2024

Sequência de atividades de trigonometria com base nas múltiplas representações e na teoria dos registros de representação semiótica

Goes, Ana Lara de

Universidade Estadual do Norte do Paraná

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE DO PARANÁ
***Campus* Cornélio Procópio**
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO

ANA LARA DE GOES
DANIEL TREVISAN SANZOVO

PRODUÇÃO TÉCNICA EDUCACIONAL

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES DE TRIGONOMETRIA COM BASE NAS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES E NA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

CORNÉLIO PROCÓPIO – PR
2024

ANA LARA DE GOES
DANIEL TREVISAN SANZOVO

PRODUÇÃO TÉCNICA EDUCACIONAL

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES DE TRIGONOMETRIA COM BASE NAS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES E NA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

SEQUENCE OF TRIGONOMETRY ACTIVITIES BASED ON MULTIPLE REPRESENTATIONS AND ON THE THEORY OF REGISTERS OF SEMIOTIC REPRESENTATION

Produção Técnica Educacional apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná – *Campus* Cornélio Procópio, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino.

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Ciências Naturais e Matemática

CORNÉLIO PROCÓPIO – PR
2024

Ficha catalográfica elaborada por Juliana Jacob de Andrade - Bibliotecária, CRB/9 - 1669, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UENP

GOES, Ana Lara de
G598s Sequência de atividades de trigonometria com base nas múltiplas representações e na teoria dos registros de representação semiótica. / Ana Lara de GOES; orientador Daniel Trevisan Sanzovo - Cornélio Procópio, 2024.
64 p. :il.

Produção Técnica Educacional (Mestrado Profissional em Ensino) - Universidade Estadual do Norte do Paraná, Centro de Ciências Humanas e da Educação, Programa de Pós-Graduação em Ensino, 2024.

1. Trigonometria. 2. Ensino Médio. 3. Teoria dos Registros de Representação Semiótica. I. Sanzovo, Daniel Trevisan , orient. II. Título.

CDD: 372.011

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
GPS	Global Position System
MR	Múltiplas Representações
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PE	Produto Educacional
PPGEN	Programa de Pós-Graduação em Ensino
RCP	Referencial Curricular do Paraná
RSL	Revisão Sistemática de Literatura
SA	Sequência de Atividades
TRR	Teoria dos Registros de Representação Semiótica
UENP	Universidade Estadual do Norte do Paraná

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Prezado leitor,

Este Produto Educacional (PE) foi desenvolvido como parte integrante da pesquisa de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino (PPGEN – UENP), que teve como objetivo responder a seguinte questão: *como uma sequência de atividades pautada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Múltiplas Representações pode favorecer a aprendizagem de alunos do 2ª ano do Ensino Médio a respeito de conteúdos de Trigonometria?* Assim, a finalidade deste recurso educacional é apresentar estratégias práticas a serem implementadas nas aulas de Matemática.

Destacamos que este material foi aprovado por banca de defesa de mestrado e é resultado dos conhecimentos adquiridos durante o curso e das dificuldades enfrentadas pela autora no âmbito do Ensino de Trigonometria ao longo de sua trajetória profissional, muitas vezes devido à dificuldade que os estudantes encontram em visualizar a aplicação prática da Trigonometria em situações do mundo real, fator que torna o aprendizado menos motivador.

Acreditando na fundamental importância do aprendizado de Trigonometria, elaboramos este PE com o propósito de estabelecer conexões entre diversos campos do conhecimento, tais como Física, Engenharia, Astronomia e Geometria como sugerem os Parâmetros Curriculares Nacionais[1] (PCN), a Base Nacional Comum Curricular[2] (BNCC), e o Referencial Curricular do Paraná[3] (RCP), visando tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas, de modo que os estudantes reconheçam a relevância dessa disciplina para a humanidade.

Para isso, desenvolvemos uma sequência de atividades para alunos do Ensino Médio pautada nos pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e das Múltiplas Representações (MR) a partir da

---

[1] Um exemplo da conexão entre a aprendizagem da Matemática e o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, quando abordada em conjunto com suas aplicações práticas, evitando enfatizar demasiadamente o cálculo algébrico de identidades e equações.

[2] Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

[3] Resolver e elaborar problemas, de diferentes contextos, envolvendo as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras e a semelhança de triângulos.

contextualização histórica da Trigonometria e de aplicações dos seus conceitos na vida cotidiana. A fim de tentar favorecer o desenvolvimento de capacidades de representar, conforme proposto pela BNCC[4] e pelo RCP[5].

Em relação ao ensino de Trigonometria, a BNCC e o RCP sugerem que seja iniciado nos anos finais do Ensino Fundamental (9º ano) e deve fornecer apoio aos conteúdos subsequentes no Ensino Médio (Brasil; Paraná, 2018). Perpassando por conceitos como as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras e a semelhança de triângulos.

Tais habilidades indicam que o ensino de Trigonometria no Ensino Médio deve abordar, inicialmente, a aplicação das razões trigonométricas no triângulo retângulo para resolver problemas práticos. Em seguida, sugere-se trabalhar conceitos mais avançados, como as funções seno e cosseno, sua representação no círculo trigonométrico, dedução de fórmulas e conexões com outras áreas do conhecimento.

Em vista disso, escolhemos como eixo temático da sequência de atividades os conteúdos arcos e ângulos, lei do seno, lei do cosseno e razões trigonométricas no triângulo retângulo. Essa escolha decorreu da carência de materiais contextualizados disponíveis sobre esses assuntos, aspecto identificado pela autora por meio de uma Revisão Sistemática de Literatura.

Para tanto pautamo-nos sobre os referenciais da TRRS (Duval, 1993; 1995; 2003; 2004; 2009; 2011; 2012) e das MR (Ainsworth, 1999; 2006; 2014), dos quais tratamos na seção a seguir.

Além disso, comunicamos que na segunda seção deste PE existem diretrizes destinadas aos professores, orientando sobre como conduzir efetivamente as atividades, inclusive apresentando um breve relato de aplicação na quarta seção.

Desejamos a todos uma boa leitura!

---

[4] Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

[5] As variadas estratégias para o ensino da Matemática devem possibilitar ao estudante: a capacidade de investigação, leitura, interpretação, comunicação, comparação, análise, síntese e generalização; o desenvolvimento de hipóteses e de estratégias de solução, de verificação, de argumentação e de representações (manipuláveis, textuais, gráficas, geométricas, pictóricas entre outros).

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Na criação da sequência de atividades, fundamentamo-nos nos princípios da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), aliada à abordagem de Múltiplas Representações (MR) no contexto dos conteúdos de Trigonometria. Esses referenciais destacam, sobretudo, a relevância de utilizar diversas formas de representação do objeto matemático em atividades.

Conforme Duval (2012), o ensino de Matemática enfrenta desafios em todos os níveis educacionais, em parte devido à natureza dos objetos matemáticos, que não são diretamente acessíveis à percepção, ao contrário dos objetos em disciplinas como Biologia e Física.

Em vista disso, o autor defende que para compreender esses objetos, é necessário representá-los, sendo isso considerado um paradoxo do pensamento humano, pois o objeto matemático se trata de uma compreensão conceitual, mas é somente a partir de representações semióticas que se torna possível a atividade matemática. Assim, é crucial reconhecer a importância de distinguir claramente o objeto matemático de sua representação, mesmo que ambos estejam intrinsecamente conectados.

Ainda conforme a TRRS, as representações semióticas caracterizam-se pelo uso de signos pertencentes a um sistema de representações, podendo ser expressas através de figuras geométricas, enunciados em língua natural, fórmulas algébricas ou gráficos. Nessa perspectiva, a compreensão conceitual da Matemática implica a habilidade de utilizar coordenadamente ao menos dois registros de representações semióticas distintas (Duval, 2003).

Para que um sistema semiótico seja considerado um registro de representação, é essencial que ele possibilite três atividades cognitivas fundamentais relacionadas à *semiósis*[6]:

a) formação de uma representação identificável: se trata de uma seleção de relações e dados no conteúdo a representar;
b) tratamento: transformação entre representações que se efetua no interior de um mesmo registro;
c) conversão: transcrição de uma representação em um dado

[6] Apreensão ou a produção de uma representação semiótica (Duval, 2012).

> registro a outra representação em registro distinto, em que se conserva totalmente ou parcialmente o conteúdo da representação inicial.

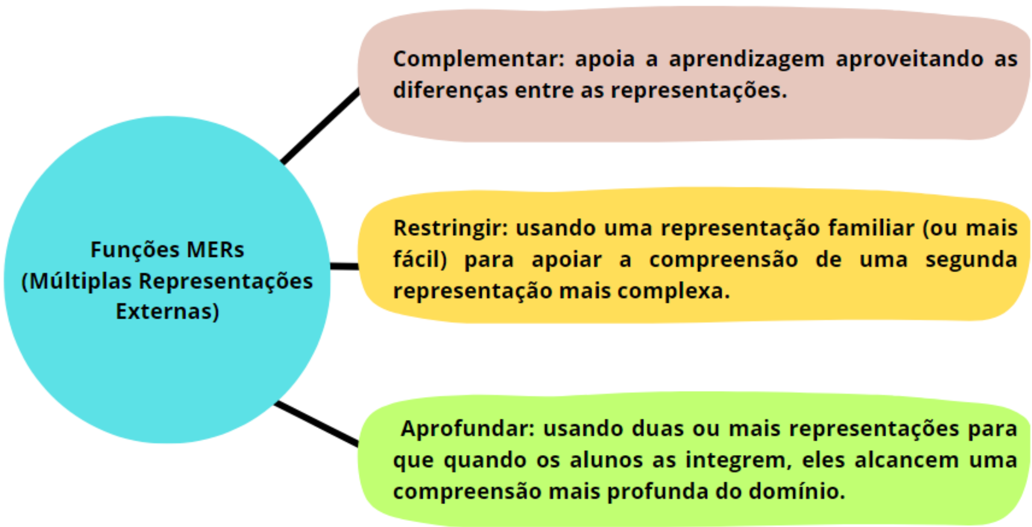
Dentre essas, Duval (2012) destaca a importância da atividade cognitiva de conversão, pois cada registro apresenta características próprias que podem não ser suficientes para uma compreensão completa dos conceitos matemáticos.

Com base nessas ideias, Tytler, Prain e Peterson (2007) definem as MR como a utilização, no discurso científico, de diversas formas para representar um mesmo conceito, com o propósito de auxiliar os alunos na internalização do significado científico. Por sua vez, Laburú e Faria (2018) apresentam uma variedade de representações, dentre elas: descritivas (verbal, tabular, gráfica, diagramática, fotográfica por mapas ou cartas), experimentais, figurativas (pictórica, analógica ou metafórica) e gestuais ou corporais.

Nesse aspecto, Laburú e Silva (2011) declaram que o Ensino pautado nas MR permitem aos alunos expressar seu entendimento por meio de representações distintas, o que possibilita a coordenação, organização, estruturação e aprimoramento de seus conhecimentos.

Em virtude disso, Ainsworth (1999) propõe as três funções pedagógicas das MR, conforme a figura 1.

Figura 1 – Funções pedagógicas das MR



Fonte: GOES *et al*., (2023)

A TRRS e as MR estão alinhadas à BNCC no que se refere à necessidade de os alunos utilizarem diversos registros de representação e serem capazes de mobilizá-los em diferentes situações para enriquecer suas descobertas (Brasil, 2018). Além de enunciar que em Matemática, frequentemente se faz necessário o uso de diferentes registros de representação e linguagens diversas para compreender, resolver e comunicar os resultados de uma atividade.

Dessa forma, é esperado que os estudantes estejam familiarizados com várias formas de representação e sejam capazes de utilizá-las para modelar diferentes situações cotidianas por meio da linguagem específica da Matemática.

