequada.

Então, o grupo resolveu desenhar novamente o triângulo e aferir seus ângulos internos, identificando uma redução do erro para 182° . A partir disso, realizaram uma última adequação e apresentaram as medidas finais por meio da **conversão** do registro **R31 para o registro em língua natural e numérico (R32)**.

Desse modo, identificamos que o registro **R32**, em conjunto com **R28, R29 e R31**, desempenharam a função pedagógica **aprofundar**, uma vez que ELAM utilizou das relações entre as representações produzidas (R28, R29 e R31) em conjunto com R31 para resolver o problema da soma dos ângulos internos do triângulo.

Em seguida, os alunos realizaram a **conversão** dos registros **R30 e R32** para o registro **algébrico (R33)**, simultaneamente, realizando as substituições das medidas dos lados e ângulos do triângulo na expressão da lei dos senos, bem como o **tratamento**. Neste caso, identificamos que os registros **R30 e R32** desempenharam a função pedagógica **complementar**, pois suas informações foram utilizadas em conjunto para realizar os cálculos.

Quando questionados sobre o método de resolução, os alunos explicaram que a lei dos senos foi a forma mais 'rápida' de verificação, pois assemelhava-se a uma regra de três. Assim, identificamos que o registro **R33** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois tratou-se do uso de uma representação familiar.

Por fim, o grupo realizou a **conversão** do registro **R33** para o registro **em língua natural (R34)**, expressando a conclusão de seus cálculos.

Diante disso, apresentamos o Quadro 17, que sintetiza a análise do que foi produzido pelo grupo ELAM (Figura 21), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

Quadro 17 – Análise da etapa 2 do grupo ELAM

Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas

R28 - Figural e numérico	Conversão (de R28 para R29; de R28 para R30; de R29 para R31; de R31 para R32; de R30 e R32 para R33; de R33 para R34)	Complementar (R30 e R32 nos cálculos de R33)
R29 - Aritmético		Restringir (R33 uso de representação familiar)
R30 - Língua natural e numérico		Aprofundar (R28, R29, R31 e R32 aprofundou o conceito de soma dos ângulos internos de um triângulo)
R31 - Língua natural e numérico	Tratamento (em R33)	
R32 – Língua natural e numérico		
R33 – Algébrico		
R34 – Língua natural		

Fonte: Dados da pesquisa.

5.3 ETAPA 3

Nesta etapa, desenvolvemos a atividade intitulada Como os navios são lançados ao mar? com o propósito de aplicar os conceitos das razões trigonométricas de um triângulo retângulo no estudo das rampas de acesso (planos inclinados) utilizadas no embarque e desembarque de navios. Semelhante à etapa anterior, nesta atividade, procuramos estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, como a História.

A análise dessa atividade foi realizada com base nos registros produzidos individualmente pelos alunos LZ, EN, AT, PA, GG, LH, ML, AR, MA, LN, JP e BA. Nos quais, observamos o uso de apenas um método de resolução, sendo este pelas razões trigonométricas seno e cosseno.

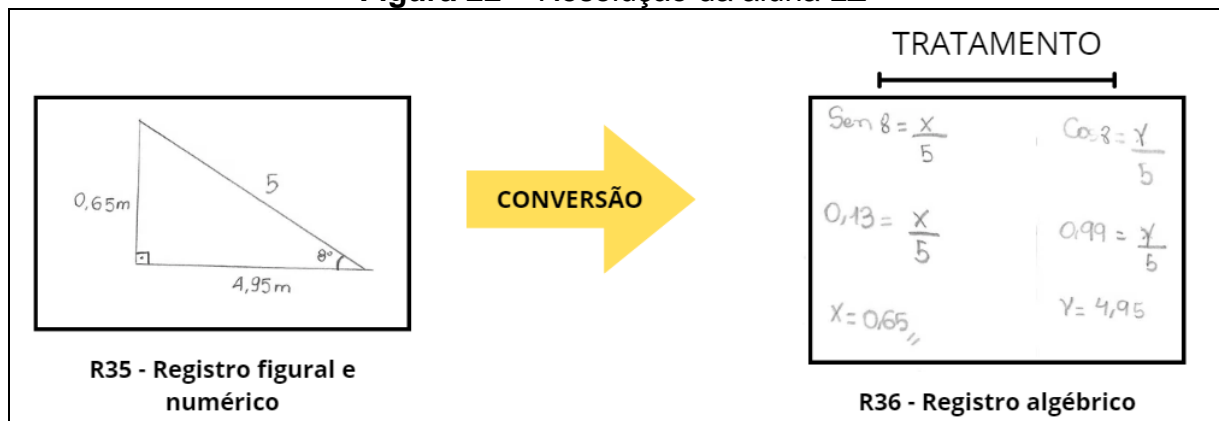
Para solucionar o problema de calcular as dimensões e o ângulo de inclinação para a construção de uma rampa para uma embarcação, os estudantes procederam à produção de uma representação da rampa, associando-a a um

triângulo retângulo. Posteriormente, utilizando as informações contidas no material do aluno da SA, aplicaram conceitos de Trigonometria para calcular as medidas dos catetos oposto e adjacente dos triângulos que haviam representado.

A seguir apresentamos, para cada participante, os registros elaborados, nossa análise dos dados e um quadro síntese.

Iniciamos nossa apreciação apresentando, por meio da Figura 22, a resolução produzida pela aluna LZ.

Figura 22 – Resolução da aluna LZ



Fonte: Dados da pesquisa.

A partir da Figura 22, podemos perceber que a aluna iniciou a sua resolução produzindo um registro **figural e numérico (R35)** de um triângulo retângulo e inseriu algumas informações retiradas do material do aluno da SA. Quando questionada sobre esse registro, a aluna explicou que escolheu construir uma rampa para a embarcação ‘canao’, por isso registrou para a hipotenusa a medida 5 metros e optou por utilizar o ângulo 8° , pois era uma informação apresentada no texto ‘O que uma boa rampa, para colocar o barco na água, deve ter?’ também disponível no material do aluno.

Com base nisso, identificamos que o registro **R35** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois apoiou a interpretação acerca de informações apresentadas no material do aluno da SA.

Em seguida, a aluna realizou a **conversão** do registro **R35** para o registro **algébrico (R36)** utilizando as razões seno e cosseno. Ao ser questionada sobre a estratégia utilizada na resolução da atividade, a aluna respondeu que escolheu o método que ‘sabia mais’. Dessa forma, identificamos que o registro **R36**

desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois a aluna recorreu a uma representação familiar para expressar seus cálculos.

Por meio da Figura 22, observamos que a aluna realizou o **tratamento** do registro **R36** ao efetuar as operações básicas da Matemática, além de utilizar coordenadamente os registros **R35 e R36** ao inserir as medidas dos catetos oposto e adjacente na representação do triângulo retângulo.

Para mais, identificamos que os registros **R35 e R36** desempenharam a função pedagógica **complementar**, uma vez que compartilharam as informações da medida dos lados e ângulo do triângulo.

Diante disso, apresentamos o Quadro 18, que sintetiza a análise do que foi produzido pela aluna LZ (Figura 22), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

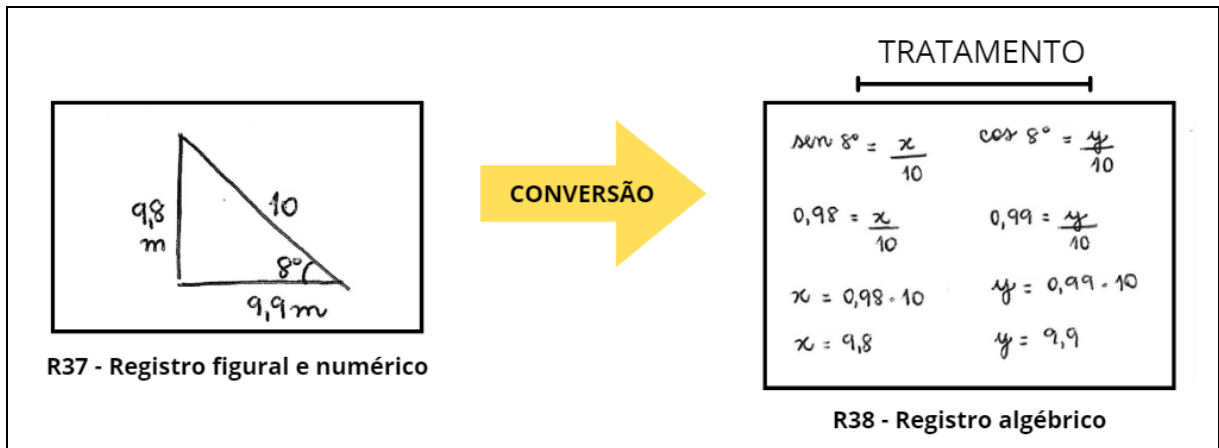
Quadro 18 – Análise da aluna LZ

Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
R35 - Figural e numérico	Conversão (R35 para R36)	Complementar (R35 e R36 nas medidas dos lados e ângulo do triângulo)
R36 - Algébrico natural	Tratamento (em R36)	Restringir (R35 restringiu informações do material do aluno; R36 representação familiar para expressar cálculos)

Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, apresentamos, por meio da Figura 23 a análise dos registros produzidos pela aluna EN para a terceira etapa.

Figura 23 – Resolução da aluna EN.



Fonte: Dados da pesquisa.

A partir da Figura 23, podemos observar que a aluna iniciou a resolução do problema pela produção de um registro **figural e numérico (R37)** do triângulo retângulo. Ao ser questionada sobre esse registro, a aluna explicou que utilizou como referência a embarcação *trawler*, pois havia gostado do nome e registrou as medidas da hipotenusa e ângulo do triângulo de acordo com informações fornecidas no material do aluno.

Assim, identificamos que esse registro desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois apoiou a interpretação de informações presentes no texto ‘O que uma boa rampa, para colocar o barco na água, deve ter?’.

Posterior a isso, a aluna realizou a **conversão** do registro **R37** para o registro **algébrico (R38)** por meio das relações seno e cosseno. Quando questionada sobre o método de resolução, a aluna EN afirmou que optou pelo método que os professores geralmente mais utilizam para problemas que tratam do triângulo retângulo. Desse modo, identificamos que o registro **R38** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois a aluna recorreu a uma representação familiar para efetuar seus cálculos.

De maneira semelhante à aluna anterior, identificamos que os registros **R37** e **R38** desempenharam de forma conjunta a função pedagógica **complementar**, dado que compartilharam as medidas dos lados do triângulo e o ângulo de referência.

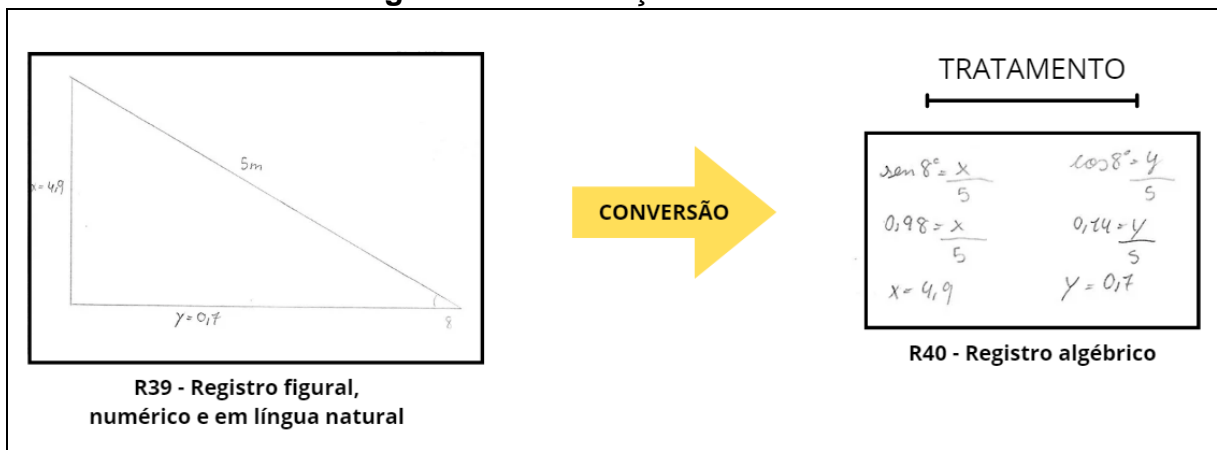
Posto isso, apresentamos o Quadro 19, que sintetiza a análise do que foi produzido pela aluna EN (Figura 23), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

Quadro 19 – Análise da aluna EN

Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
R37 - Figural e numérico	Conversão (de R37 para R38)	Complementar (R37 e R38 nas medidas dos lados e ângulo do triângulo)
R38 - Algébrico	Tratamento (em R38)	Restringir (R37 restringiu informações do texto 'O que uma boa rampa, para colocar o barco na água, deve ter?'; R38 no uso de representação familiar para efetuar cálculos)

Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, apresentamos, por meio da Figura 24 a análise dos registros produzidos pela aluna AT para a terceira etapa.