Para saber mais a respeito da TRRS e MR, indicamos a leitura na íntegra da dissertação de Mestrado intitulada ‘Aprendizagem de Trigonometria: uma sequência de atividades pautada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e nas Múltiplas Representações para o Ensino Médio’, disponível em: https://uenp.edu.br/mestrado-ensino-dissertacoes.

2 PRODUÇÃO TÉCNICA EDUCACIONAL

2.1 SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES E ORIENTAÇÕES AOS DOCENTES

O Produto Educacional exposto neste documento integra a dissertação de mestrado intitulada: Aprendizagem de Trigonometria: uma sequência de atividades fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Múltiplas Representações para o Ensino Médio.

A Sequência de Atividades (SA) foi desenvolvida a partir dos pressupostos de Duval (1995; 2003; 2004; 2009) e Ainsworth (1999; 2006; 2014) para elaboração de atividades matemáticas, relacionando a TRSS e as funções pedagógicas das MR.

O conjunto de atividades foi pensado visando o objetivo principal de trabalhar conceitos da Trigonometria com alunos do Ensino Médio, tais como arcos e ângulos, lei do seno, lei do cosseno e razões trigonométricas no triângulo retângulo, de modo a favorecer, como proposto pela BNCC a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental (Brasil, 2018).

Sublinhamos nossa expectativa de que os professores responsáveis por este recurso educacional assumam o papel de facilitadores e guias no processo de aprendizagem dos alunos. Nessa perspectiva, espera-se não apenas a transmissão de informações, mas também a criação de ambientes propícios para que os alunos construam ativamente seu próprio conhecimento.

A SA teve seu planejamento e desenvolvimento realizado a partir do Quadro 1, que explicita as etapas e as atividades pensadas para cada uma delas, os objetivos, as funções pedagógicas das MR empregadas, representações semióticas utilizadas e a duração de cada atividade.

Quadro 1 - Estrutura geral das etapas da sequência de atividades

Etapa	Objetivo	Funções Pedagógicas	Representações Semióticas	Hora/ Aula
Atividade 1: A Terra é plana?	Estimar a medida da circunferência da Terra.	Complementar Restringir Aprofundar	Multifuncional não-discursiva Monofuncional discursiva	04

			Multifuncional discursiva	
Atividade 2: Localização em alto mar	Estimar distâncias marítimas pelo método da triangulação.	Complementar Restringir Aprofundar	Multifuncional não-discursiva Monofuncional discursiva Multifuncional discursiva	04
Atividade 3: Como os navios são lançados ao mar?	Utilizar as razões trigonométricas no triângulo retângulo para estudar planos inclinados usados para o lançamento e recolhimento de embarcações	Complementar Restringir Aprofundar	Multifuncional não-discursiva Multifuncional discursiva Monofuncional discursiva.	04
Atividade 4: Como estimar a distância Terra-Lua?	Estimar a distância Terra-Lua pelo método de paralaxe.	Complementar Restringir Aprofundar	Multifuncional não-discursiva Monofuncional discursiva Multifuncional discursiva	04

Fonte: A própria autora.

A partir da elaboração do Quadro 1 foi realizado o planejamento de cada etapa e atividade de maneira individual, bem como as orientações aos docentes e o desenvolvimento do material do aluno, dos quais são apresentados nas subseções a seguir.

2.1.1 Primeira etapa

Para esta etapa foi desenvolvida a atividade intitulada A Terra é plana? Embasada no procedimento realizado por Eratóstenes na estimativa da circunferência da Terra e que possibilitou, na época, confirmar a característica

’esférica‘ do planeta Terra. Para essa etapa, buscamos utilizar, além da diversidade de registros de representação semiótica, ferramentas tecnológicas para a contextualização e encaminhamentos da atividade, conforme orientações aos professores apresentadas no Quadro 2.

Quadro 2 – Planejamento da primeira etapa

A Terra é plana?
Objetivo Geral: Estimar a medida da circunferência da Terra.
Funções Pedagógicas: Complementar, restringir e aprofundar.
Conteúdo: arcos e ângulos
Carga Horária: 4 aulas
Habilidade da BNCC: EF09MA11 - Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.
Objetivos Específicos: • Contextualizar o desenvolvimento da Trigonometria como suporte matemático para a resolução de problemas associados à Astronomia em virtude das grandes navegações; • Construir a representação tridimensional das observações realizadas por Eratóstenes a respeito da incidência dos raios solares nas cidades de Alexandria e Siena; • Realizar a conversão das representações tridimensional (multifuncional não-discursivo) e em língua natural (multifuncional discursiva) para geométrica (multifuncional não-discursivo) e numérica (monofuncional discursivo), bem como estimar a medida do raio e da circunferência da Terra.
Materiais: Material do aluno Cartolina Palitos de madeira Dispositivo com acesso à internet
Orientações aos Docentes: Sugere-se que esta atividade seja iniciada por meio da contextualização histórica

sobre o desenvolvimento da Trigonometria como suporte para a resolução de problemas associados à Astronomia. Para isso, indicamos que o professor utilize vídeos e textos sobre as grandes navegações, período que exigiu a medição de distâncias entre pontos inacessíveis e o desenvolvimento de equipamentos náuticos para a localização em alto mar. Estes materiais estão organizados no capítulo "Sugestões de Leitura" a frente. Posteriormente, recomenda-se abordar por meio do vídeo 'Quer que desenhe? Eratóstenes'[7] e texto (material do aluno), as observações realizadas por Erastóstenes a respeito da incidência dos raios solares nas cidades de Alexandria e Siena. Em seguida, com auxílio de cartolina e palitos de madeira, propomos a construção da representação tridimensional das sombras projetadas nessas cidades simultaneamente, para isso, sugerimos o modelo apresentado por Carl Sagan no vídeo "Eratóstenes e a circunferência da Terra"[8] e também a utilização do software de geometria dinâmica 'Geogebra'[9] como ferramentas para a compreensão da incidência dos raios solares na superfície terrestre. Estas representações desempenharão as funções pedagógicas de restringir e complementar. Após isso, com o auxílio de textos e imagens sobre o procedimento realizado por Eratóstenes (material do aluno), os alunos poderão realizar as conversões de registros e estimar a medida do raio e circunferência da Terra. Essas representações exercerão as funções pedagógicas de complementar e aprofundar.
Avaliação: A avaliação será realizada por meio de análise de conversões de representações entre registros de representação semiótica executados pelos alunos no procedimento de estimar a medida da circunferência da Terra.

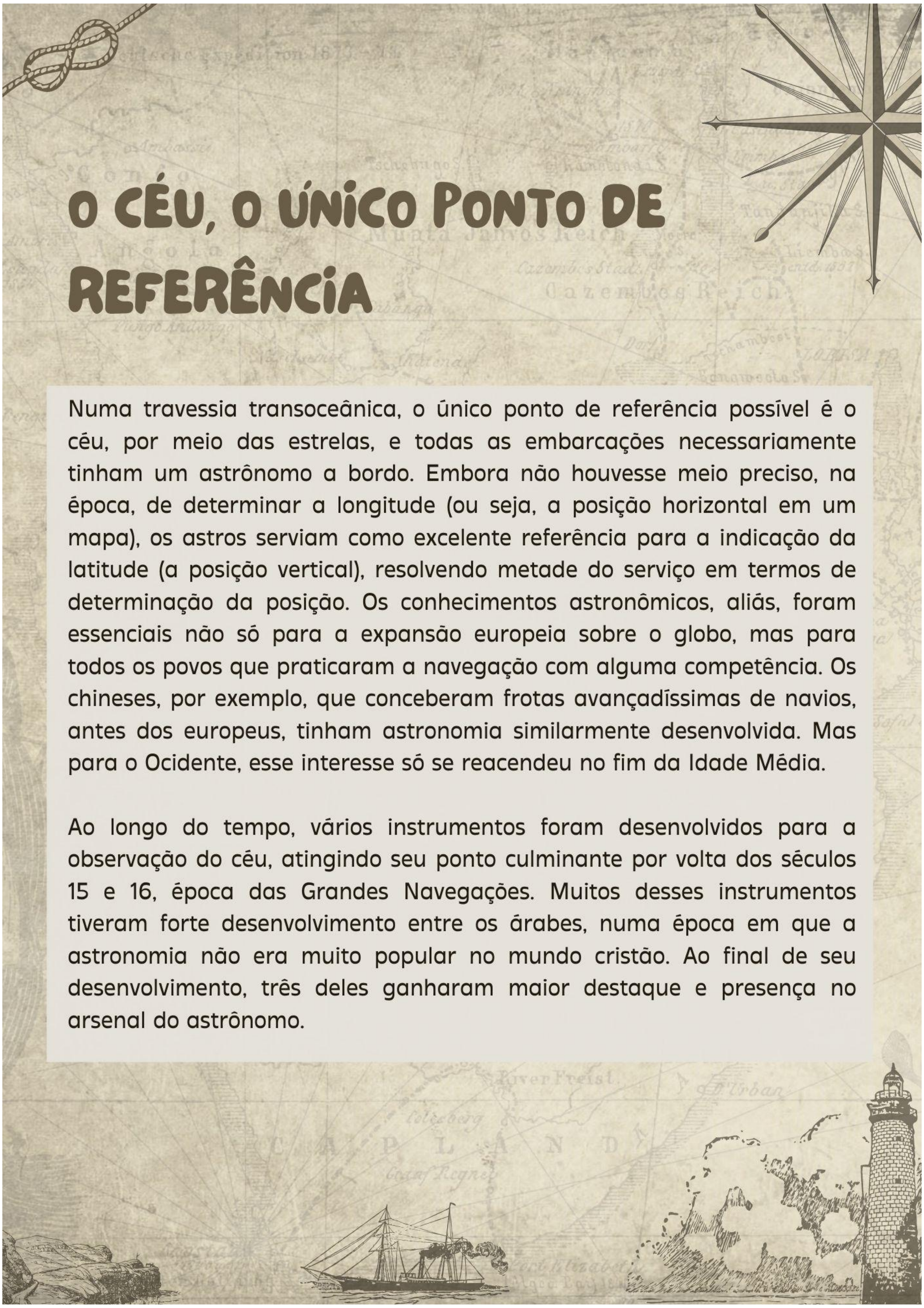
Fonte: A própria autora.

O material do aluno referente à primeira etapa encontra-se disponível nas páginas seguintes.

---

[7] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=wiYE6tVUpXg. Acesso em: 28 de mar. 2023.
[8] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=fu9Z7YuXLVE&t=10s. Acesso em: 28 de mar. 2023.
[9] Disponível em: https://www.geogebra.org/?lang=pt. Acesso em: 22 de jul. 2023.

O céu, o único ponto de referência[10]



O CÉU, O ÚNICO PONTO DE REFERÊNCIA

Numa travessia transoceânica, o único ponto de referência possível é o céu, por meio das estrelas, e todas as embarcações necessariamente tinham um astrônomo a bordo. Embora não houvesse meio preciso, na época, de determinar a longitude (ou seja, a posição horizontal em um mapa), os astros serviam como excelente referência para a indicação da latitude (a posição vertical), resolvendo metade do serviço em termos de determinação da posição. Os conhecimentos astronômicos, aliás, foram essenciais não só para a expansão europeia sobre o globo, mas para todos os povos que praticaram a navegação com alguma competência. Os chineses, por exemplo, que conceberam frotas avançadíssimas de navios, antes dos europeus, tinham astronomia similarmente desenvolvida. Mas para o Ocidente, esse interesse só se reacendeu no fim da Idade Média.

Ao longo do tempo, vários instrumentos foram desenvolvidos para a observação do céu, atingindo seu ponto culminante por volta dos séculos 15 e 16, época das Grandes Navegações. Muitos desses instrumentos tiveram forte desenvolvimento entre os árabes, numa época em que a astronomia não era muito popular no mundo cristão. Ao final de seu desenvolvimento, três deles ganharam maior destaque e presença no arsenal do astrônomo.

[10] Disponível em: http://www.ciencias.seed.pr.gov.br/arquivos/File/sugestao_leitura/08astronomia.pdf. Acesso em 20 jul. 2023

Esfera Armilar

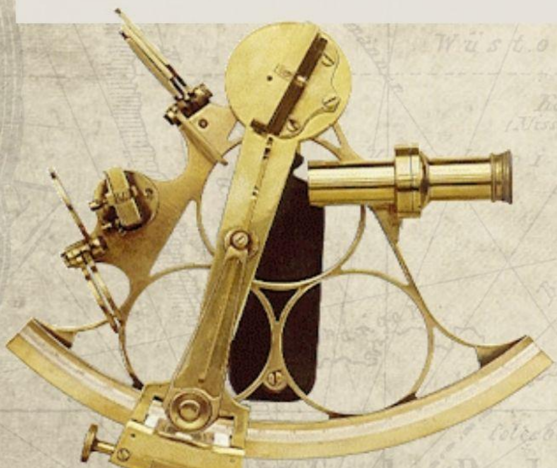
Sua aparência lembra a de um globo terrestre, mas, com grau muito maior de sofisticação. No centro do aparelho, um pequeno modelo da Terra. Ao seu redor, vários anéis representavam os grandes círculos de referência da esfera celeste – o equador celeste, a eclĩptica, o meridiano, o horizonte etc. Trata-se basicamente de uma forma geocêntrica de organizar o céu, e não é à toa que tenha se tornado tão popular entre os astrônomos ainda antes da publicação dos trabalhos de Copérnico – a realidade observacional, ou seja, a sensação que temos ao observar o céu, é geocêntrica.

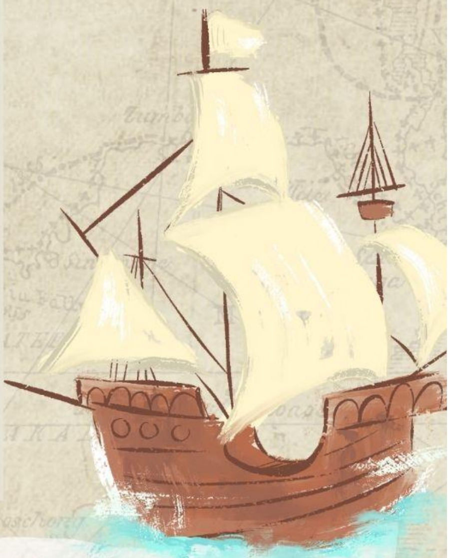
Astrolábio

Trata-se de um objeto que permite medir a posição dos astros e sua altura acima da linha do horizonte. É composto de dois ou mais círculos, que podem ser girados uns em relação aos outros.

Sextante

Era o mais prático dos três. Com a forma de um sexto de círculo (daí o seu nome), ele era utilizado principalmente para a navegação. Usando-o em observações astronômicas, era possível determinar a latitude de um dado lugar, ou seja, a coordenada vertical num globo ou mapa terrestre. Com esses instrumentos, a astronomia ganhava a sua principal utilidade da época (tirando o uso desses conhecimentos na elaboração de supersticiosas previsões astrológicas, que eram parte do fazer astronômico de então): prestar auxílio aos navegantes para determinar sua posição no mar, uma vez que outros pontos de referência desapareciam numa viagem transoceânica. Além de permitir uma navegação mais segura, esse tipo de informação ajudava a impressionar e dominar povos menos instruídos.





Os capitães de embarcações no passado costumavam ter razoáveis conhecimentos de astronomia e, muitas vezes, levavam a bordo um astrônomo para ajudá-los a mapear o curso.

É clássica a história em que Cristóvão Colombo, para conseguir a colaboração de silvícolas das Antilhas, ameaça apagar a luz da Lua, já sabendo que um eclipse lunar estava previsto para aquela noite. Os eclipses, como se sabe, muitas vezes evocam temores supersticiosos (astrólogos que o digam!), mesmo a quem já os viu com freqüência. E ver alguém que podia “comandá-los” (ou, na melhor das hipóteses, prevê-los) foi demais para os índios. Conforme o disco lunar começou a ser encoberto pela sombra projetada pela Terra, os nativos trataram de atender rapidamente a todas as demandas do explorador genovês.

Vale lembrar que, a despeito da ajuda celeste às navegações, esses empreendimentos guardavam uma enorme dose de risco, pois a partir dos astros, só se podia dizer com alguma precisão a latitude. Ninguém conseguia determinar a longitude – a coordenada horizontal, igualmente importante, porque informa, por exemplo, a distância entre um navio e a Europa na travessia do oceano Atlântico.

Latitude: num mapa, é designada pela posição num eixo vertical. Dada a esfericidade da Terra, ela é medida em graus, a partir da Linha do Equador (0°). A escala vai até 90° Norte ou 90° Sul.

Longitude: num mapa, é designada pela posição num eixo horizontal. Dada a esfericidade da Terra, ela é medida em graus, a partir do meridiano de Greenwich (0°). A escala vai até 180° Leste ou 180° Oeste (que se encontram no mesmo lugar e marcam a linha internacional de mudança de data).

Descobertas que permitiram determinar a longitude[11]

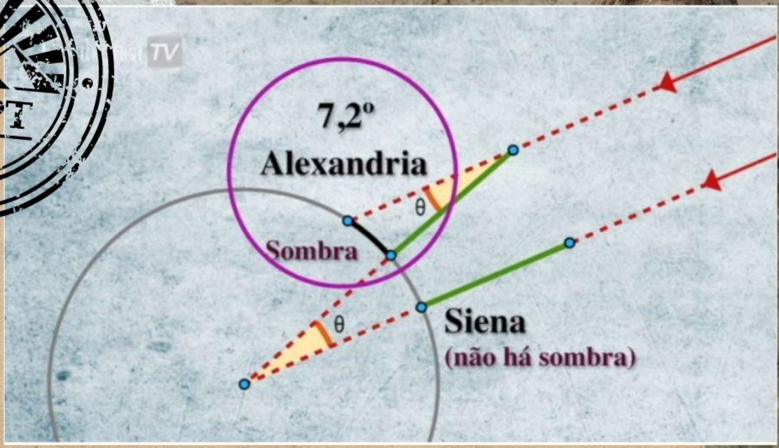
DESCOBERTAS QUE PERMITIRAM DETERMINAR A LONGITUDE

A tecnologia de determinação da longitude permaneceu como o maior desafio para os astrônomos durante séculos. Ao final, a solução não emergiu da astronomia, mas da construção de relógios. A longitude podia ser determinada com facilidade se um navegador pudesse confrontar a hora local em seu navio (medida por um relógio de Sol ou outro instrumento equivalente) no momento exato em que fosse meio-dia num ponto de referência cuja longitude fosse conhecida. Calcular a diferença de horário permitiria determinar quantos graus separavam o navio do ponto de referência. O problema era como levar ao navio um relógio sincronizado com o horário no ponto de referência com longitude conhecida – o balanço produzido pelas ondas e as dilatações de materiais ocasionadas pelas diferenças de temperatura inevitavelmente desregulavam o relógio, impedindo a obtenção de medidas precisas. O resultado era rotineiramente catastrófico – navios topavam sem aviso com terras que julgavam estar muito mais distantes, muitas vezes resultando na perda da embarcação e sua tripulação. Enquanto os astrônomos trabalhavam em soluções que envolveriam observações detalhadas da Lua ou mesmo dos satélites naturais de Júpiter (medições possivelmente refinadas demais para serem realizadas a bordo de um navio), a resposta partiu de um modesto construtor de relógios inglês, John Harrison (1693-1776), que conseguiu produzir modelos capazes de manter o sincronismo, mesmo depois de submetidos a grandes turbulências oceânicas a bordo de um navio. A despeito dessa grande vitória dos relógios terrestres sobre os relógios celestes, mesmo antes que Harrison tivesse sucesso, uma nova tecnologia entraria em cena na astronomia, proporcionando uma revolução no conhecimento que até hoje segue em andamento.

[11] Disponível em: http://www.ciencias.seed.pr.gov.br/arquivos/File/sugestao_leitura/08astronomia.pdf. Acesso em 20 jul. 2023

O cálculo de Eratóstenes[12]

[12] Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/arquivos/1102/geodetetive-1-guia.pdf. Acesso em: 20 de jul. 2023.

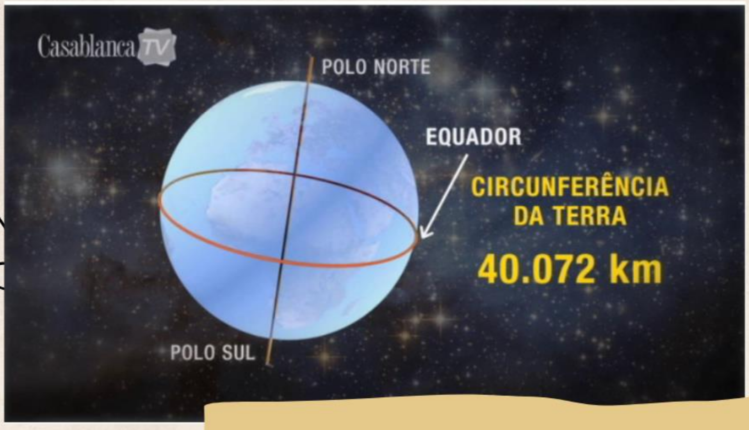


Considerando a linha da sombra da vareta como um segmento, temos um triângulo retângulo cujos catetos são a vareta e o segmento da sombra no chão. O ângulo que o raio de incidência do sol faz com a vareta é um dos ângulos do triângulo. Eratóstenes verificou que este ângulo correspondia a um cinquenta avos de uma volta completa, ou seja, media 7,20 .
Podemos representar o grande círculo determinado pelo meridiano que aproximadamente passa pelas duas cidades, e desenhar a incidência dos raios de sol ao meio-dia do dia em que Siena tem o sol a pino, como na ilustração acima.

Assumindo que os raios de sol incidem paralelamente, observamos que o ângulo formado pelos segmentos que partem do centro da Terra e terminam nas duas cidades é o mesmo que o determinado por Eratóstenes, pois são ângulos alternos internos.

Eratóstenes então concluiu que a medida da circunferência da Terra era, portanto cinquenta vezes a distância entre Alexandria e Siena (medida de um arco de circunferência).

A partir do conhecimento de que esta medida era cerca de 5000 estádios (medida de comprimento então usada), estimou a medida da circunferência como 250.000 estádios. Não há um consenso sobre a conversão de um estádio para metros. Alguns autores consideram um estádio igual a 157,2 metros. Assumindo este valor, a estimativa de Eratóstenes tem um erro de menos de dois por cento em relação a uma circunferência média da Terra, como considerada hoje em torno de 40.072 km.



DESAFIO:
calcule a circunferência e o raio da Terra.

2.1.2 Segunda etapa

Para esta etapa foi desenvolvida a atividade intitulada Localização em alto mar que buscou aplicar a Trigonometria nos cálculos de rotas com vistas a deslocamentos. Procuramos utilizar, além da diversidade de registros de representação semiótica, a contextualização por meio dos instrumentos e técnicas que eram utilizadas pelos navegadores para traçar as rotas marítimas. A presente atividade também visa mobilizar conhecimentos de outras áreas, tais como História, Astronomia e Geografia, conforme orientações aos professores apresentadas no Quadro 3.