Figura 24 – Resolução da aluna AT

Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos identificar, a partir da Figura 24, que a aluna iniciou a resolução da atividade produzindo um registro **figural, numérico e em língua natural (R39)** do triângulo retângulo como uma representação da rampa. Ao ser questionada sobre esse registro, a aluna explicou que havia indicado a medida do comprimento da embarcação 'canoa' como a hipotenusa do triângulo e como ângulo

de referência utilizou a informação 8° presente no texto ‘O que uma boa rampa, para colocar o barco na água, deve ter?’ do material do aluno.

Com base nisso, identificamos que o registro **R39** desempenhou a função pedagógica **restringir** em vista de ter restringido informações disponíveis no material do aluno da SA.

Logo após, a aluna AT realizou a **conversão** do registro **R39** para o registro **algébrico (R40)**, por meio das razões trigonométricas seno e cosseno. Após a aplicação da SA, foi realizada uma retomada sobre a atividade e a aluna foi questionada quanto ao método utilizado para a resolução do problema proposto. Ela explicou que também poderia ter resolvido utilizando o teorema de Pitágoras, uma vez que a rampa já possuía ‘dois lados’, porém escolheu a forma mais ‘rápida’ de se resolver e evitar raízes quadradas.

Tal colocação demonstrou que a aluna utilizou o método que exigiu menor esforço, isto é, usou uma representação familiar para efetuar os cálculos, portanto, identificamos para o registro **R40** a função pedagógica **restringir**. Além disso, identificamos que os registros **R39** e **R40** desempenharam em conjunto a função pedagógica **complementar**, pois compartilharam as informações das medidas dos lados e ângulo do triângulo.

Diante disso, apresentamos o Quadro 20, que sintetiza a análise do que foi produzido pela aluna AT (Figura 24), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

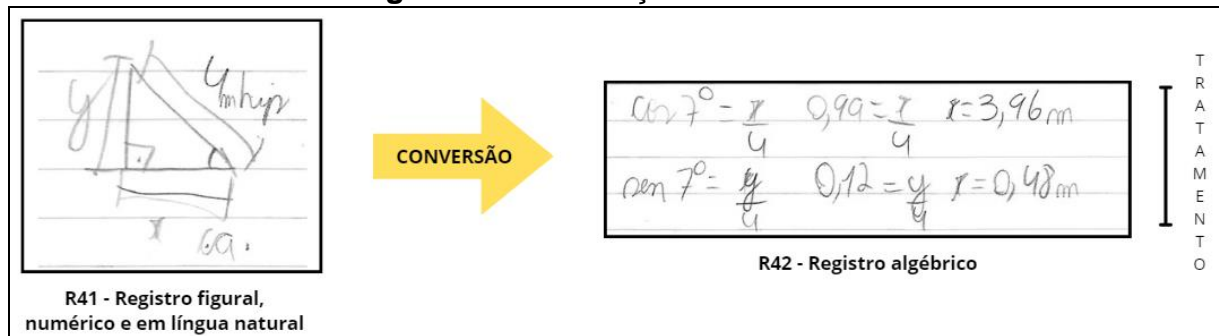
Quadro 20 – Análise da aluna AT

Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
R39 - Figural, numérico e em língua natural	Conversão (R39 para R40)	Complementar (R39 e R40 nas medidas dos lados e ângulo do triângulo)
R40 - Algébrico	Tratamento (em R40)	Restringir (R39 restringiu informações disponíveis no material do aluno da AS; R40 no uso de representação familiar para efetuar cálculos)

Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, apresentamos, por meio da Figura 25 a análise dos registros produzidos pelo aluno PA para a terceira etapa.

Figura 25 – Resolução do aluno PA



Fonte: Dados da pesquisa.

Observando a Figura 25, identificamos que o aluno PA iniciou a resolução da atividade produzindo um registro **figural, numérico e em língua natural (R41)** do triângulo retângulo, identificando os elementos cateto adjacente e hipotenusa. Quando questionado sobre esse registro, o aluno explicou que havia escolhido construir uma rampa para a embarcação 'bote', por isso registrou a medida 4 metros para a hipotenusa.

Em seguida, o aluno realizou a **conversão** do registro **R41** para o registro **algébrico (R42)**, no qual evidenciamos a correspondência entre os elementos x (cateto adjacente) e hipotenusa, bem como a transformação de tratamento a partir das operações básicas da Matemática efetuadas. Ao ser questionado quanto ao método utilizado para a resolução da atividade, o aluno respondeu que essa foi a forma mais 'fácil' de se resolver. Assim, identificamos que o registro **R42** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois tratou-se do uso de uma representação familiar.

Além disso, quando questionamos a respeito do ângulo 7° presente nesse registro, o aluno explicou que utilizou um valor dentro do 'intervalo' do ângulo ideal. Logo, identificamos que o registro **R42** também restringiu a interpretação acerca de informações do texto 'O que uma boa rampa, para colocar o barco na água, deve ter?'

Do mesmo modo, identificamos que os registros **R41** e **R42** desempenharam a função pedagógica **complementar**, pois compartilharam informações relativas aos lados do triângulo.

A partir do exposto, apresentamos o Quadro 21, que sintetiza a análise do que foi produzido pelo aluno PA (Figura 25), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

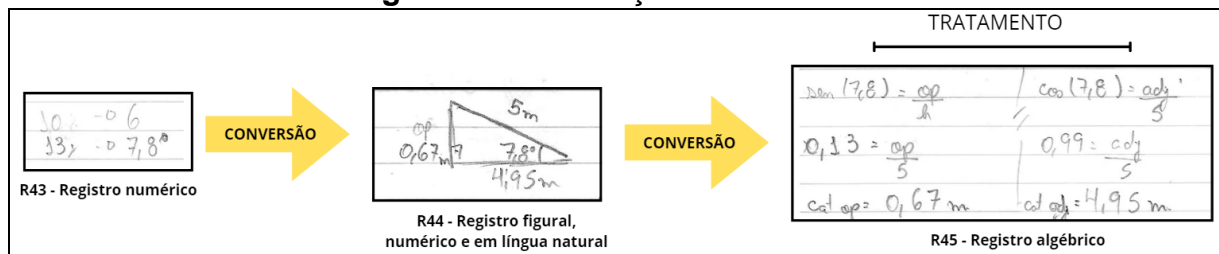
Quadro 21 – Análise do aluno PA

Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
R41 - Figural, numérico e em língua natural	Conversão (de R41 para R42)	Complementar (R41 e R42 nas informações relativas aos lados do triângulo)
R42 - Algébrico	Tratamento (em R42)	Restringir (R42 no uso de uma representação familiar e na interpretação de informações do texto 'O que uma boa rampa, para colocar o barco na água, deve ter?')

Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, apresentamos, por meio da Figura 26 a análise dos registros produzidos pelo aluno GG para a terceira etapa.

Figura 26 – Resolução do aluno GG



Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos verificar a partir da Figura 26 que o aluno inicia a resolução da atividade por meio da produção de um registro **numérico (R43)** que indica uma proporção entre a porcentagem e o ângulo de inclinação, determinando o ângulo de referência $7,8^\circ$ usado posteriormente.

Ao ser questionado sobre esse registro, o aluno explicou que optou por utilizar uma angulação que fosse um ‘meio termo’ entre os valores fornecidos no material do aluno, visto que para qualquer angulação entre 10% e 15% do ângulo de 60° , seriam consideradas rampas ideais. Com base nisso, identificamos que o registro **R43** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois restringiu a interpretação do aluno acerca de informações presentes no material da AS.

Em seguida, o aluno realizou a **conversão** do registro **R43** para o registro **figural, numérico e em língua natural (R44)** a partir da construção de um triângulo, no qual também podemos observar o ângulo de referência $7,8^\circ$. Assim, identificamos que esses registros desempenharam a função pedagógica **complementar**, pois compartilharam a informação $7,8^\circ$.

Após isso, o aluno realizou uma **conversão** do **R44** para o registro **algébrico (R45)** por meio das razões trigonométricas seno e cosseno. Nesta representação, identificamos a transformação do **tratamento** por meio das operações matemáticas básicas realizadas. Além disso, identificamos a correspondência dos elementos ângulo de referência e hipotenusa nos registros **R44** e **R45**, o que inferiu a função pedagógica **complementar** dessas representações.

Quando questionado sobre o método de resolução, o aluno relatou que utilizou as razões trigonométricas, por serem mais ‘simples’. Desse modo, identificamos que o registro **R45** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois caracterizou-se pelo uso de uma representação familiar.

Nesse contexto, apresentamos o Quadro 22, que sintetiza a análise do que foi produzido pelo aluno GG (Figura 26), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

Quadro 22 – Análise do aluno GG

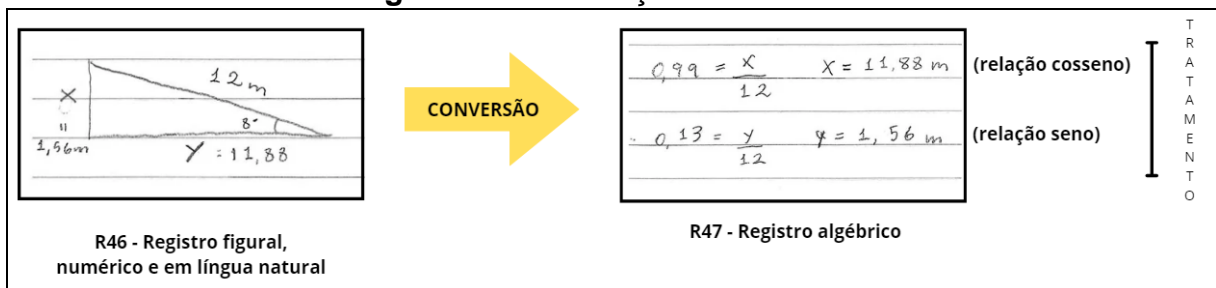
Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
R43 - Numérico R44 - Figural, numérico e em	Conversão (de R43 para R44; de R44 para R45) Tratamento (em	Complementar (R43 e R44 na medida do ângulo $7,8^\circ$; R44 e R45 no ângulo de referência e hipotenusa)

língua natural	R45)	Restringir (R43 na interpretação das informações do material do aluno;
R45 - Algébrico		R45 no uso de representação familiar)

Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, apresentamos, por meio da Figura 27 a análise dos registros produzidos pelo aluno LH para a terceira etapa.

Figura 27 – Resolução do aluno LH



Fonte: Dados da pesquisa.

A Figura 27 mostra que o aluno LH utilizou um registro **figural, numérico e em língua natural (R46)** para representar a rampa. Quando questionado a respeito do uso do ângulo 8° , o aluno respondeu que arredondou o valor $7,8^\circ$ referente a uma inclinação de 13%, pois achou mais ‘difícil’ trabalhar com número decimal. A partir disso, identificamos que esse registro desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois tratou-se do uso de uma representação familiar.