Quadro 3 – Planejamento da segunda etapa

Localização em alto mar
Objetivo Geral: Estimar distâncias marítimas pelo método da triangulação.
Funções Pedagógicas: Complementar, restringir e aprofundar.
Conteúdo: Lei dos senos e cossenos
Carga Horária: 4 aulas
Habilidade da BNCC: (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
Feedback: Recomenda-se que o *feedback* seja realizado a partir de uma breve discussão sobre as atividades realizadas na aula anterior, instigando os alunos a comentar sobre como chegaram às suas conclusões, o que fizeram corretamente e o que poderiam ter feito diferente na execução das atividades.
Objetivos Específicos: • Contextualizar o uso da Trigonometria no cálculo de rotas com vistas a deslocamentos e discutir sua importância para o desenvolvimento dos sistemas de navegação atuais; • Compreender a funcionalidade da carta náutica, bem como incentivar o uso de instrumentos de medida e orientação, tais como régua, compasso, transferidor e bússola;

• Mobilizar representações em língua natural (multifuncional discursiva), figural (multifuncional não-discursivo), geométrica (multifuncional não-discursivo), algébrico (monofuncional discursivo) e numérica (monofuncional discursivo) para calcular a distância entre pontos inacessíveis utilizando o método da triangulação.
Materiais: Material do aluno Carta Náutica Régua Compasso Transferidor Dispositivo com acesso à internet
Orientações aos Docentes: Indica-se que esta atividade seja iniciada por meio de um texto introdutório sobre o cálculo de rotas com vistas a deslocamentos no nosso planeta e da importância do Sistema de Posição Global (GPS) e sensoriamento remoto através dos satélites (material do aluno). Diante disso, propomos que os alunos sejam questionados sobre como eram obtidas as orientações para navegações antes do desenvolvimento de tais tecnologias. Em seguida, recomenda-se que os alunos assistam aos vídeos 'Grandes navegações'[13], 'Aprendendo a Navegar - Carta náutica sem mistério 1'[14] do quais se tratam de como as navegações eram realizadas antigamente sem uso do GPS, para que os alunos observem quais instrumentos e técnicas eram utilizados pelos navegadores para traçar as rotas marítimas. Neste momento, poderá ser sugerido aos alunos que façam anotações das informações apresentadas no vídeo. Após isso, aconselha-se que os alunos se organizem em duplas para a leitura de um texto (material do aluno) com algumas instruções para a localização de três pontos na carta náutica (material do aluno). Estas representações desempenharão a função pedagógica de restringir. Em seguida, com o auxílio do texto e também das anotações a respeito do vídeo, os alunos poderão traçar a rota a ser seguida. Estas representações exercerão as

[13] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=vQPtbZwcVrU. Acesso em: 03 mar. 2023.
[14] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=JzTEWhJR36U&t=370s. Acesso em: 21 mar. 2023.

funções de restringir, complementar e aprofundar. A partir dessas representações e de conhecimentos básicos sobre Trigonometria, sugere-se que os alunos respondam ao desafio de calcular a distância entre os pontos de saída e chegada do navio proposto na atividade (material do aluno). Neste caso, as representações em forma de texto e a rota náutica desempenharão as funções pedagógicas de complementar e aprofundar.
Avaliação: A avaliação será realizada por meio de análise de conversões de representações entre registros de representação semiótica executados pelos alunos no procedimento de estimar a distância entre os pontos de saída e chegada do navio e no traçado da rota náutica.

Fonte: A própria autora.

O material do aluno referente à segunda etapa encontra-se nas páginas seguintes.

Localização em alto mar[15]

LOCALIZAÇÃO EM ALTO MAR

O problema da orientação para a navegação está relacionado de modo muito forte com a necessidade de medir distâncias de objetos inacessíveis. Isso acontece porque as rotas das navegações eram traçadas em função da orientação do navio em relação às estrelas que eram consideradas “fixas” e usadas como pontos de referência.

Estabelecer distâncias muito grandes, como entre a terra e a lua e o raio da terra, por exemplo, caracterizou-se um grande desafio para muitos estudiosos ao longo da história das civilizações, pois tratam-se de distâncias entre pontos que não estão acessíveis.

A trigonometria, que relaciona as medidas dos ângulos de um triângulo com as medidas dos seus lados, trouxe importantes contribuições para que o homem pudesse resolver cálculos envolvendo grandes distâncias. Não se sabe ao certo, a origem da trigonometria, mas pode-se dizer que seus conceitos fundamentais surgiram em função da necessidade de resolver problemas associados, principalmente, à Astronomia, aproximadamente no V a.C.

Na antiguidade, cálculos envolvendo grandes distâncias, como a medida da terra a lua, por exemplo, era realizado por triangulação, utilizando o diâmetro da terra como linha base. Hoje, sabe-se que esse tipo de cálculo, é feito através de radar. No período que envolveu as grandes navegações, como a chegada dos portugueses ao Brasil, pode-se dizer que a trigonometria teve um papel fundamental, fornecendo um suporte matemático para que os portugueses pudessem se lançar ao mar aberto. As questões ligadas à Astronomia eram de grande importância naquela época, pois a evolução do comércio entre povos distantes exigia o domínio de técnicas de navegação, e as rotas eram traçadas tendo como referência as estrelas.

[15] Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/livro_didatico/matematica.pdf. Acesso em: 03 de mar. 2023.

É a partir das relações entre as medidas dos ângulos e as medidas dos lados de um triângulo que foi possível realizar cálculos de rotas, com vistas a deslocamentos no nosso planeta.

No mundo de hoje, estas aplicações podem ser percebidas em nosso cotidiano. Por exemplo, quando um avião Boeing decola de Foz do Iguaçu com destino ao Canadá, são utilizados computadores para traçar a rota, calcular o tempo, a velocidade, as interferências climáticas, entre outras. No entanto, estes computadores fazem os cálculos através dos mesmos princípios trigonométricos, embora as novas tecnologias possibilitem cálculos mais precisos do que na época das navegações.

Hoje são utilizados como referências o Sistema de Posição Global (GPS) e o sensoriamento remoto através de satélites, e não mais as estrelas.

Como navegar usando a carta náutica[16]

COMO NAVEGAR USANDO A CARTA NÁUTICA

As Cartas náuticas retratam áreas de água em vez de áreas terrestres. Essas ferramentas de navegação essenciais retratam as características físicas dos oceanos, mares, rios, lagos e litoral. cartas náuticas também descrevem características subaquáticas, listam profundidades de água, mostram auxílios de navegação e fornecem muitos outros detalhes que ajudam a navegar no oceano com segurança.

Os navegantes contam com cartas náuticas para traçar a rota mais eficiente entre os portos e navegar por vias navegáveis sem preocupação com colisões. Cartas náuticas guiam os marítimos através de passagens traiçoeiras ou para ilhas remotas no oceano aberto. Como as cartas náuticas desempenham um papel crítico na navegação segura no mar, elas têm mais autoridade do que os mapas tradicionais. Enquanto os mapas mostram estradas e rotas predeterminadas, os gráficos de navegação permitem que Os navegantes mapeiem seu próprio curso através de qualquer hidrovia, mar ou oceano.

INSTRUÇÕES PARA TRAÇAR UMA VIAGEM MARÍTIMA

1. REÚNA SUAS FERRAMENTAS
Você só precisa de algumas ferramentas simples para plotagem de gráficos marinhos:
Régua paralela, Compasso, Lápis, Cronômetro. Usando a régua paralela, Compasso e lápis, você pode medir a direção e distância de cada perna do seu curso e marcá-la na carta náutica. O cronômetro será útil durante sua jornada para rastrear o quão longe você viajou e ajudá-lo a permanecer no curso.
2. TRACE SEU RUMO
Determine os pontos de partida (ETD) e chegada (ETA) de sua navegação e desenhe uma linha reta entre esses pontos usando sua régua. Rotas mais complicadas podem exigir várias quebradas de rota para chegar ao seu destino final. Escolha a rota que deseja percorrer com base nas condições e perigos da água e marque cada perna da viagem em linha reta usando a borda de sua régua paralela.

[16] Disponível em: https://suportelan.com.br/blog-post/como-navegar-usando-a-carta-nautica/. Acesso em: 22 de jul. 2023.

3. DIREÇÃO DE VIAGEM

Meça sua direção de viagem usando a régua paralelo e a rosa dos ventos em sua carta náutica. Alinhe a régua paralela com o rumo desejado da primeira etapa do seu rota e pressione um lado para baixo firmemente. Mova o outro lado da régua paralela até que sua borda externa encontre a pequena cruz no centro da rosa dos ventos.

A medição de grau na rosa-dos-ventos magnética é o seu rolamento para essa pernada.

Escreva a direção da viagem em graus magnéticos ao lado daquela pernada.

Repita este processo para cada etapa de sua jornada.

Se você não conseguir alcançar a rosa-dos-ventos com um único movimento, você pode andar com a régua paralela através de sua carta segurando um lado e movendo o outro. Como os dois lados da régua paralela sempre permanecem paralelos, o ângulo não mudará enquanto você mover apenas um lado de cada vez. Isso garante uma medição precisa da direção da viagem até mesmo nas maiores cartas náuticas.

4. MEDIR A DISTÂNCIA

Use o compasso para medir a distância de cada perna colocando uma ponta do compasso no início da perna e o outro ponto no final. Sem alterar a propagação do compasso, mova o compasso para a escala de latitude na borda da sua tabela náutica. Conte os graus de latitude entre os dois pontos do compasso para encontrar as milhas náuticas de cada pernada. Você também pode medir a distância usando o gráfico de distância na sua carta de navegação.

5. CALCULE SEU TEMPO DE VIAGEM

O passo final antes de sair na água é calcular o tempo necessário para completar cada etapa da viagem. Comece determinando a velocidade de cruzeiro que você planeja manter durante a viagem. Em seguida, você pode usar uma fórmula básica para calcular seu tempo de viagem para cada perna. Basta multiplicar a distância em milhas náuticas por 60 e em seguida, dividir esse número pela sua velocidade em nós. A resposta será o tempo em minutos que levará para completar essa perna. Por exemplo, se você viajar 2,5 milhas náuticas a uma velocidade de cruzeiro de 30 nós, levará cinco minutos para chegar ao seu destino.

A equação leria 2,5 NM X 60 / 30 NOS = 5 minutos.
2,5X60=150
150/30=5 minutos

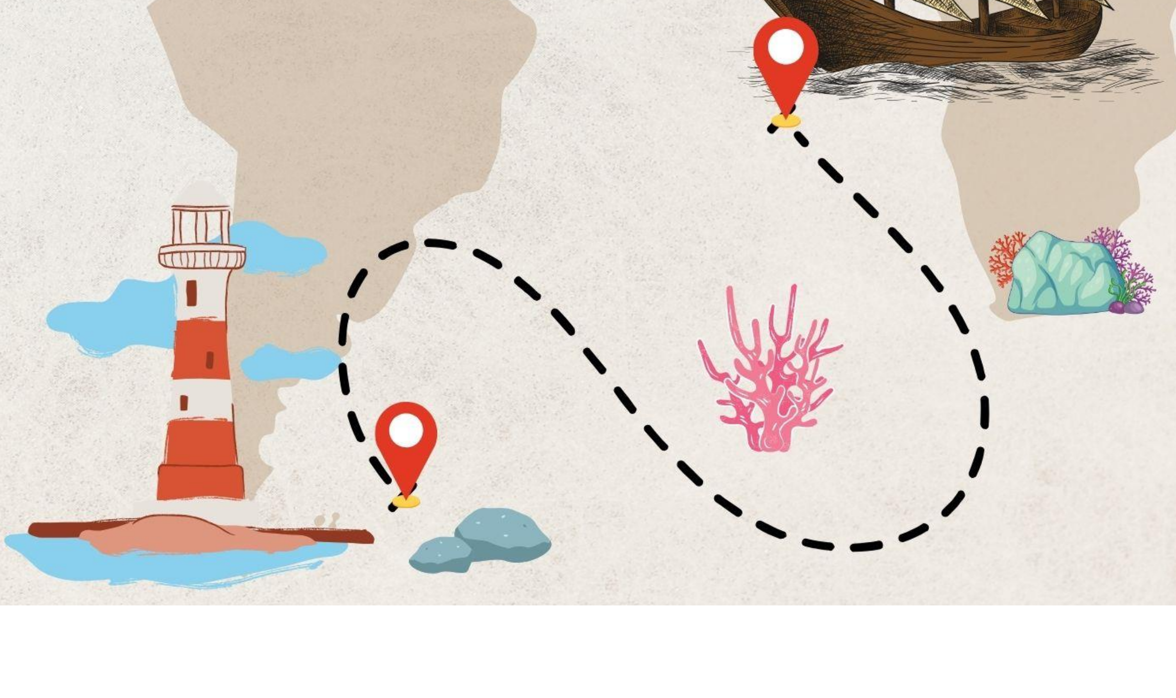
Use esta fórmula para calcular o tempo de viagem de cada perna e marcá-la em sua carta náutica.
Durante a viagem, você pode acompanhar o tempo decorrido usando seu cronômetro.
Se você mantiver uma velocidade de cruzeiro consistente e manter seu rumo, você pode navegar até o seu destino com sucesso.