Em seguida, o aluno realizou a **conversão** do registro **R46** para o registro **algébrico (R47)** por meio das relações cosseno e seno. Em **R47** também ressaltamos a presença da transformação de **tratamento** que pôde ser identificada pelo uso de operações básicas da Matemática para resolver os cálculos.

Observando a Figura 27, identificamos que os registros **R46** e **R47** desempenharam a função pedagógica **complementar**, pois compartilharam as informações 8° e a medida da hipotenusa do triângulo.

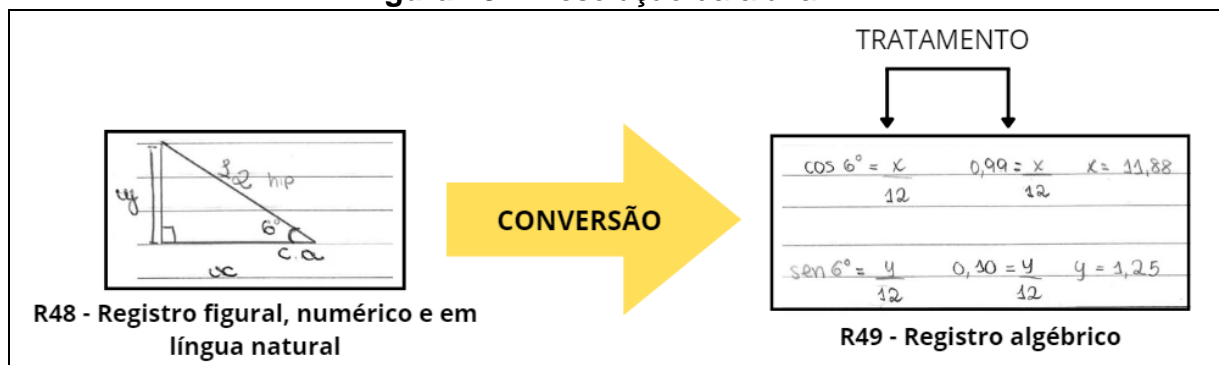
Diante disso, apresentamos o Quadro 23, que sintetiza a análise do que foi produzido pelo aluno LH (Figura 27), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

Quadro 23 – Análise do aluno LH

Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
R46 - Língua natural e numérico	Conversão (R46 para R47)	Complementar (R46 e R47 no ângulo 8° e medida da hipotenusa)
R47 - Figural e numérico Algébrico	Tratamento (R47)	Restringir (R46 no uso de representação familiar)

Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, apresentamos, por meio da Figura 28 a análise dos registros produzidos pela aluna ML para a terceira etapa.

Figura 28 – Resolução da aluna ML

Fonte: Dados da pesquisa.

Observando a Figura 28, identificamos que a aluna iniciou a resolução dessa etapa produzindo um registro **figural, numérico e em língua natural (R48)** do triângulo. Quando questionada sobre este, explicou que escolheu utilizar o ‘ângulo mínimo’ fornecido pelo material do aluno para construir a rampa da embarcação veleiro.

Com base nisso, identificamos que o registro **R48** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois apoiou a interpretação das informações do texto ‘O que uma boa rampa, para colocar o barco na água, deve ter?’ do material da SA.

Em seguida, a aluna realizou a **conversão** do **R48** para o **algébrico (R49)** recorrendo ao uso das razões trigonométricas seno e cosseno. Ao ser questionada sobre o método de resolução, a aluna ML respondeu que utilizou o que

se sentia mais 'segura'. Em vista disso, identificamos que o registro **R49** além de apresentar a transformação de tratamento, desempenhou a função pedagógica **restringir**, dado que se tratou do uso de uma representação familiar para solucionar o problema proposto.

Do mesmo modo, identificamos que os registros **R48** e **R49** desempenharam em conjunto a função pedagógica **complementar** a partir do compartilhamento de informações sobre o ângulo de referência e lados do triângulo.

Frente ao exposto, apresentamos o Quadro 24, que sintetiza a análise do que foi produzido pela aluna ML (Figura 28), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

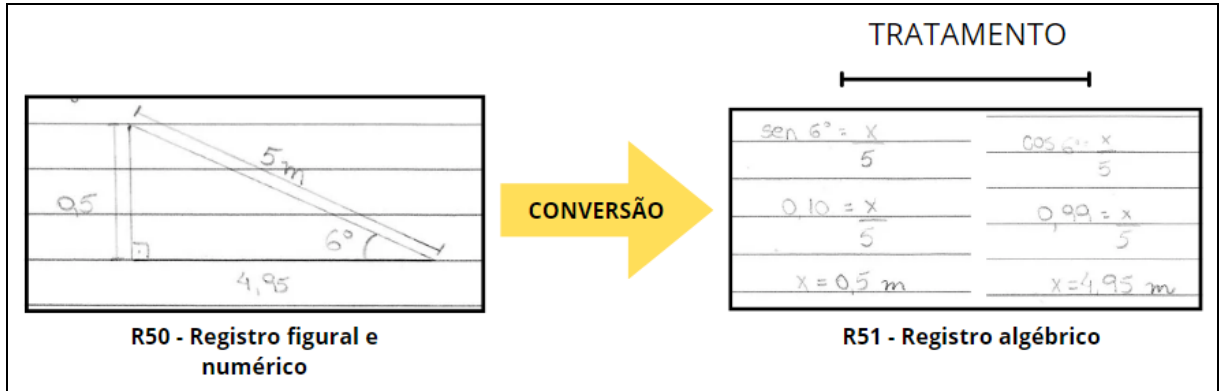
Quadro 24 – Análise da aluna ML

Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
R48 - Figural, numérico e em língua natural R49 - Algébrico	Conversão (de R48 para R49)	Complementar (R48 e R49 ao compartilhar a medida 6° e lados do triângulo)
	Tratamento (em R49)	Restringir (R48 na interpretação das informações do texto 'O que uma boa rampa, para colocar o barco na água, deve ter?'; R49 no uso de representação familiar nos cálculos)

Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, apresentamos, por meio da Figura 29 a análise dos registros produzidos pela aluna AR para a terceira etapa.

Figura 29 – Resolução da aluna AR



Fonte: Dados da pesquisa.

Verificamos que a aluna iniciou a resolução pela construção do registro **figural e numérico (R50)** para representar a rampa. Ao ser questionada sobre esse registro, respondeu que optou por utilizar o menor ângulo citado no material do aluno para que seus cálculos fossem mais ‘fáceis’. Assim, identificamos que esse registro desempenhou a função **restringir**, pois restringiu a interpretação de informações presentes no texto ‘O que uma boa rampa, para colocar o barco na água, deve ter?’

Em seguida, a aluna realizou a **conversão** do **R50** para o **algébrico (R51)**, do qual observamos a correspondência entre o ângulo de referência, a hipotenusa e catetos de ‘x’ e ‘y’. Ao perguntarmos sobre o motivo de ter denominado os catetos dessa forma, a aluna respondeu que geralmente utiliza essas letras para indicar um valor ‘desconhecido’. Logo, identificamos que o registro **R51** desempenhou a função pedagógica **restringir** pois a aluna recorreu a uma representação familiar dos catetos.

Com base na Figura 29, identificamos que os registros **R50** e **R51** desempenharam a função pedagógica **complementar**, pois compartilharam entre si as informações do ângulo 6° e medidas dos lados do triângulo.

Para mais apresentamos o Quadro 25, que sintetiza a análise do que foi produzido pela aluna AR (Figura 29), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

Quadro 25 – Análise da aluna AR

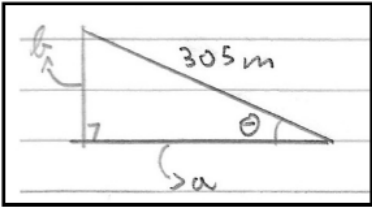

Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
-----------------------------	-------------------------------------	--

R50 - Figural e numérico	Conversão (de R50 para R51)	Complementar (R50 e R51 nas informações do ângulo 6° e medidas dos lados do triângulo)
R51 - Algébrico	Tratamento (em R51)	Restringir (R50 na interpretação das informações do texto 'O que uma boa rampa, para colocar o barco na água, deve ter?'; R51 no uso de representação familiar dos catetos)

Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir, apresentamos, por meio da Figura 30 a análise dos registros produzidos pelo aluno MA para a terceira etapa.

Figura 30 – Resolução do aluno MA

 <p>R52 - Registro figural, numérico e em língua natural</p>	<p>CONVERSÃO</p> 	<p>TRATAMENTO</p> <table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td>$\cos \theta = \frac{c.a}{H}$</td> <td>$\sin \theta = \frac{c.o}{H}$</td> </tr> <tr> <td>$\cos 6^\circ = \frac{a}{305}$</td> <td>$\sin 6^\circ = \frac{b}{305}$</td> </tr> <tr> <td>$0,99 = \frac{a}{305}$</td> <td>$0,10 = \frac{b}{305}$</td> </tr> <tr> <td>$a = 303,34m$</td> <td>$b = 31,88m$</td> </tr> </table> <p>R53 - Registro algébrico</p>	$\cos \theta = \frac{c.a}{H}$	$\sin \theta = \frac{c.o}{H}$	$\cos 6^\circ = \frac{a}{305}$	$\sin 6^\circ = \frac{b}{305}$	$0,99 = \frac{a}{305}$	$0,10 = \frac{b}{305}$	$a = 303,34m$	$b = 31,88m$
$\cos \theta = \frac{c.a}{H}$	$\sin \theta = \frac{c.o}{H}$									
$\cos 6^\circ = \frac{a}{305}$	$\sin 6^\circ = \frac{b}{305}$									
$0,99 = \frac{a}{305}$	$0,10 = \frac{b}{305}$									
$a = 303,34m$	$b = 31,88m$									

Fonte: Dados da pesquisa.

Evidenciamos por meio da Figura 30, que o aluno MA realizou inicialmente a produção do registro **figural, numérico e em língua natural (R52)** do triângulo retângulo, nomeando seus catetos por 'a' e 'b'. Posteriormente, durante a retomada da atividade, o aluno respondeu que utilizou essas variáveis porque imaginou que os demais alunos escolheriam as usuais 'x' e 'y'. Dessa forma, sua resolução estaria diferente da turma.

Com base nisso, identificamos que o **R52** desempenhou a função pedagógica **restringir**, uma vez que o aluno fez uso de uma representação familiar.

Em seguida o aluno realizou a **conversão** do registro **R52** para o registro **algébrico (R53)**, no qual podemos perceber a correspondência entre os lados do triângulo. Nesse contexto, identificamos que esses registros desempenharam em conjunto a função pedagógica **complementar**, pois compartilharam as informações dos catetos e hipotenusa do triângulo.

Após realizar o **tratamento** do registro **R53**, o aluno determinou aos valores da altura e comprimento da rampa corretamente. Quando questionado sobre o motivo de ter usado as razões trigonométricas em sua resolução, respondeu que foi a primeira forma de resolver que veio em sua mente. Assim, também identificamos para esse registro a função pedagógica **restringir** devido à familiaridade da representação.

Considerando o exposto, apresentamos o Quadro 26, que sintetiza a análise do que foi produzido pelo aluno MA (Figura 30), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

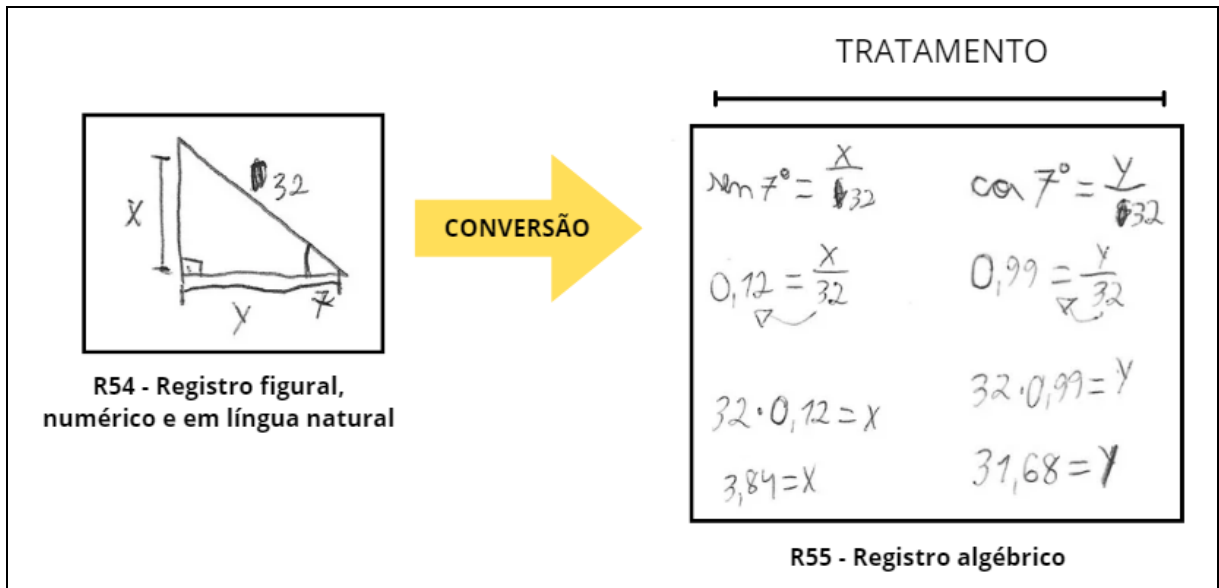
Quadro 26 – Análise do aluno MA

Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
R52 - Figural, numérico e em língua natural	Conversão (de R52 para R53)	Complementar (R52 e R53)
R53 - Algébrico	Tratamento (R53)	Restringir (R52 no uso de representação familiar; R53 no uso de representação familiar)

Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir, apresentamos, por meio da Figura 31 a análise dos registros produzidos pelo aluno LN para a terceira etapa.

Figura 31 – Resolução do aluno LN



Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos perceber que o aluno iniciou sua resolução do problema produzindo o registro **figural, numérico e em língua natural (R54)** do triângulo. Ao ser questionado sobre o motivo de ter relacionado a rampa para embarcações com o triângulo, ele respondeu que quando observamos lateralmente a rampa de acesso para cadeirantes, por exemplo, enxergamos um triângulo. Assim, identificamos que esse registro desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois restringiu a interpretação do aluno acerca da rampa de acesso para cadeirantes.

Logo após, o aluno realizou a **conversão** do registro **R54** para o registro **algébrico (R55)**, em que realizou a transformação do **tratamento** evidenciada pelos cálculos matemáticos. Neste caso, podemos perceber que há a correspondência entre os elementos dessas representações no que se refere ao ângulo 7° , catetos e hipotenusa do triângulo retângulo. Mediante a isso, identificamos que os **R54** e **R55** desempenharam a função pedagógica **complementar**.

A partir do que foi mencionado, apresentamos o Quadro 27, que sintetiza a análise do que foi produzido pelo aluno LN (Figura 31), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

Quadro 27 – Análise do aluno LN

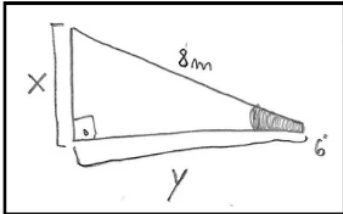
Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas

R54 - Figural, numérico e em língua natural	Conversão (de R54 para R55)	Complementar (R54 e R55 nas informações do ângulo 7° e lados do triângulo)
R55 - Algébrico	Tratamento (em R55)	Restringir (R54 na interpretação de rampas de acesso para cadeirantes)

Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir, apresentamos, por meio da Figura 32 a análise dos registros produzidos pelo aluno JP para a terceira etapa.

Figura 32 – Resolução do aluno JP



R56 - Registro figural, numérico
e em língua natural

CONVERSÃO

TRATAMENTO

$$\begin{aligned} \text{Sen } 6^\circ &= \frac{x}{8} & \text{cos } 6^\circ &= \frac{y}{8} \\ 0,104528 &= \frac{x}{8} & 0,9942522 &= \frac{y}{8} \\ x &= 0,836224 & y &= 7,95380176 \end{aligned}$$

R57 - Registro algébrico

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que o aluno JP iniciou a resolução da atividade produzindo o **registro figural, numérico e em língua natural (R56)** do triângulo retângulo, nomeando seus catetos pelas variáveis 'x' e 'y'. Quando questionado sobre esse registro, o aluno respondeu que utilizou para a hipotenusa o comprimento da embarcação iate e o ângulo mínimo de inclinação fornecidos pelo material do aluno da SA. A partir disso, identificamos que esse registro desempenhou a função pedagógica **restringir**.

Em seguida, realizou a **conversão** do registro **R56** para o **algébrico (R57)** por meio das razões trigonométricas seno e cosseno e realizou a transformação semiótica do tratamento a partir dos cálculos efetuados. Como ambas representações compartilhavam informações relativas ao ângulo de referência e

lados do triângulo, identificamos que estas desempenharam a função pedagógica **complementar**.

Em sua conclusão, o aluno apresentou o resultado da altura da rampa em centímetros. Quando questionado sobre esse resultado, explicou que realizou a conversão da unidade metros para centímetros multiplicando o valor 0,83 por 100 e dessa forma seria mais 'fácil' medir a altura da rampa, uma vez que o resultado passou a ser 'exato'.

Assim, identificamos que o registro **R57** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois o aluno recorreu a uma representação familiar para expressar seus resultados.

Diante disso, apresentamos o Quadro 28, que sintetiza a análise do que foi produzido pelo aluno JP (Figura 32), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

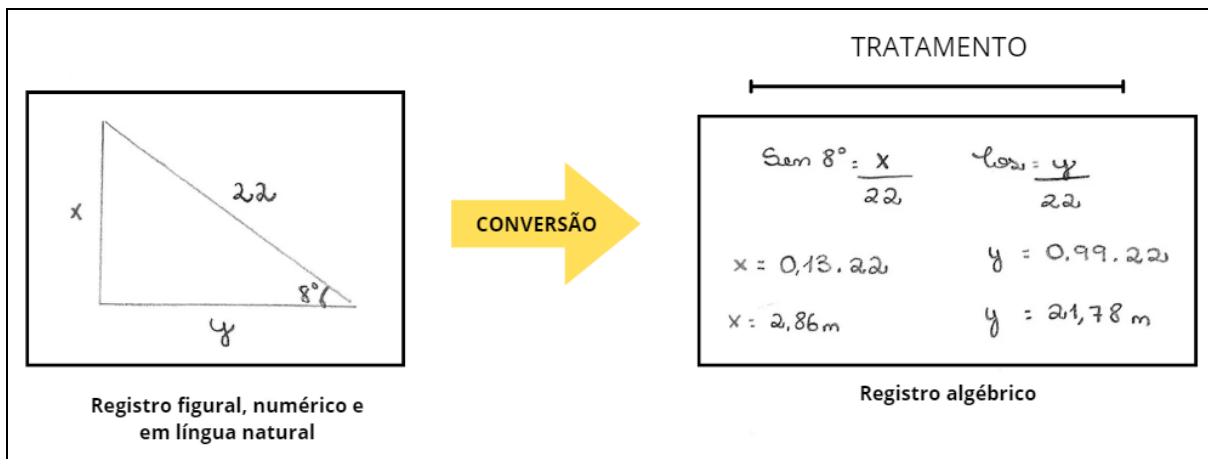
Quadro 28 – Análise do aluno JP

Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
R56 - Figural, numérico e em língua natural	Conversão (de R56 para R57)	Complementar (R56 e R57 no ângulo 6° e lados do triângulo)
R57 - Algébrico	Tratamento (em R57)	Restringir (R56 na interpretação das informações do material do aluno da SA; R57 uso de uma representação familiar para expressar resultados)

Fonte: Dados da pesquisa.

Finalizamos a análise da terceira etapa apresentando, por meio da Figura 33 os registros produzidos pela aluna BA.

Figura 33 – Resolução da aluna BA



Fonte: Dados da pesquisa.

Com base na Figura 33, podemos perceber que a aluna iniciou sua resolução produzindo o registro **figural, numérico e em língua natural (R58)** do triângulo retângulo, nomeando sua altura e comprimento pelas variáveis 'x' e 'y'. Ao ser questionada a respeito desse registro, a aluna respondeu que nas aulas de Matemática costuma utilizar o 'x' para indicar o cateto oposto e o 'y' para o cateto adjacente. Assim, identificamos que esse registro desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois a aluna utilizou uma representação familiar para expressar os catetos do triângulo.

Em seguida, realizou a conversão do registro **R58** para o **algébrico (R59)** a partir do uso das relações seno e cosseno, mantendo a correspondência entre os catetos e ângulo de referência.

Por meio do registro **R59**, observamos que a aluna realiza a transformação de **tratamento** para realizar seus cálculos. Para isso, utiliza informações compartilhadas entre os **R58** e **R59**, tais como o ângulo 8° e lados do triângulo. Desse modo, identificamos que esses registros desempenharam a função pedagógica **complementar**.

Em vista disso, apresentamos o Quadro 29, que sintetiza a análise do que foi produzido pela aluna BA (Figura 33), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

Quadro 29 – Análise da aluna BA

Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas

R58 - Figural, numérico e em língua natural	Conversão (de R58 para R59)	Complementar (R58 e R59 no ângulo 8° e lados do triângulo)
R59 - Algébrico	Tratamento (em R59)	Restringir (R58 no uso de representação familiar)

Fonte: Dados da pesquisa.

5.4 ETAPA 4

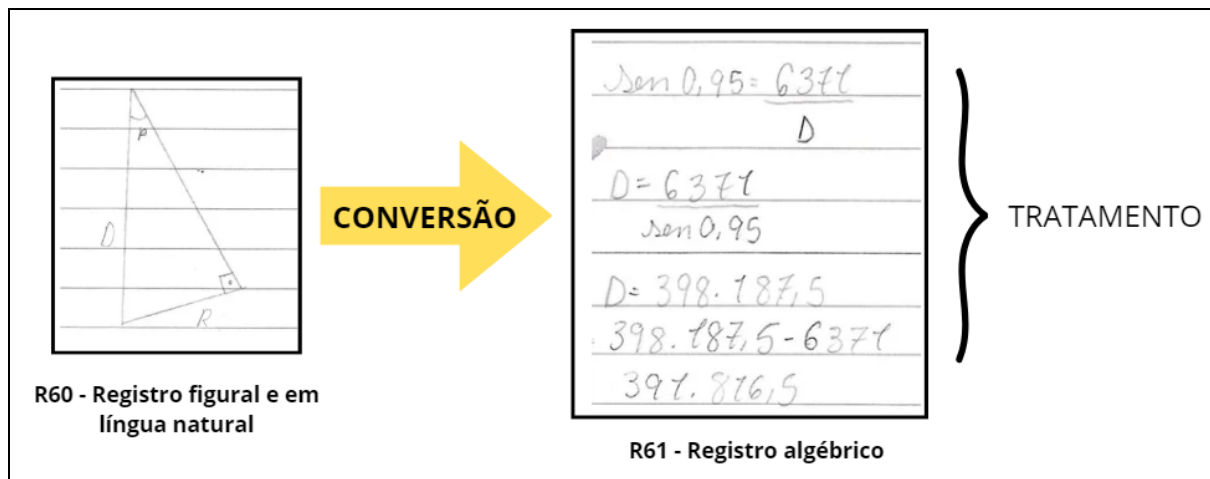
Nesta etapa, elaborou-se a atividade intitulada Como estimar a distância Terra-Lua? que explorou o método empregado por Aristarco de Samos para calcular a distância entre a Terra e a Lua por meio da paralaxe estelar. No qual os estudantes foram desafiados a calcular a distância Terra-Lua empregando conceitos de Trigonometria.

A análise dessa atividade foi realizada novamente com base nos registros produzidos pelos grupos MLJB, GALP e ELAM, compostos por quatro integrantes. Observamos, durante a execução dessa etapa, que todos os grupos utilizaram em suas resoluções os registros figurais que foram ofertados pelo material do aluno a respeito do triângulo retângulo formado entre a Terra e a Lua, devido a esta representação ser o primeiro contato dos grupos com o método paralaxe.