Agora é a sua vez. Vamos tentar desvendar alguns dos mistérios da trigonometria?

DESAFIO

Imagine-se como comandante de um navio em alto mar, navegando constantemente na direção Norte, e encontra-se no ponto A, com coordenadas de latitude 23° 20' S e longitude 42° 3' O. Nesse contexto, avista duas outras embarcações, B e C, cujas coordenadas precisam ser determinadas. A sua preocupação imediata é calcular a distância entre o seu navio e essas embarcações para evitar possíveis colisões.

Como calcular essas distâncias?



2.1.3 Terceira etapa

Para esta etapa foi desenvolvida a atividade intitulada Como os navios são lançados ao mar? Com o objetivo de aplicar os conceitos das razões trigonométricas de um triângulo retângulo no estudo das rampas de acesso (planos inclinados) utilizadas no embarque e desembarque de navios.

Assim como na segunda etapa, nesta atividade também buscamos relacionar os conhecimentos de Trigonometria com outras áreas de Ensino, como por exemplo a História, tratando-se da aplicabilidade dessas rampas na construção de pirâmides e no estudo da rampa para barcos de Mirgissa, localizada na segunda catarata do rio Nilo, conforme orientações aos professores apresentadas no Quadro 5.

Quadro 4 – Planejamento da terceira etapa

Como os navios são lançados ao mar?
Objetivo Geral: Utilizar as razões trigonométricas no triângulo retângulo para estudar planos inclinados usados para o lançamento e recolhimento de embarcações
Funções Pedagógicas: Complementar, restringir e aprofundar.
Conteúdo: Razões trigonométricas no triângulo retângulo.
Carga Horária: 4 aulas.
Habilidades da BNCC: (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
***Feedback*:** Recomenda-se que o *feedback* seja realizado por meio da retomada de alguns aspectos da aula anterior e da solicitação aos alunos para que façam breves comentários sobre suas experiências obtidas a partir do trabalho desenvolvido em duplas.
Objetivos Específicos: • Contextualizar o uso da Trigonometria em planos inclinados utilizados para o lançamento e recolhimento de embarcações;

• Conhecer as normativas brasileiras que padronizam a construção de rampas e compreender sua importância para a acessibilidade; • Mobilizar registros de representação em língua natural (multifuncional discursivo), figural (multifuncional não-discursivo), geométrica (multifuncional não-discursivo) e numérica (monofuncional discursivo) para realizar cálculos que envolvam a construção de rampas para embarcações.
Materiais: Material do aluno Dispositivo com acesso à internet
Orientações aos Docentes: Recomenda-se que esta atividade seja iniciada por questionamentos aos alunos sobre a construção dos navios, para que exponham suas ideias sobre se estes são construídos dentro ou fora do mar e caso respondam que são construídos fora, poderão ser questionados sobre como os navios são lançados ao mar. Após isso, indica-se que seja apresentado por meio do vídeo 'Como os navios são lançados ao mar?'[17], como esse procedimento acontece. Neste momento, o professor poderá enfatizar o uso de rampas inclinadas para o deslizamento dos navios ao mar. Posteriormente, sugere-se a entrega de um texto (material do aluno) para contextualizar a importância das rampas no Antigo Egito, mais especificamente sua utilização na construção das pirâmides e a rampa para barcos de Mirgissa, localizada na segunda catarata do rio Nilo que além de evitar as corredeiras da região também servia como auxílio para deslizar embarcações que navegavam sobre o rio Nilo. Também poderão ser entregues aos alunos algumas informações retiradas de normativas brasileiras para a construção de estruturas de acesso, contendo textos, figuras e dimensões (material do aluno). Essas representações desempenharão as funções pedagógicas de restringir e complementar. Em posse dessas informações, os alunos poderão, então, realizar as mobilizações de representações em língua natural, figural, geométrica e numérica para resolver a problemática proposta (material do aluno) de utilizar relações trigonométricas no triângulo retângulo para calcular as dimensões de rampas construídas para

[17] Disponível em: https://youtube.com/shorts/77pUTq9KlOA?feature=share. Acesso em: 03 de mar. 2023.

embarcações de comprimentos diferentes. Neste caso, as representações exercerão as funções pedagógicas de aprofundar e complementar.
Avaliação: A avaliação será efetuada por meio de análise de conversões de representações entre registros de representação semiótica pelos alunos nos cálculos das rampas para embarcações.

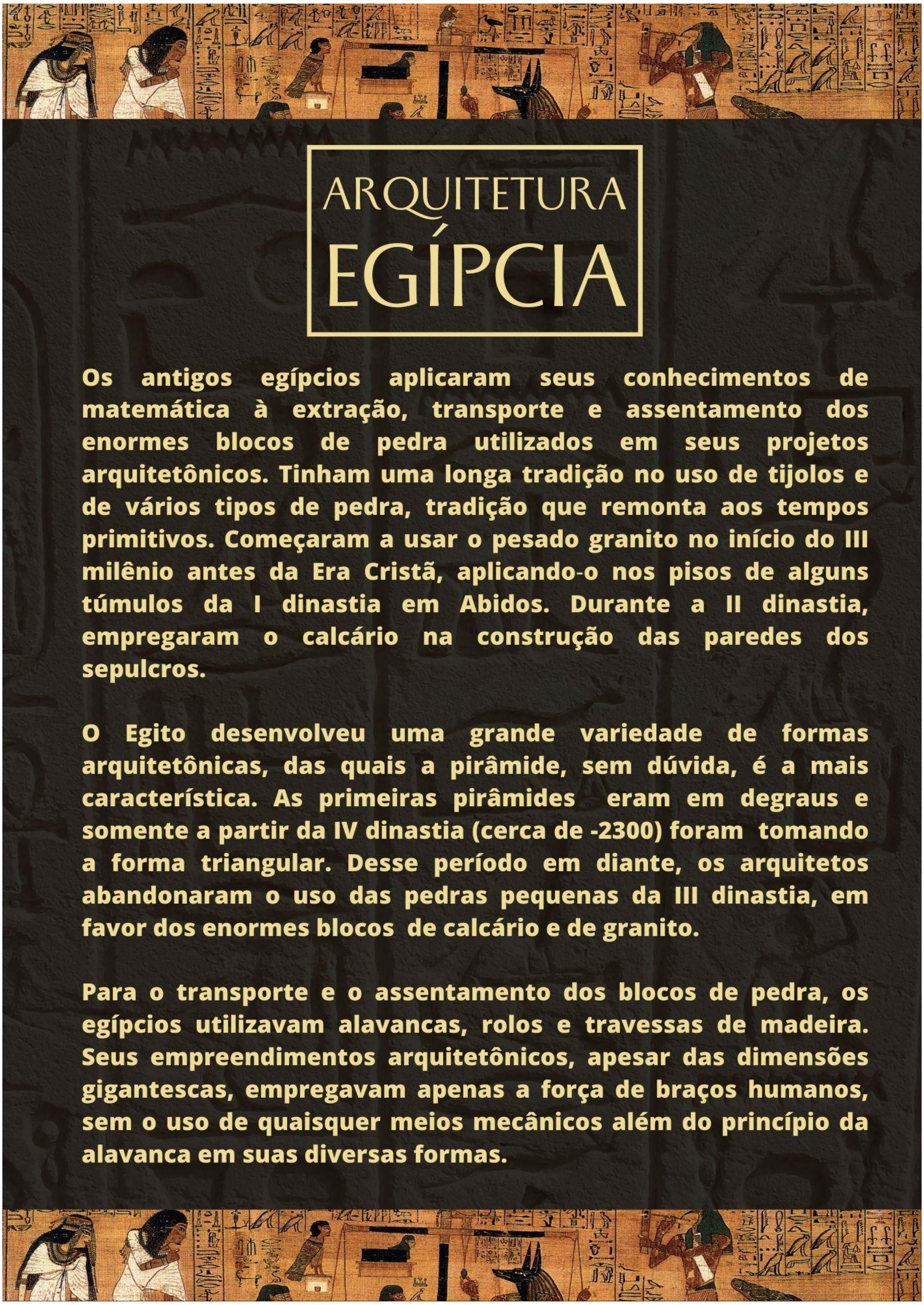
Fonte: A própria autora.

O material do aluno referente à terceira etapa encontra-se disponível nas páginas seguintes.

As rampas no antigo egito[18]

[18] Disponível em: https://oglobo.globo.com/brasil/egipcios-usaram-rampas-para-facilitar-construcao-de-piramides-diz-estudo-23215546. Acesso em: 21 jul. 2023.

Arquitetura egípcia[19]



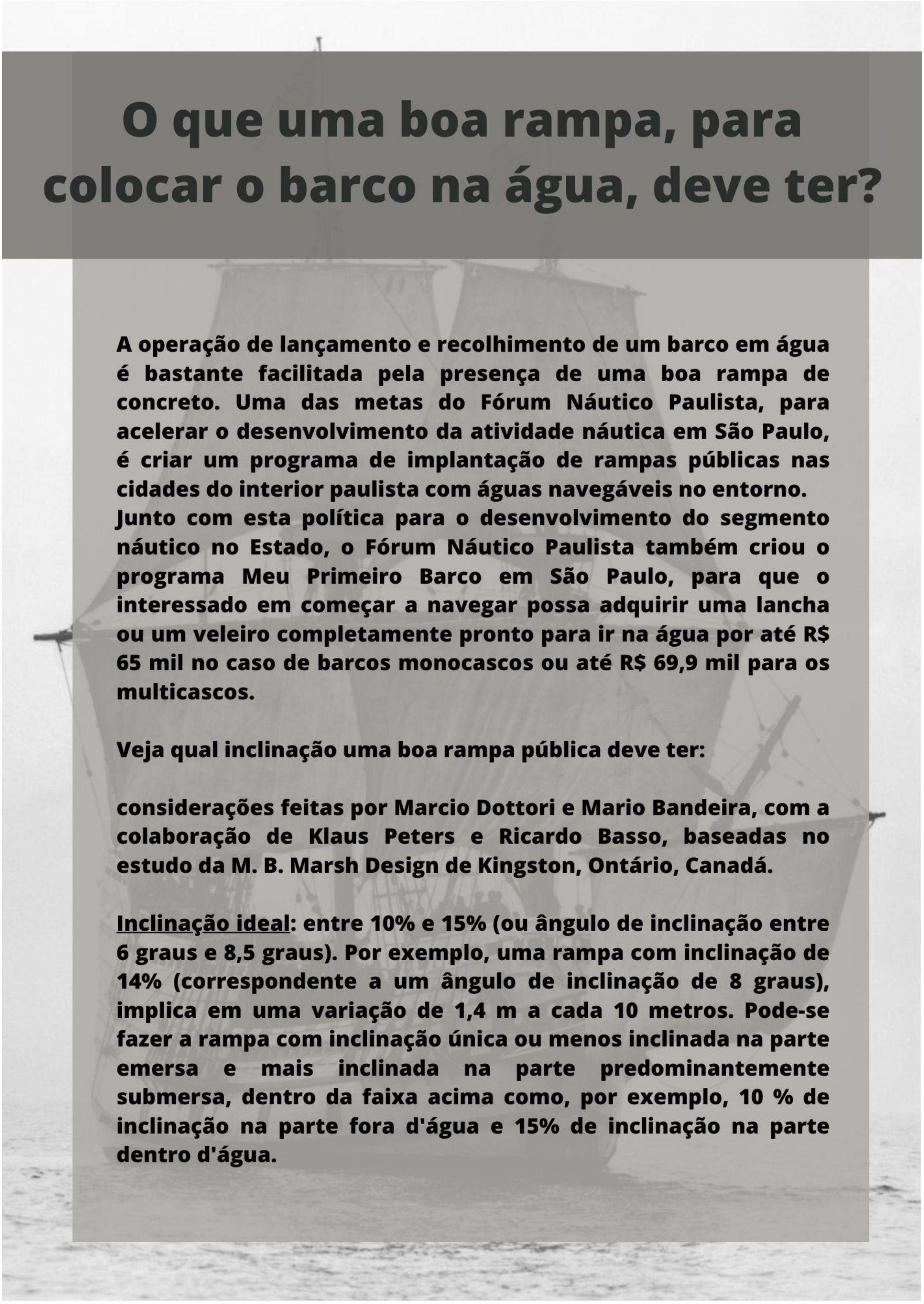
[19] Disponível em: http://www.historia.seed.pr.gov.br/arquivos/File/historia_africa/historia_africa_volume2.pdf. Acesso em: 03 mar. 2023.