A seguir apresentamos, para cada grupo, os registros elaborados pelos participantes, nossa análise dos dados e um quadro síntese.

Iniciamos nossa apreciação dessa quarta etapa apresentando, por meio da Figura 34, a resolução do problema produzido pelo grupo MLJB que utilizou o método lei dos senos.

Figura 34 – Resolução da etapa 4 do grupo MLJB



Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos perceber a partir da Figura 34 que este grupo iniciou sua resolução produzindo um registro **figural e em língua natural (R60)** de um triângulo retângulo. Quando questionados acerca desse registro, os alunos explicaram que haviam desenhado o triângulo de paralaxe proposto pelo material do aluno da SA, no qual denominaram 'D' a distância entre o centro da Terra à Lua, 'R' o raio da Terra e 'p' o ângulo de paralaxe.

Dessa forma, identificamos que o registro **R60** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois apoiou a interpretação do grupo sobre informações disponíveis no material do aluno.

Em seguida, realizaram a **conversão** do registro **R60** para o **algébrico (R61)** utilizando a razão trigonométrica seno para efetuarem seus cálculos. Ao serem questionados sobre o método de resolução, os alunos explicaram que inicialmente pensaram em utilizar a relação do teorema de Pitágoras, mas como possuíam a medida do ângulo de paralaxe, optaram por usar a relação seno, o que tornaria o cálculo mais fácil. Logo, identificamos que o registro **R61** desempenhou a função pedagógica **restringir**, uma vez que os alunos recorreram ao uso de uma representação familiar para expressar sua solução.

A partir da Figura 34, observamos que durante a transformação de **tratamento** do registro **R61**, o grupo realizou uma subtração entre a medida da distância do centro da Terra à Lua e raio da Terra. Durante a retomada da atividade, questionamos os alunos quanto a essa subtração e responderam que por meio do triângulo retângulo representado no material do aluno perceberam que a hipotenusa 'D' indicava a distância do centro da Terra até a Lua, mas como esse não era o

objetivo da atividade, precisariam calcular a distância da ‘ponta da circunferência’ até a Lua, então desconsideraram a medida do raio da Terra.

Com base nisso, identificamos que os registros **R60** e **R61** desempenharam a função pedagógica **complementar**, pois suas informações foram usadas em conjunto para expressar a distância Terra-Lua.

Assim, apresentamos o Quadro 30, que sintetiza a análise do que foi produzido pelo grupo MLJB (Figura 34), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

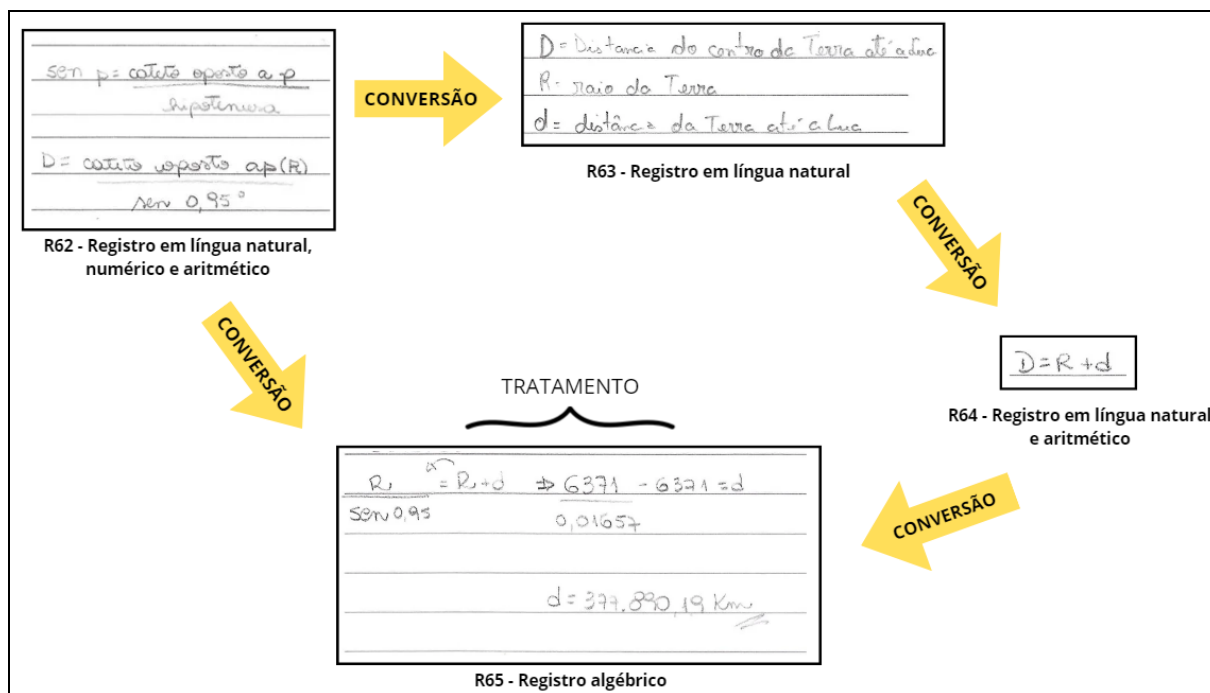
Quadro 30 – Análise da etapa 4 do grupo MLJB

Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
R60 - Figural e em língua natural	Conversão (de R60 para R61)	Complementar (R60 e R61 no cálculo da distância Terra-Lua)
R61 - Algébrico	Tratamento (em R61)	Restringir (R60 na interpretação de informações do material do aluno da SA; R61 no uso de representação familiar nos cálculos)

Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência apresentamos, por meio da Figura 35 a análise dos registros produzidos pelo grupo GALP para a quarta etapa.

Figura 35 – Resolução da etapa 4 do grupo GALP



Fonte: Dados da pesquisa.

A partir da Figura 35, identificamos que o grupo iniciou a resolução do problema produzindo um registro **em língua natural, numérico e aritmético (R62)** com uma relação seno. Quando questionado sobre esse registro, o grupo respondeu que haviam copiado a relação apresentada no texto 'Paralaxe' do material do aluno presente na SA. Assim, identificamos que esse registro desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois apoiou a interpretação de informações presentes no material do aluno.

Em seguida, o grupo realizou a **conversão** do registro **R62** para o registro **em língua natural (R63)**, apresentando uma relação de variáveis. Ao serem questionados sobre **R63**, os alunos explicaram que estabeleceram essas variáveis com base na figura do triângulo retângulo presente no material do aluno para auxiliá-los nos cálculos. Desse modo, identificamos que o registro **R63** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois restringiu informações sobre o triângulo disponível na SA.

Após isso, o grupo realizou a **conversão** do registro **R63** para o registro **em língua natural e aritmético (R64)** expressando uma relação de 'D'. Quando questionados sobre esse registro, o grupo explicou que observando o triângulo do material do aluno, perceberam que a hipotenusa 'D' correspondia à soma da distância Terra-Lua e o raio da Terra. Com base nesse diálogo,

identificamos que o registro **R64** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois restringiu informações a respeito da hipotenusa do triângulo disponível na SA.

Por fim, os alunos realizaram a **conversão** simultânea dos registros **R62** e **R64** para o registro **algébrico (R65)** por meio da substituição da relação 'D' na razão seno. Do mesmo modo, identificamos que esses registros desempenharam em conjunto a função pedagógica **complementar**, uma vez que compartilharam informações a partir das substituições já citadas.

A seguir, apresentamos o Quadro 31, que sintetiza a análise do que foi produzido pelo grupo GALP (Figura 35), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

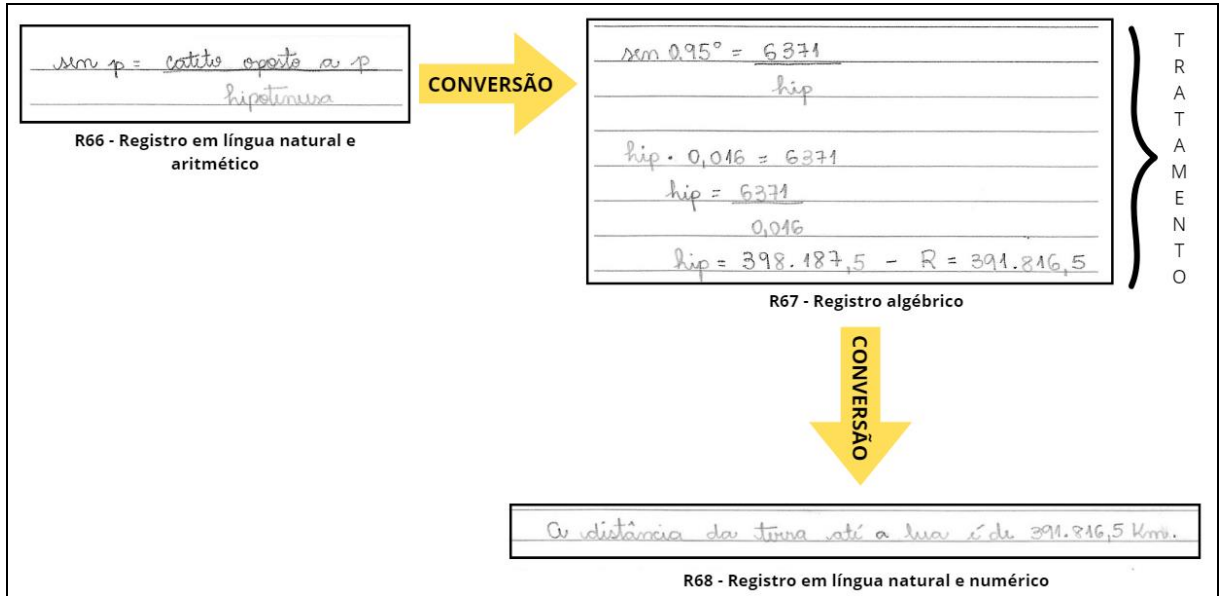
Quadro 31 – Análise da etapa 4 do grupo GALP

Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
R62 - Língua natural, numérico e aritmético	Conversão (de R62 para R63; de R63 para R64; de R62 e R64 para R65)	Complementar (R62, R64 e R65 na substituição da relação 'D' e razão seno)
R63 - Língua natural		Restringir (R62 restringiu informações do texto 'Paralaxe' do material da SA; R62 restringiu informações sobre o triângulo na SA; R64 restringiu informações sobre a hipotenusa do triângulo da SA.)
R64 - Língua natural e aritmético	Tratamento (em R65)	
R65 - Algébrico		

Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência apresentamos, por meio da Figura 36 a análise dos registros produzidos pelo grupo ELAM para a quarta etapa.

Figura 36 – Resolução da etapa 4 do grupo ELAM



Fonte: Dados da pesquisa.

Semelhante ao anterior, o grupo ELAM também iniciou a resolução do problema produzindo um registro **em língua natural e aritmético (R66)** com uma relação seno. Quando questionados a respeito de **R66**, o grupo respondeu que havia copiado a relação apresentada no texto 'Paralaxe' do material do aluno. Assim, identificamos que esse registro desempenhou a função pedagógica **restringir**, uma vez que restringiu a interpretação das informações presentes no material do aluno da SA.

Em seguida, o grupo realizou a **conversão** do **R66** para o registro **algébrico (R67)** realizando algumas substituições na relação seno escrita anteriormente. Ao serem questionados a respeito desse registro, os alunos explicaram que realizaram as substituições com os valores do raio da Terra e ângulo de paralaxe fornecidos pelo material do aluno. Desse modo, identificamos que o registro **R67** desempenhou a função pedagógica **restringir**, pois apoiou a interpretação de informações presentes no material do aluno.

Durante o **tratamento** do registro **R67**, identificamos que o grupo realizou a subtração entre as medidas da hipotenusa e 'R'. Quando questionados a respeito disso, os alunos explicaram que ao observarem a figura do triângulo retângulo presente no material do aluno, perceberam que a medida de sua hipotenusa se tratava da distância do centro da Terra à Lua, sendo necessário subtrair o raio da Terra.

Por fim, o grupo realizou a **conversão** do **R67** para o registro **em língua natural e numérico (R68)** expressando a solução do problema. Identificamos que esses registros desempenharam a função pedagógica **complementar**, pois compartilharam a informação a respeito da distância Terra-Lua.

Encerramos a análise da quarta etapa, apresentamos o Quadro 32, que sintetiza as observações do que foi produzido pelo grupo ELAM (Figura 36), incluindo os registros utilizados, as atividades de transformações semióticas e as funções pedagógicas identificadas.

Quadro 32 – Análise da etapa 4 do grupo ELAM

Registros Utilizados	Transformações Identificadas	Funções Pedagógicas Identificadas
R66 - Língua natural e aritmético	Conversão (de R66 para R67) Tratamento (em R67)	Complementar (R67 e R68 na distância Terra-Lua)
R67 – Algébrico		Restringir (R66 restringiu informações do texto 'Paralaxe' do material da AS; R67 restringiu a interpretação de informações presentes no material do aluno)
R68 - Língua natural e numérico		

Fonte: Dados da pesquisa.

Na seção seguinte, são apresentadas as considerações finais da pesquisa, consolidando as principais percepções obtidas ao longo do estudo e proporcionando uma síntese das descobertas, além de destacar a relevância dos resultados alcançados em relação aos objetivos propostos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi elaborado a partir das dificuldades enfrentadas pela pesquisadora no contexto do ensino de Trigonometria ao longo de sua trajetória profissional. Identificamos, por meio de uma Revisão Sistemática de Literatura, a escassez de materiais que abordam a aplicação prática da Trigonometria em situações do mundo real, incluindo aspectos da TRRS e das MR na Educação Matemática.

Diante disso, esta pesquisa, não apenas buscou realizar uma revisão bibliográfica para discutir outros trabalhos já publicados a respeito da TRRS e MR, mas também elaborar uma sequência de atividades para a aprendizagem de Trigonometria, incorporando os princípios dessas teorias. Além disso, buscou-se implementar a SA desenvolvida em uma turma de 2ª ano do Ensino Médio de um colégio particular do Norte do Paraná e analisar os resultados obtidos a partir das produções dos participantes da pesquisa, com ênfase nos registros produzidos pelos alunos durante a resolução das atividades.

Identificamos que o uso conjunto da TRRS e MR ofereceu uma estrutura teórica valiosa para o ensino de Trigonometria, promovendo uma abordagem mais dinâmica e abrangente que considerou a variedade de formas com que os alunos puderam compreender e expressar conceitos matemáticos. Ademais, o uso de registros em forma de textos, figuras, vídeos e maquetes durante as atividades se mostrou uma forma de captar a atenção dos estudantes, uma vez que os registros produzidos apresentaram o uso de informações contidas nesses recursos didáticos.

Além disso, inferimos, a partir das produções da etapa 2, que em grupos os alunos exploraram e transitaram entre um número maior de registros, quando comparados às outras etapas da SA, desenvolvendo uma fluência matemática mais robusta acerca dos conceitos da lei dos senos e lei dos cossenos. Isso significa que eles não apenas compreendem os conceitos, mas também são capazes de aplicá-los de maneira flexível em diferentes situações.

Do mesmo modo, identificamos que o uso da SA possibilitou a facilitação da comunicação entre os estudantes e a professora, pois a partir dos diferentes registros produzidos, foi possível ter conhecimento dos caminhos tomados pelos alunos durante as resoluções dos problemas propostos, isto é, seu raciocínio.

Além disso, a aplicação da SA proporcionou momentos de retomada de conceitos matemáticos importantes já estudados anteriormente pela turma, tais como ângulos alternos alternos internos, comprimento da circunferência, técnicas de transformação de medidas e da própria Trigonometria.

A partir da análise das representações produzidas pelos alunos, conseguimos identificar quais tratamentos e conversões foram mobilizadas durante a solução dos problemas propostos nas atividades. De modo geral, concluímos que os estudantes sempre iniciavam a sua resolução a partir de representações que fossem familiares, como o método utilizado pela professora durante as aulas de Matemática ou àquele que tivessem maior facilidade em realizar os cálculos. Além disso, inferimos que os registros produzidos pelos aprendizes em todas as etapas da SA eram complementares, uma vez que um único registro não comportou todas as informações necessárias para responder aos problemas.

Como o PE foi pensado e desenvolvido buscando relacionar os conceitos de Trigonometria com situações práticas, enquanto professora da turma e pesquisadora, identifiquei que o uso conjunto da TRSS e MR permitiu que as aulas de Matemática se tornassem dinâmicas, com a participação ativa dos alunos nas atividades seja por meio da produção dos registros ou por discussões que demonstravam o interesse dos estudantes pela importância da Trigonometria para a História, Astronomia, Geografia e demais áreas do conhecimento. Considero que a aplicação do PE permitiu visualizar a Trigonometria não apenas como um ramo da Matemática, mas como um conhecimento desenvolvido pela necessidade humana.

Contudo, notamos algumas dificuldades em manter a continuidade das atividades, pois o colégio em que realizamos a aplicação da SA possuía uma política interna de não ter aulas de Matemática geminadas, o que gerou sempre a necessidade de retomadas das atividades das aulas anteriores e tornou o trabalho mais cansativo. Porém, ressaltamos que os ganhos obtidos a partir da SA superaram quaisquer dificuldades encontradas ao longo de sua aplicação.

Por fim, esperamos que os resultados dessa pesquisa embasem novos estudos, ainda mais aprofundados, ou que contribuam para o desenvolvimento de materiais sobre Probabilidade, Análise Combinatória, Matemática Financeira e Conjuntos Numéricos, temas dos quais também identificamos a escassez de produções envolvendo a TRRS e MR.

REFERÊNCIAS

- AINSWORTH, Shaaron. The functions of multiple representations. **Computers & education**, v. 33, n. 2-3, p. 131-152, 1999.
- AINSWORTH, Shaaron. DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. **Learning and instruction**, v. 16, n. 3, p. 183-198, 2006.
- AINSWORTH, Shaaron. The multiple representations principle in multimedia learning. In: MAYER, Richard. **The Cambridge handbook of multimedia learning**. 2ª edição. Cambridge: Cambridge University Press, p.464-486, 2014.
- ALVES, Vanessa da Silva. **A construção do conceito de número racional no sexto ano do ensino fundamental**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2014.
- ANANIAS, Izabela Cesario Correa. **Transformação de frações em números: uma experiência no Ensino Fundamental**. 2019. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.
- ARAÚJO, José Robson de. **Conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico da função afim: análise a partir da interpretação global de propriedades figurais**. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2021.
- ARINOS, Cleide Ribeiro Mota; FREITAS, José Luiz Magalhães de; RACHIDI, Mustapha. Uma análise semiótica e cognitiva na aprendizagem de áreas de triângulos e quadriláteros. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 23, n. 1, p. 420-447, 2021.
- BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições, v. 70, 2011.
- BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari Knopp. 1ª ed. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Porto Editora, 1994.
- BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, 1998.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- BRITO, Arlete de Jesus; MOREY, Bernadete Barbosa. Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental. **Horizontes**. Bragança Paulista, v. 22, n.1, p. 65-70, 2004.
- BROADBENT, Donald Erick. **Perception and Communication**. 1ª ed. Londres: Pergamon Press, 1958.

CABRAL, Clara Alice Ferreira. **Uma sequência de atividades com enfoque em representações dinâmicas para o desenvolvimento de conhecimentos de semelhança de triângulos**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

CARVALHO, Lidiane Pereira de. **Um estudo das concepções de estudantes do ensino médio sobre o conceito de função com base na teoria dos registros de representações semióticas**. 2017. Dissertação (Mestrado de Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2017.

CATANEO, Vanessa Isabel. **Compreensão conceptual de sistemas lineares: estudo de caso com o Software Geogebra em celulares**. 2020. Tese (Doutorado em Ciências da Linguagem) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2020.

COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da. A História da Trigonometria. **Educação Matemática em Revista**, [S. l.], v. 1, n. 13, p. 60-69, 2019.

DALLEMOLE, Joseide Justin. **A teoria dos registros de representação semiótica em um ambiente virtual de aprendizagem: uma proposta metodológica explorando os conceitos de ponto, reta e circunferência no ensino médio**. 2015. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2019

D'AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática se ensina?. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, v. 3, n. 4, p. 13-16, 1988.

DANTE, Luiz Roberto. **Matématica: Contexto & Aplicações**. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática em contextos: função afim e função quadrática**. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2020.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels**. 1 ed. Bern: Peter Lang, 1995.

DUVAL, Raymond. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Aprendizagem em matemática*. Campinas: Papyrus Editora, 2003.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Santiago de Cali: Universidad del Valle, 2004.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, v. 6, n. 2, p. 91-112, 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. de Méricles T. Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FARIA, Renata Aparecida. **Integração Multimodal e Coordenação de Representações Semióticas em Atividades de Função do 1º Grau**. 2017. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

FARIA, Renata Aparecida; LABURÚ, Carlos Eduardo. Conexão entre múltiplas representações em atividades de função polinomial do 1º Grau. **REMATEC**, v. 16, p. 310-325, 2021.

FLICK, Uwe. **Desenho da pesquisa qualitativa**. 1ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

GUIMARÃES, Jailma Ferreira. **As concepções da álgebra articuladas aos conteúdos de Matemática no Ensino Fundamental**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

KLEIN, Tânia Aparecida da Silva. **Perspectiva semiótica sobre o uso de imagens na aprendizagem significativa do conceito de biotecnologia por alunos do ensino médio**. 2011. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Paraná, 2011.

LABURÚ, Carlos Eduardo; FARIA, Renata Aparecida de. Coordenação e Multiplicidade Representacional em uma Atividade de Função do 1º Grau. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 7, n. 13, p. 61-86, 2018.

LABURÚ, Carlos Eduardo; SILVA, Osmar Henrique Moura da. Multimodos e múltiplas representações: fundamentos e perspectivas semióticas para a aprendizagem de conceitos científicos. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 16, n. 1, p. 7-33, 2011.

LABURÚ, Carlos Eduardo; ZOMPERO, Andreia de Freitas; BARROS, Marcelo Alves. Vygotsky e múltiplas representações: leituras convergentes para o ensino de ciências. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, [S. l.], v. 30, n. 1, p. 7-24, 2013.

LAGO, Willanickson Jacksemuller Santos. **As contribuições dos registros de representação semiótica no processo de ensino aprendizagem da função afim: um experimento com alunos do 1º ano do ensino médio do Instituto Federal Do Maranhão/IFMA campus avançado Rosário**. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede) – Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2018.

LEIVAS, José Carlos Pinto; BETTIN, Anne Desconsi Hasselmann; PRETTO, Valdir. O geogebra 3d na construção da pirâmide a partir de seu tronco: registros de representação semiótica. **Didáctica y Educación**, v. 9, n. 1, 2018.

LIMA, Jeferson Moizés; SIPLE, Ivnete Zuchi. GeoGebra classroom: uma plataforma virtual com ferramentas matemáticas interativas. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 10, n. 22, p. 493-515, 2021.

LIMA, Reinaldo Feio. **Aprendizagem de estatística na EJA com tecnologia: uma sequência didática com base nos registros de representação semiótica**. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

LOPES, Roberto Nogueira de Sousa. **Praxeologia do professor: uma investigação do conceito de fração sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático**. 2020. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

MARTINS, Fernanda Medeiros Alves Besouchet. **O número como signo: relatos de uma experiência de ensino de frações a partir das teorias sócio-interacionista e dos registros de representações semióticas**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ciências da Linguagem) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Palhoça, 2012.

MENDONÇA, Mariana Silva; PIRES, Rogério Fernando. Um estudo sobre a aprendizagem de função exponencial no ambiente computacional. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, v. 26, n. 02, 2018.

MENESES, Leonel Ricardo Machado. **Representações mobilizadas nas turmas de 1º ano do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Sergipe no ensino de função afim e quadrática**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2014.