O conhecimento técnico adquirido pelos egípcios na construção e na irrigação – advindo da escavação de canais e da construção de diques e barragens – manifestou-se ainda em outros campos relacionados à arquitetura. Por volta de -2550, tinham perícia suficiente para construir uma barragem de pedra talhada num uadi próximo ao Cairo. Pouco tempo depois, seus engenheiros abriam canais navegáveis nas rochas da Primeira Catarata, em Assuã. Pelo que tudo indica, por volta de -1740 conseguiram erigir uma barragem no próprio Nilo, em Semneh, na Núbia, para facilitar a navegação em direção ao sul.

E, finalmente, durante o mesmo período, construíram, paralelamente à Segunda Catarata, uma rampa sobre a qual faziam deslizar as embarcações com o auxílio do limo fluido do Nilo. A rampa, predecessora do diolkos do istmo de Corinto, tinha uma extensão de vários quilômetros e evitava que as corredeiras da Segunda Catarata viessem a constituir um obstáculo à navegação.

Mirgissa: Rampa para barcos. (Fotos Missão Arqueológica Francesa para o Sudão.)

O que uma boa rampa, para colocar o barco na água, deve ter?[20]



[20] Disponível em: http://forumnautico.com.br/wp-content/uploads/2021/12/CT-TN-RAMPAS-PUBLICAS_Consideracoes.doc.pdf. Acesso em: 21 de jul. 2023.

Tipos de barcos[21]

[21] Fonte: A própria autora.

Tipos de Barcos

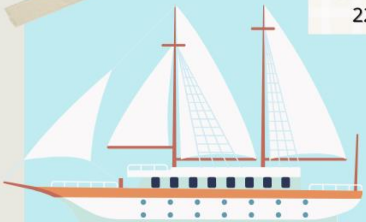
Comprimento:
4 metros

Bote

Comprimento:
4,5 metros

Caiaque

Comprimento:
22 metros



Escuna

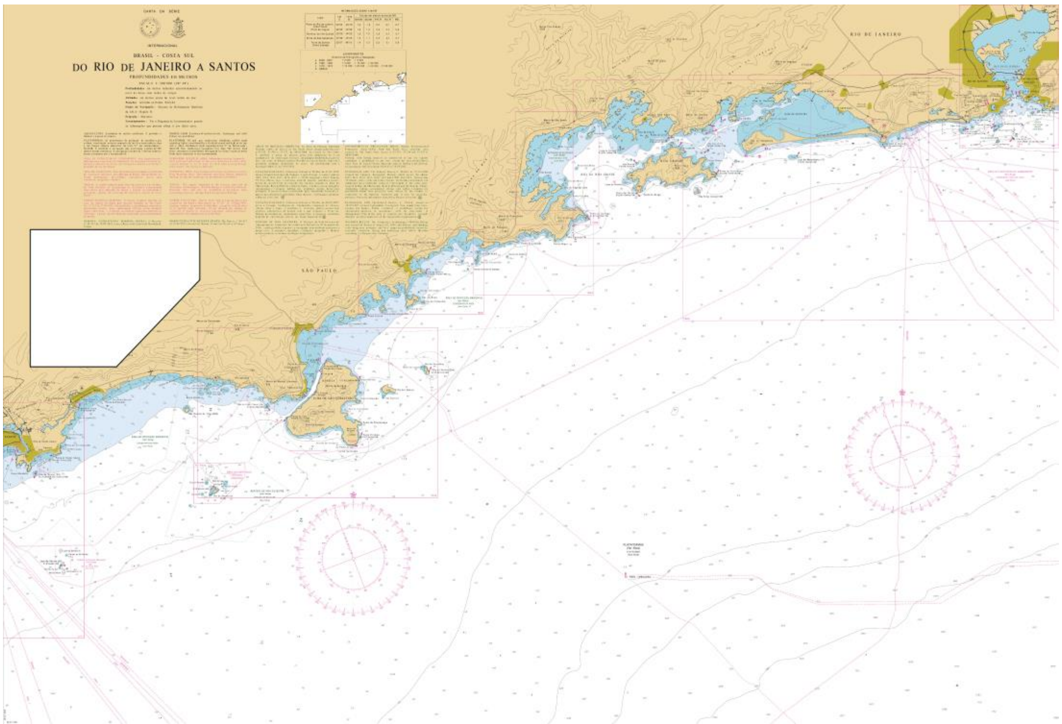
Comprimento:
5 metros

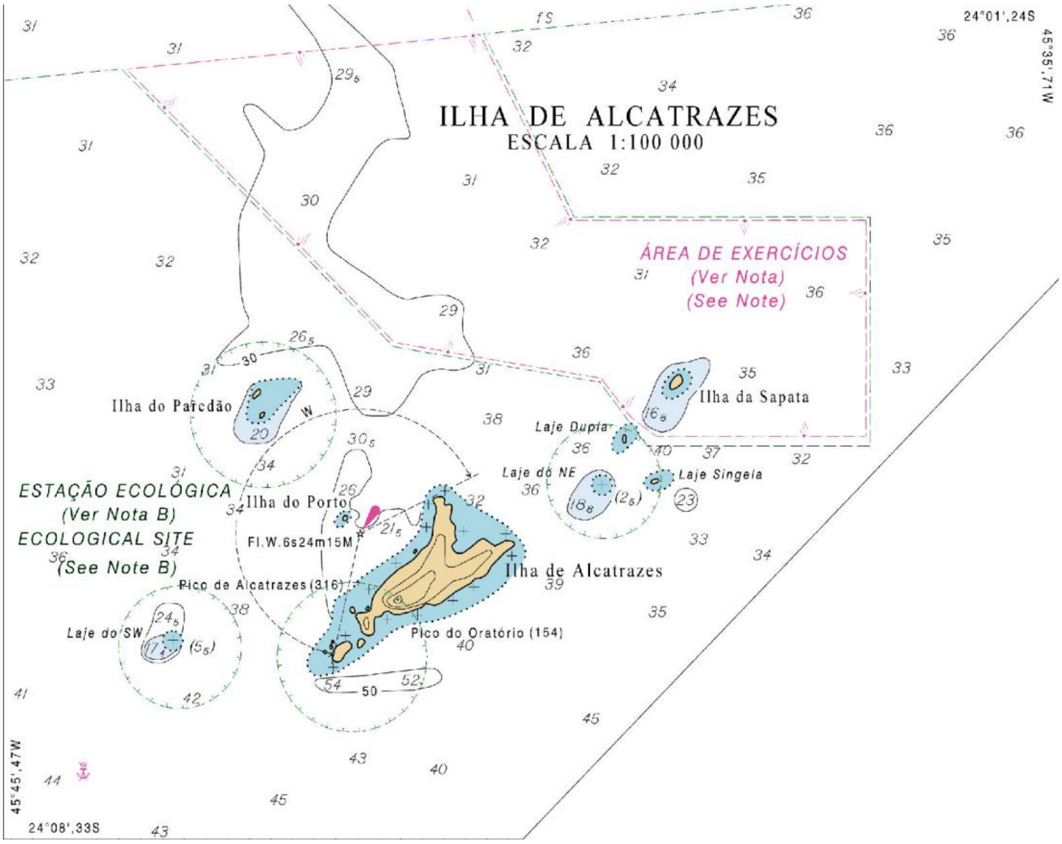
Canoa

DESAFIO

IMAGINE QUE VOCÊ É O ENGENHEIRO RESPONSÁVEL PELA CONSTRUÇÃO DE RAMPAS PARA O EMBARQUE E DESEMBARQUE DOS BARCOS CITADOS ACIMA. ESCOLHA UMA EMBARCAÇÃO E UTILIZE AS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS PARA CALCULAR O COMPRIMENTO, A ALTURA E O ÂNGULO DE INCLINAÇÃO DE SUA RAMPA.

Exemplos de carta náutica[22]





[22] Disponível em: https://www.marinha.mil.br/chm/dados-do-segnav/cartas-raster. Acesso em: 03 mar. 2023.

2.1.4 Quarta etapa

Para esta etapa foi desenvolvida a atividade intitulada Como estimar a distância Terra-Lua? na qual aborda o método utilizado por Aristarco de Samos para calcular a distância Terra-Lua utilizando o método de paralaxe estelar. Como conexão com outras áreas do conhecimento, discutimos a importância deste método na Astronomia enquanto suporte para medir a distância das estrelas com base no movimento orbital da Terra. Conforme orientações aos professores apresentadas no quadro 5 a seguir.