NUNOMURA, Andréa Regina Teixeira. **Modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: um olhar para os registros de representação semiótica**. 2021. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Referencial curricular do Paraná: princípios, direitos e orientações**. Curitiba, 2018.

PIAGET, Jean. **A representação do mundo da criança**. 1ª ed. Paris: Alcan, 1926.

PREUSSLER, Roberto; GRANDO, Neiva Ignês. (Re) Pensar a apropriação dos significados dos conceitos científicos com uso de softwares de matemática. **Revista Cocar**, v. 7, n. 14, p. 53-65, 2013.

PROENÇA, Laís Isabele. **A mobilização dos registros de representação semiótica na prática pedagógica do processo de ensino-aprendizagem dos**

números racionais. 2021. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2021.

QUEIROZ, Diego da Silva. **As representações semióticas no estudo de inequações no ensino médio.** 2021. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2021.

RIBEIRO, Marcelino da Costa. **Aplicações da Trigonometria em Astronomia.** 2016. 101 f. Dissertação (Ciências Exatas e Naturais) – Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2016.

RONCHETTI, Wasley Antonio. **Os registros de representação semiótica na aprendizagem das grandezas massa e comprimento por meio de uma atividade de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica.** 2018. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018.

SANTANA, Larissa Elfisia de Lima. **A conversão entre representações semióticas: um estudo no domínio das frações à luz de Duval e Vergnaud.** 2018. Tese (Doutorado em Psicologia Cognitiva) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

SANTOS, Ricardo Almeida dos. **Ensino de pirâmides no ensino médio: uma sequência didática apoiada na teoria de registro de representação semiótica.** 2021. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

SILVA, Ledevande Martins. **Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas.** 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2013.

SILVA, Wellington. **O ensino de trigonometria: perspectivas do ensino fundamental ao médio.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2013.

SILVA, Maria Thaywana Valença; LIMA, Airlan Arnaldo Nascimento de. **TRIGONOMETRIA: UMA DISCUSSÃO HISTÓRICA.** 2021. 20 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Pernambuco, Recife, 2021.

SOUZA, Jerson Sandro Santos. **O conceito de função: da operacionalização da definição à aprendizagem significativa.** 2017. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2017.

SOUZA, Joamir; PATARO, Patrícia Moreno. **Vontade de Saber Matemática.** 1ª ed. São Paulo: FTD, 2015.

SOUZA, Viviane Aparecida de. **O trabalho educativo com o software de geometria dinâmica no quinto ano do ensino fundamental.** 2017. Dissertação

(Mestrado profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, 2019.

TOZO, Fábio Luiz Dias. **Tarefas exploratórias-investigativas para a aprendizagem de função afim**. 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2016.

TREVISAN SANZOVO, Daniel. **Níveis Interpretantes alcançados por estudantes de licenciatura em ciências biológicas acerca das Estações do Ano por meio da utilização da estratégia de Diversidade Representacional: uma Leitura Peirceana para sala de aula**. 2017. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

TYTLER, Russell; PRAIN, Vaughan; PETERSON, Suzanne. Representational issues in students learning about evaporation. **Research in Science Education**, v. 37, n. 3, p. 313-331, 2007.

WEBER, Keith. Students' understanding of trigonometric functions. **Mathematics Education Research Journal**, v. 17, n. 3, p. 91-112, 2005.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Declaração de Anuência da Instituição

Pesquisadora responsável: Ana Lara de Goes

Endereço: Rua Ivaldo Bonacin, 1583 - Andirá – PR

Fone (43) 99841-4311

E-mail: analara.goes@hotmail.com

TERMO DE ANUÊNCIA

Eu, _____, inscrito no RG N° _____ aceito que a pesquisadora Ana Lara de Goes, sob a orientação do pesquisador Prof. Dr. Daniel Trevisan Sanzovo do Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná – Campus Cornélio Procópio, desenvolva em nosso Colégio a pesquisa intitulada “Trigonometria: uma sequência de atividades pautada na teoria dos registros de representação semiótica e múltiplas representações”.

Estou ciente de que a pesquisa envolverá a aplicação de uma sequência de atividades a ser ofertada aos alunos do Ensino Médio de nosso Colégio.

Estou ciente, também, que durante a pesquisa, os alunos realizarão atividades de registros que poderão envolver a leitura, escrita, interpretação, cálculos, esboços de gráficos e desenhos de figuras geométricas. Sendo que esse material poderá ser utilizado em publicações científicas, sob rigorosa observância de cuidados éticos.

Fui esclarecido de que a pesquisa seguirá todas as determinações éticas previstas na Resolução N. 466/2012 CNS/CONEP, e de que não haverá nenhum dispêndio para o Colégio. Também fui informado de que o curso somente será realizado após a aprovação do Projeto pelo Comitê de Ética em Pesquisa da UENP, cujo protocolo me será fornecido.

No caso do não cumprimento das garantias acima, terei a liberdade de revogar minha anuência a qualquer instante, sem penalização alguma.

Em caso de dúvidas, é de meu conhecimento poder consultar o Comitê de Ética da UENP (CEP/UENP, Rod. BR 369, Km 54, Campus Luiz Meneguel de Bandeirantes-PR, CEP 86360-000, Caixa Postal 261, Fone (43)3542-

8056, e-mail: cep@uenp.edu.br).

Cambará, ____ de _____ de 2023.

Assinatura e carimbo do responsável pelo local da pesquisa

APÊNDICE B

Termo de Assentimento Livre e Esclarecido

Pesquisadora Responsável: Ana Lara de Goes

Endereço: Rua Ivaldo Bonacin, 1583, Andirá-PR

CEP: 86.380-000 Fone: (43) 99841-4311

E-mail: analara.goes@hotmail.com

Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (maiores de 6 anos e menores de 18 anos)

Você está sendo convidado para participar da pesquisa “Trigonometria: uma sequência de atividades pautada na teoria dos registros de representação Semiótica e múltiplas representações para o Ensino Médio”, desenvolvida na Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP), no Mestrado Profissional em Ensino (PPGEN). Seus pais permitiram que você participe. Esta pesquisa pretende elaborar uma sequência de atividades para alunos sob o referencial das Múltiplas Representações para contribuir com o aprendizado de alunos do Ensino Médio acerca do conteúdo de Trigonometria. Os participantes desta pesquisa são você e seus colegas de classe. Mas você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito seu e não terá nenhum problema se desistir, a qualquer momento. A pesquisa será feita em sala de aula, no seu colégio. Você e seus colegas do Ensino Médio irão realizar atividades de registro que poderão envolver a leitura, escrita, interpretação, cálculos, esboços de gráficos e desenhos de figuras geométricas. A pesquisa irá analisar o desempenho de vocês durante as atividades e buscará indícios de aprendizagem sobre o conteúdo de Trigonometria.

Na divulgação da pesquisa, poderemos usar algum texto ou atividade sua desenvolvida em sala de aula, mas não iremos, de forma alguma, identificá-lo. Usaremos nomes fictícios para substituir sua assinatura. No caso de usarmos produções escritas de sua autoria no nosso trabalho, iremos digitá-las para que sua letra não seja reconhecida. Não daremos a estranhos as informações coletadas em sala de aula. A pesquisa apresentará riscos mínimos aos alunos, podendo, caso algum participante sinta algum desconforto durante a realização da pesquisa, ficar a vontade para continuar em outro momento ou desistir sem prejuízo algum. Os

participantes terão direito de indenização e ressarcimento por qualquer e eventual dano não previsto. Essa pesquisa é muito importante e trará como benefício proporcionar uma estratégia que contribua com a aprendizagem de alunos do Ensino Médio sobre o conteúdo de Trigonometria e estimular a educação de qualidade.

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UENP Universidade Estadual do Norte do Paraná - Campus Luiz Meneghel de Bandeirantes. Fone/Fax: +55 (43) 3542 8010 | Fax: (43) 3542 – 8056 e-mail: cep@uenp.edu.br. Rodovia BR-369 Km 54, Vila Maria, CP 261 – CEP: 86360-000, Bandeirantes - Paraná – Brasil, horário de funcionamento segunda a sexta-feira das 7h30min às 12h e das 13h30min às 17h.

Eu , recebi uma via deste termo rubricada e assinada pela pesquisadora e pelo participante da pesquisa, li e aceito participar da pesquisa “Trigonometria: uma sequência de atividades pautada na teoria dos registros de representação Semiótica e múltiplas representações para o Ensino Médio”.

Cambará, _____ de _____ de 2023.

Assinatura do menor

Assinatura da pesquisadora

APÊNDICE C

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Pesquisadora Responsável: Ana Lara de Goes

Endereço: Rua Ivaldo Bonacin, 1583, Andirá-PR

CEP: 86.380-000 Fone: (43) 99841-4311

E-mail: analara.goes@hotmail.com

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Este é um convite especial para seu filho participar voluntariamente da pesquisa “Trigonometria: uma sequência de atividades pautada na teoria dos registros de representação semiótica e múltiplas representações para o Ensino Médio”. Por favor, leia com atenção as informações abaixo antes de dar seu consentimento. Qualquer dúvida sobre o estudo ou sobre este documento entre em contato diretamente com a pesquisadora responsável.

OBJETIVO E BENEFÍCIOS DO ESTUDO

Pretendemos, com esta pesquisa, estudar conteúdos a respeito da Trigonometria. Por meio desta pesquisa seu filho poderá desenvolver a aprendizagem em matemática.

PROCEDIMENTOS/METODOLOGIA

Os alunos do colégio de seu filho que aceitarem participar da pesquisa irão realizar atividades de registro que poderão envolver a leitura, escrita, interpretação, cálculos, esboços de gráficos e desenhos de figuras geométricas. Ele não fará nada diferente da rotina pedagógica. A pesquisa irá analisar o desenvolvimento dos alunos no decorrer das atividades didáticas, para identificar indícios de aprendizagem. Na divulgação da pesquisa, poderemos usar algum texto ou atividade de seu filho desenvolvida em sala de aula, mas, de forma alguma, iremos identificar seu filho ou a escola. Usaremos nomes fictícios para substituir a assinatura dos alunos. No caso de usarmos produções escritas de seu filho no nosso trabalho, iremos digitá-las para que a letra dele não seja reconhecida. Não daremos a estranhos as informações coletadas em sala de aula.

DESPESAS/ RESSARCIMENTO DE DESPESAS DO VOLUNTÁRIO

Todos os participantes envolvidos nesta pesquisa são isentos de custos.

PARTICIPAÇÃO VOLUNTÁRIA

A participação de seu filho neste estudo é voluntária e ele terá plena e total liberdade para desistir do estudo a qualquer momento, sem que isso acarrete qualquer prejuízo para ele.

GARANTIA DE SIGILO E PRIVACIDADE

As informações relacionadas ao estudo são confidenciais e qualquer informação divulgada em relatório ou publicação será feita sob forma codificada (nome fictício), para que a confidencialidade seja mantida. A pesquisadora garante que o nome de seu filho não será divulgado sob hipótese alguma. A pesquisa apresentará riscos mínimos aos alunos, podendo, caso algum participante sinta algum desconforto durante a realização da pesquisa, ficar a vontade para continuar em outro momento ou desistir sem prejuízo algum. Os participantes terão direito de indenização e ressarcimento por qualquer e eventual dano não previsto.

ESCLARECIMENTO DE DÚVIDAS

Você e seu filho podem fazer todas as perguntas que julgarem necessárias durante e após o estudo. Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UENP Universidade Estadual do Norte do Paraná - Campus Luiz Meneghel de Bandeirantes. Fone/Fax: +55 (43) 3542 8010 | Fax: (43) 3542 – 8056 e e-mail: e-mail: cep@uenp.edu.br. Rodovia BR-369 Km 54, Vila Maria, CP 261 – CEP: 86360-000, Bandeirantes - Paraná – Brasil, horário de funcionamento segunda a sexta-feira das 7h30min às 12h e das 13h30min às 17h.

Diante do exposto eu _____, RG nº _____ declaro querecebi uma via do termo assinada pela pesquisadora, li e autorizo a participação livre e espontânea de meu filho(a) _____ para a pesquisa em questão.

Assinatura da pesquisadora

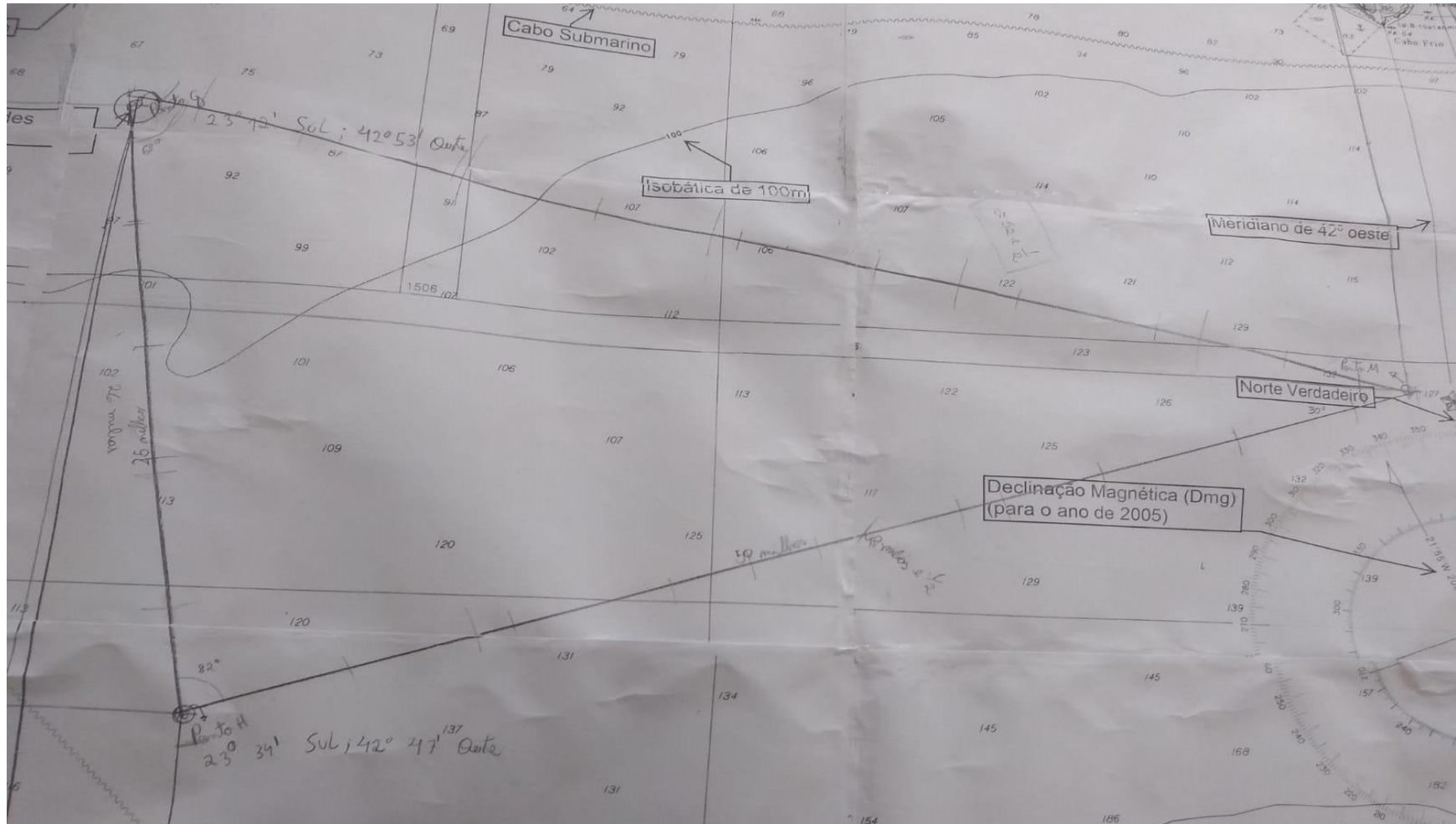
Assinatura do Responsável

Cambará, ____ de _____ de 2023.

ANEXOS

ANEXO A

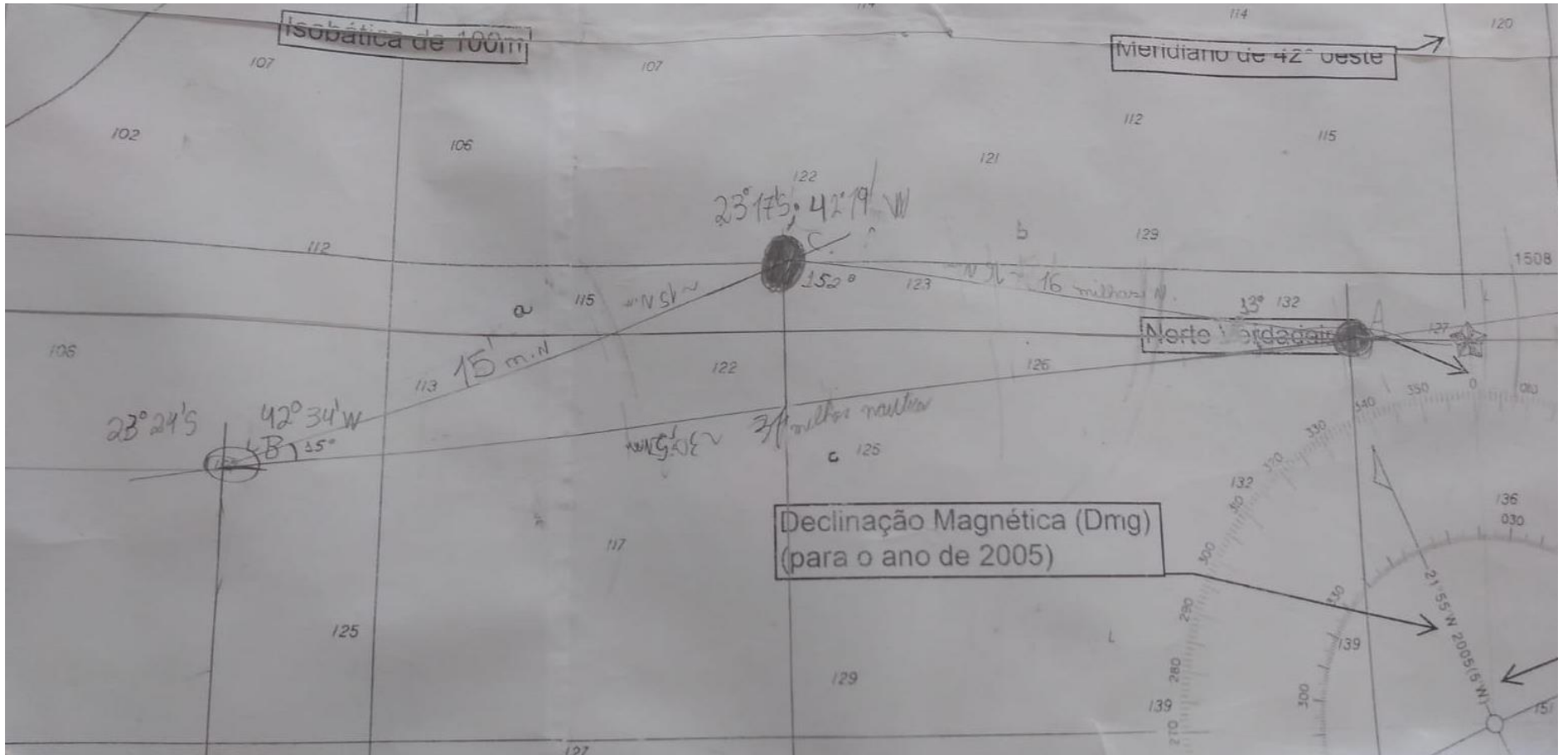
Carta náutica do grupo MLJB – etapa 2



Fonte: dados da pesquisa.

ANEXO B

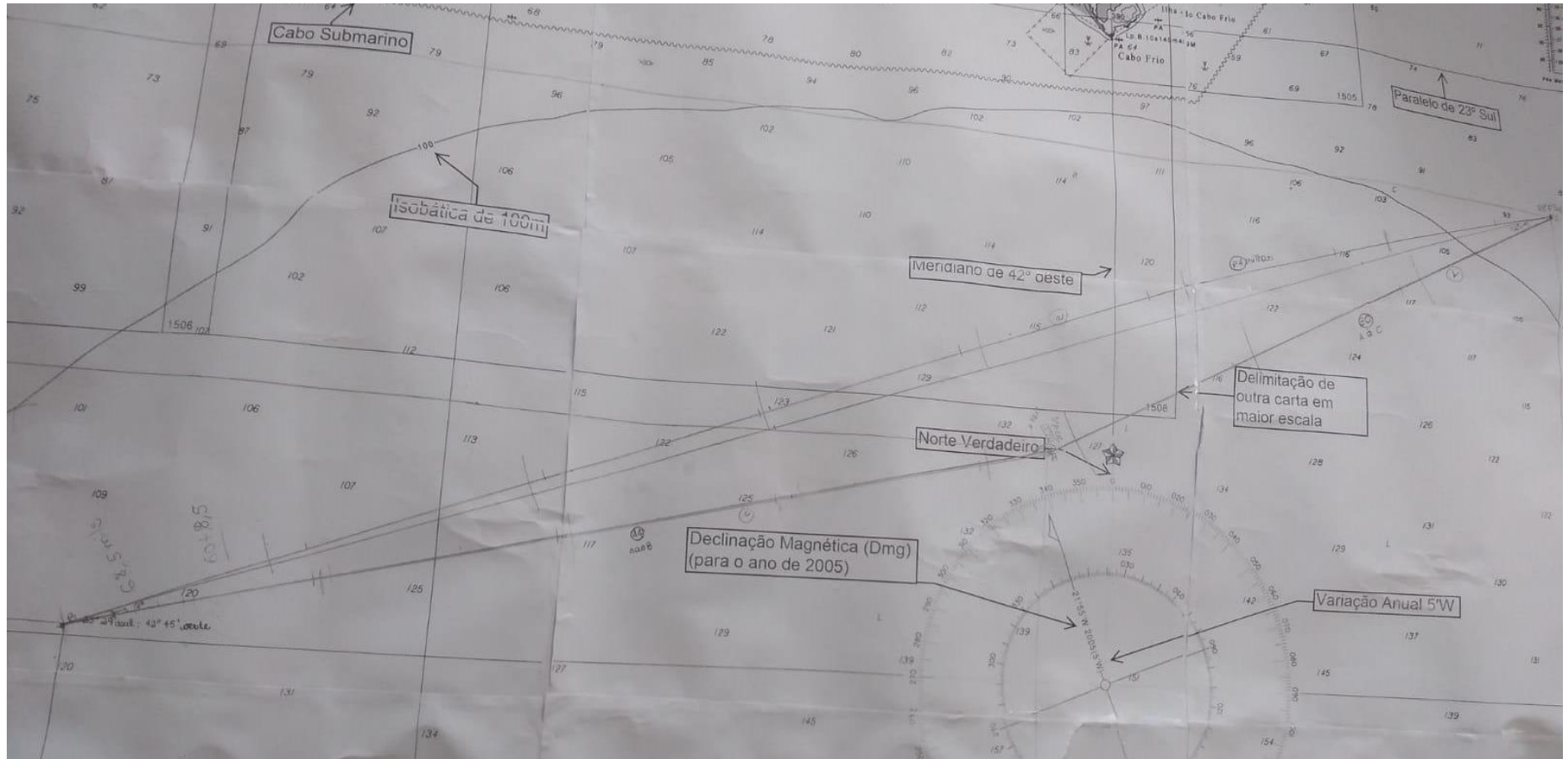
Carta náutica do grupo GALP – etapa 2



Fonte: dados da pesquisa.

ANEXO C

Carta náutica do grupo ELAM – etapa 2



Fonte: dados da pesquisa