Quadro 5 – Planejamento da quarta etapa

Como estimar a distância Terra-Lua?
Objetivo Geral: Realizar o cálculo aproximado da distância Terra-Lua pelo método de paralaxe.
Funções Pedagógicas: Complementar, restringir e aprofundar.
Conteúdo: Razões trigonométricas no triângulo retângulo.
Carga Horária: 4 aulas.
Habilidades da BNCC: (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
***Feedback*:** Recomenda-se que o *feedback* seja realizado por meio da retomada de conceitos da atividade anterior e da devolutiva sobre o desempenho dos alunos em forma de comentários textuais.
Objetivos Específicos: • Contextualizar historicamente as contribuições da Trigonometria para a Astronomia como suporte para o cálculo da distância de astros relativamente próximos da Terra; • Conhecer o método de paralaxe e suas aplicações na Astrofísica; • Mobilizar registros de representação em língua natural (multifuncional discursivo), figural (multifuncional não-discursivo), geométrico (multifuncional não-discursivo), numérico (monofuncional discursivo),

algébrico (monofuncional discursivo) e tridimensional (multifuncional não-discursivo) para calcular a medida da distância Terra-Lua, bem como representar a escala real da distância entre esses astros.
Materiais: Material do Aluno Esferas em isopor de diâmetros diferentes Tinta guache Pincel Dispositivo com acesso à internet
Orientações aos Docentes: Recomenda-se que esta atividade seja iniciada pela contextualização histórica sobre como Aristarco de Samos utilizou conceitos de Trigonometria para calcular a distância Terra-Lua utilizando o método de paralaxe. Para isso, os alunos poderão assistir ao vídeo explicativo "Paralaxe: primeira ferramenta para medir distâncias"[23] que aborda a paralaxe estelar e sua importância na Astronomia enquanto suporte para medir a distância das estrelas com base no movimento orbital da Terra. Após isso, sugere-se que seja entregue um texto com uma experiência simples para a compreensão do conceito de paralaxe na prática (material do aluno). Esta representação desempenhará as funções pedagógicas de restringir e complementar. Posteriormente, indica-se que seja apresentado por meio do vídeo 'Como Aristarco mediu a distância entre a Terra e a Lua?'[24], texto e figuras (material do aluno) o passo a passo do método utilizado por Aristarco para calcular a medida da distância da Terra-Lua. Também poderão ser dadas algumas informações adicionais, tais como a medida do raio da Terra e o ângulo paralaxe da Lua (material do aluno). Neste momento, as representações exercerão as funções pedagógicas de restringir e complementar. Então, em posse dessas informações, poderá ser solicitado aos alunos para que calculem a medida da distância da Terra-Lua utilizando conceitos da Trigonometria. Em seguida, recomenda-se aos alunos a resolução da

[23] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=C0pvS7X5FQk. Acesso em: 03 de mar. 2023.
[24] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=cyjzdpAbPm4. Acesso em: 03 de mar. 2023.

problemática de, utilizando a representação tridimensional, representar a escala real da distância entre esses astros. Essas representações desempenharão as funções pedagógicas de complementar e aprofundar.
Avaliação: A avaliação será realizada por meio da análise da mobilização dos registros de representação semiótica produzidos pelos alunos no cálculo da medida da distância da Terra-Lua, assim como na representação tridimensional da real distância entre esses astros em escala.

Fonte: A própria autora.

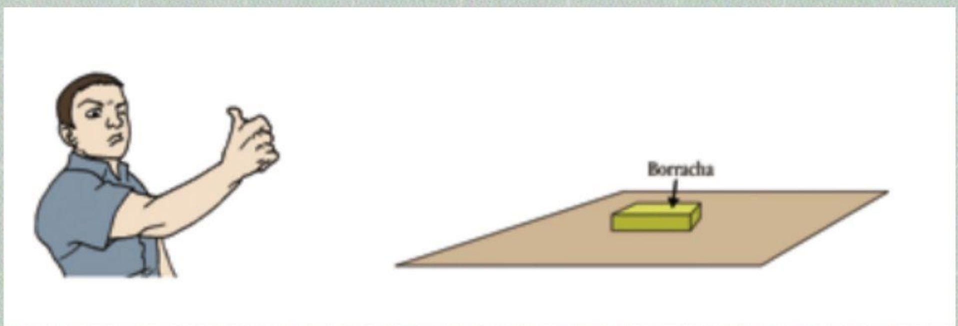
O material do aluno referente à quarta etapa encontra-se disponível nas páginas seguintes.

Paralaxe[25]

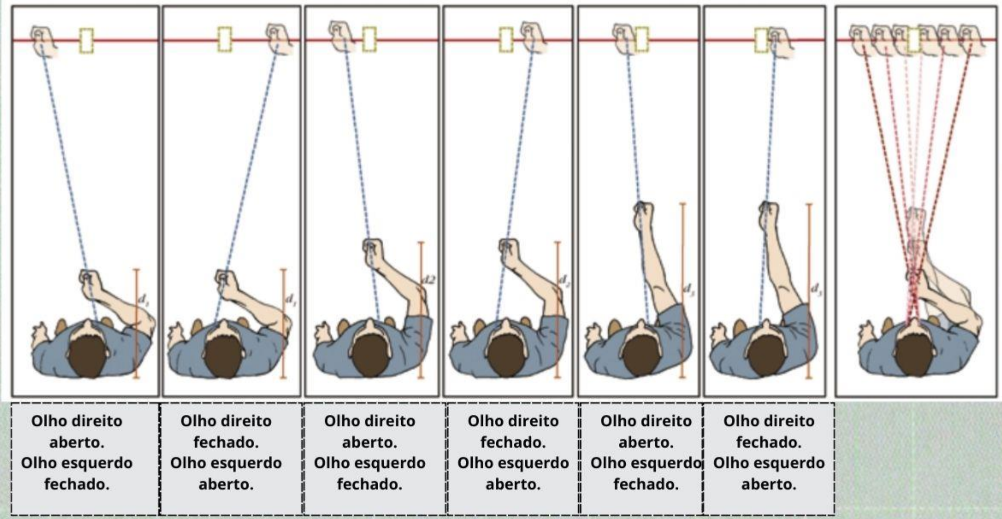
Paralaxe

Um dos métodos utilizados para localização e cálculo de distâncias astronômicas é a paralaxe. A criação da noção de paralaxe é atribuída a Apolônio.

Paralaxe é a mudança de posição aparente de um objeto em relação a um segundo ponto de referência mais distante, quando esse objeto é visto a partir de ângulos diferentes. Para você entender de modo mais simples, vamos fazer uma experiência? Levante a ponta do polegar e, com um olho fechado, alinhe a ponta do polegar entre o livro ou objetos sobre uma mesa. Agora, sem mudar de posição, olhe para ponta do polegar fechando o olho aberto e abrindo o outro olho. A ponta do polegar parecerá estar numa posição diferente em relação ao segundo plano. O fundo, porém, não parece sofrer esse “deslocamento”. O aparente movimento varia em função da distância entre a ponta do polegar e o olho. Quanto mais próximo, mais a ponta do polegar parecerá se mover. A metade do ângulo sob o qual é visto um objeto de dois pontos diferentes é chamada paralaxe desse objeto. Veja a figura a seguir.



[25] Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/livro_didatico/matematica.pdf. Acesso em: 03 de mar. 2023.



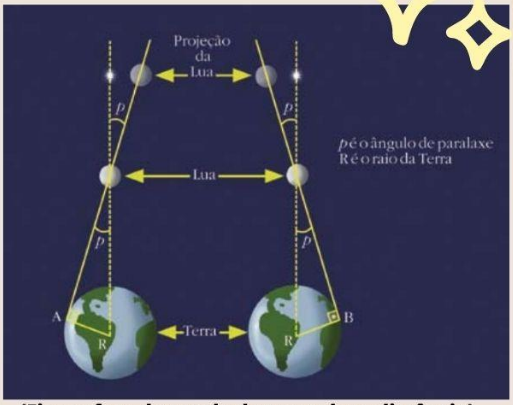
Os astrônomos utilizam o método de paralaxe para calcular a distância da Terra a um astro. Mas como esses objetos estão muito distantes, é necessário escolher uma linha de base muito grande para minimizar erros, como, por exemplo: para medir a distância da Lua ou dos planetas mais próximos, podemos utilizar o diâmetro da Terra como linha de base; e para medir a distância de estrelas próximas, podemos usar o diâmetro da órbita da Terra.

Mas por que minimizar erros?

Observe na figura anterior que à medida que o ponto de base vai se afastando, o ângulo fica cada vez menor. E, portanto, para distâncias muito grandes, este ângulo tende a ser muito pequeno e de difícil medição. Como a paralaxe depende da altura do astro e da distância à Terra, sua aplicação só tem interesse prático no caso de se observar o Sol ou a Lua, Vênus ou Marte; para outros, muito mais afastados, o seu valor é desprezível. Como é na prática a aplicação deste método? Como calcular a distância Terra-Lua? Conhecidos o raio da Terra, podemos calcular a distância entre dois observadores situados em latitudes e longitudes dadas; basta, então, a determinação da paralaxe da Lua para obter a distância entre a Terra e a Lua.

Os astrônomos utilizam o método de paralaxe para calcular a distância da Na prática, podemos nos basear na comparação de observações da Lua com uma estrela que esteja próxima a ela num determinado instante. Dois observadores em pontos extremos da Terra (A e B) vêem a Lua em posições diferentes em relação a estrela.

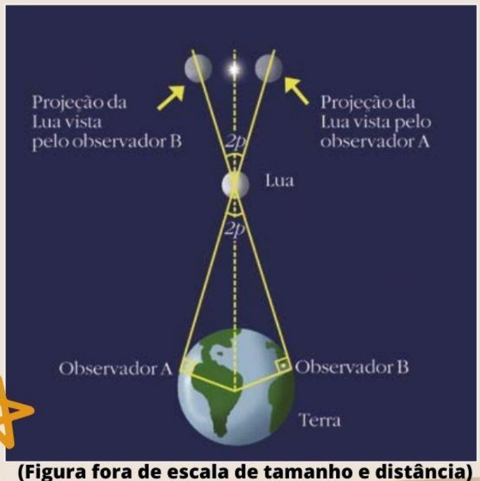
Veja a figura abaixo:



(Figura fora de escala de tamanho e distância)

O observador A vê a Lua numa posição aparentemente diferente da posição vista pelo observador B.
Cada observador tem uma visão ligeiramente diferente do céu. Esta situação pode ser representada na figura a seguir, quando é projetada a posição da Lua com relação a estrela, vistas dos pontos extremos da terra (A e B).

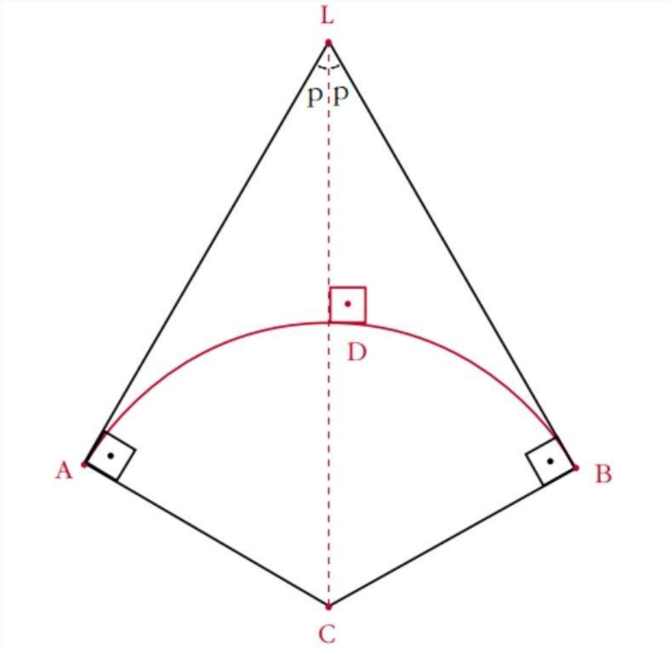
Os dois observadores ao fotografarem a Lua nas suas posições, obterão uma medida de ângulo p, que é o ângulo formado na estrela entre o observador e a Terra. Ao compararem suas fotos com um bom atlas celeste, poderão obter a medida do ângulo 2p, conforme indica a figura anterior.



(Figura fora de escala de tamanho e distância)

Agora, utilizando as relações trigonométricas no triângulo retângulo, é fácil ver que o seno de p (um valor conhecido) será igual ao raio da Terra (também conhecido) dividido pela distância do centro da Terra até a Lua (a incógnita).

Veja a figura



Conforme a figura podemos observar que:
-o raio da terra AC é o cateto oposto a p
-AL ou BL é a distância do observador A ou B até Lua
-CD = AC é o raio da terra
-CL é a distância do centro da Terra até a Lua

Lembrando que

$$sen\ p = \frac{cateto\ oposto\ a\ p}{hipotenusa}$$

teremos:

$$\text{sen p} = \frac{AC}{CL} \quad \text{ou sen p} = \frac{raio\ Terra}{distância\ do\ centro\ da\ Terra\ a\ Lua}$$

$$\text{Distância da Terra a Lua} = \frac{raio\ Terra}{sen\ p}$$

Para calcularmos a distância de um determinado ponto da Terra, ortogonal à posição da Lua (ponto D), teremos que subtrair o segmento CD, ou seja o raio da Terra.

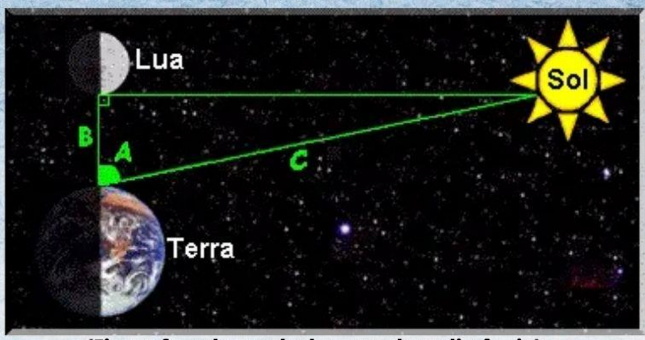
DESAFIO: CALCULE A DISTÂNCIA TERRA-LUA.

Dados importantes:
Raio da Terra = 6371 km
Ângulo de paralaxe ≈ 0,95°

Aristarco de Samos e a distância Terra-Lua[26]

Aristarco de Samos e a distância Terra-Sol

Aristarco de Samos acreditava que a Terra se movia em volta do Sol e estudava um modo de medir a distância do Sol e o tamanho da Lua. Na mesma época de Eratóstenes, Aristaco (310-230 AEC) usou uma geometria elegante e de extrema simplicidade para medir a distância Terra-Sol, já conhecendo a distância da Terra à Lua. O que nos leva a imaginar o quanto da sabedoria antiga se perdeu ao longo da história. Repare como é simples. Aristarco sabia que quando a Lua exibia um quarto iluminada (crescente ou minguante) era possível desenhar o triângulo retângulo da figura abaixo.



(Figura fora de escala de tamanho e distância)

Trigonometria elementar para calcular a distância da Terra ao Sol:

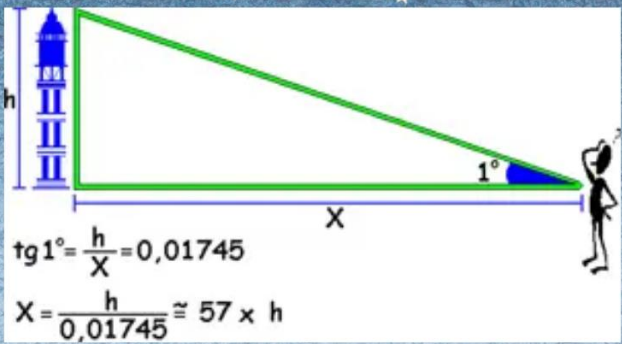
cos A = B ÷ C logo C = B ÷ cos A.

A distância B corresponde a que existe entre a Terra e a Lua, o ângulo A corresponde à separação angular entre a Lua e o Sol, visto por um observador na Terra. Então, para calcular a distância C, basta lembrar que ela é B dividida pelo cosseno do ângulo A; pois o cosseno de um ângulo é a medida do cateto adjacente a esse ângulo, no caso B, dividido pela hipotenusa do triângulo retângulo C. É claro que tamanha simplificação traz limitações ao resultado. Porém, o maior desafio aqui é saber o instante exato da Lua em quarto crescente ou minguante, para que o ângulo A reflita um resultado pelo menos aproximado. Além disso, como precisamos de valores trigonométricos, boas tábuas tinham de ter sido elaboradas antes. Vale lembrar que, naquela época, a constante pi (3,14159...) era calculada como 22 ÷ 7.

[26] Disponível em: https://www.zenite.nu/aristarco-de-samos-e-a-distancia-terra-sol. Acesso em: 23 de jul. 2023.

Qual o Tamanho da Lua?

Todas as vezes que vemos um objeto sob um ângulo de 1 grau é porque ele está, necessariamente, afastado de nós 57 vezes o seu tamanho. Como sabemos disso? É fácil. Basta recordar o conceito de tangente e verificar que a tangente de 1° (um grau) vale aproximadamente 0,01745.



Podemos continuar o raciocínio e verificar que se observarmos um astro sob um ângulo de 30 minutos de arco (meio grau), ele estará afastado cerca de 115 vezes o seu diâmetro. Acontece que vemos a Lua Cheia sob um ângulo médio de 31 minutos de arco, o que nos diz que ela esta distante de nós cerca de 115 vezes o seu diâmetro. Se você já conhece a distância da Terra à Lua, agora também já pode saber o seu diâmetro. Daí também não será difícil calcular o volume, a área da superfície...

3 SUGESTÕES DE LEITURA

Como apoio, sugerimos aos interessados a leitura dos seguintes textos:

- Artigo “A Geometria e as Distâncias Astronômicas na Grécia Antiga”[27] de Geraldo Ávila (Ávila, 1982);
- Artigo “O método da paralaxe”[28] de José Roberto Costa (Costa, 2023);
- Livro “Astronomia”[29] da coleção Explorando o Ensino (Nogueira, 2009);
- O capítulo de livro “VENHA NAVEGAR POR OUTROS MARES!”[30] de Neusa Idick Scherpinski Mucelin (Mucelin, 2007);
- O capítulo “O legado do Egito faraônico”[31] da coleção História Geral da África da UNESCO (UNESCO, 2010).

[27] Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/1/3.htm. Acesso em: 20 de jul. 2023
[28] Disponível em: O método da paralaxe - Astronomia no Zênite (zenite.nu). Acesso em: 22 de jul. 2023.
[29] Disponível em: http://www.ciencias.seed.pr.gov.br/arquivos/File/sugestao_leitura/08astronomia.pdf. Acesso em: 20 de jul. 2023.
[30] Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/livro_didatico/matematica.pdf. Acesso em: 03 de mar. 2023.
[31] Disponível em: http://www.historia.seed.pr.gov.br/arquivos/File/historia_africa/historia_africa_volume2.pdf. Acesso em 22 de jul. de 2023.

4 RELATO DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Esta SA foi aplicada a uma turma de 20 alunos do 2º ano do Ensino Médio de um colégio particular localizado no norte do Paraná, sendo que destes apenas 12 participaram da pesquisa, conforme detalhado em seção própria da dissertação. Ressaltamos que neste colégio as aulas de Matemática não eram geminadas, portanto as atividades precisaram ser fragmentadas, o que dificultou um pouco a aplicação das etapas mais longas do produto.

O início da aplicação se deu em 20/10/23, sendo utilizadas duas aulas. Na primeira aula fizemos a leitura do primeiro texto proposto pelo material do aluno para apresentar o assunto. Em seguida, conversamos sobre a Trigonometria e sua criação para atender problemas relacionados à Astronomia. Observamos que os alunos participaram da leitura do texto espontâneamente.

Após a leitura do texto inicial, assistimos ao vídeo ‘Quer que desenhe?’ que abordou o cálculo realizado por Eratóstenes. Foi necessário pausar o vídeo em alguns momentos para fazer a retomada de alguns conceitos como ângulos alternos internos, solstício de verão, movimento de translação e circunferência. Ao final do vídeo, refletimos sobre a importância dos estudos de Eratóstenes.

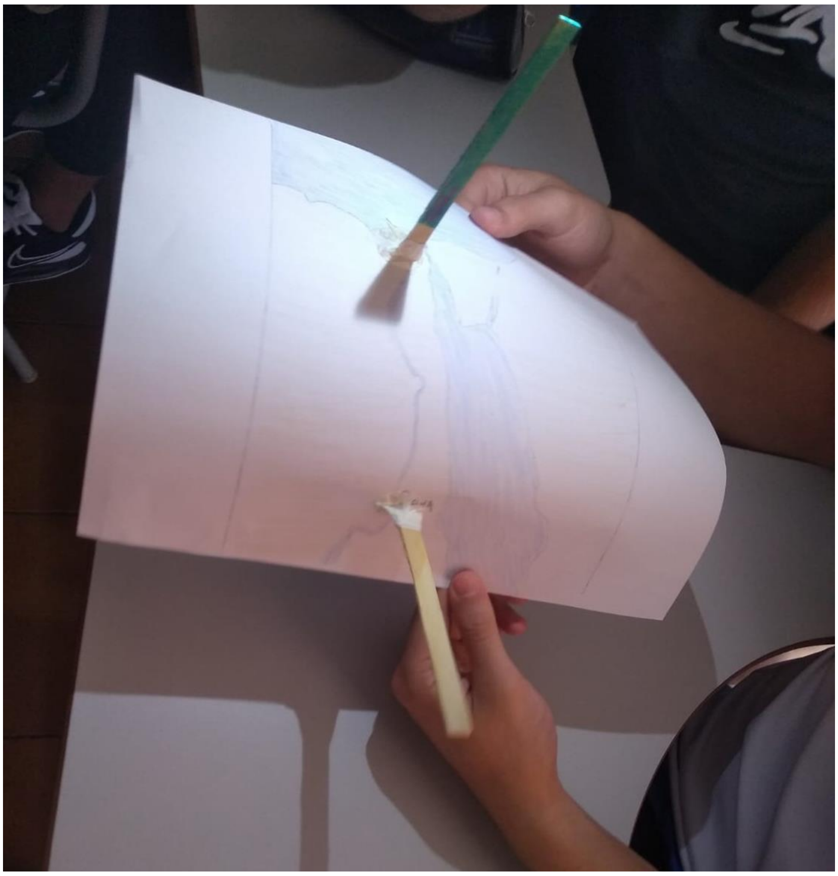
Na segunda aula, retomamos a ideia de Eratóstenes a partir da leitura dos textos fornecidos pelo material do aluno. A turma realizou perguntas sobre a medida ‘estádio’ utilizada nos cálculos de Eratóstenes, então foi necessário explicar que segundo alguns historiadores 1 estádio equivale a 185 metros, equivalente a 1/8 de milha romana, isto é, 5.000 pés romanos.

Logo depois, foi solicitado que os alunos reproduzissem em uma folha sulfite o que haviam compreendido a respeito do experimento de Eratóstenes, como uma preparação para a próxima atividade.

No dia seguinte, foi realizada a retomada oral das atividades feitas no dia anterior. Os alunos foram levados ao laboratório de informática e solicitado para que esboçassem pelo Geogebra o que haviam aprendido na aula anterior a respeito do experimento de Eratóstenes. Como os alunos já haviam tido contato com o software nas aulas de Matemática, não achamos necessário dedicar uma aula para ambientação, no entanto, foi necessário auxiliar os alunos em alguns momentos.

Iniciamos a primeira aula do terceiro dia de aplicação realizando a retomada das atividades anteriores e assistindo ao vídeo de Carl Sagan. Os alunos gostaram do experimento utilizado para comprovar o formato circular do planeta Terra. Após isso, em duplas, os alunos reproduziram o experimento com folha sulfite e palitos de madeira. Com o auxílio do flash do celular, os alunos conseguiram perceber a diferença entre as sombras para uma Terra plana e circular.

Figura 2 – Experimento de Carl Sagan



Fonte: Dados da pesquisa.

Na segunda aula, novamente em duplas, foi solicitado que calculassem a circunferência do planeta Terra. Após determinada a medida da circunferência da Terra, foi solicitado que calculassem o raio do planeta. Neste momento, um dos alunos explanou que poderia calcular pela fórmula da circunferência e os demais alunos concordaram, já citando os elementos da expressão $C = 2\pi R$ que havia sido estudado no bimestre anterior.

Em 26/10/23 iniciamos a aplicação da segunda etapa da SA por meio do feedback. Em seguida, os alunos foram questionados sobre como os navegantes se localizavam em alto mar antigamente e alguns alunos responderam que utilizavam bússolas e estrelas como pontos de referência. Em seguida, realizamos a leitura do texto ‘Localização em alto mar’ e discutimos a importância da Trigonometria para as grandes navegações.

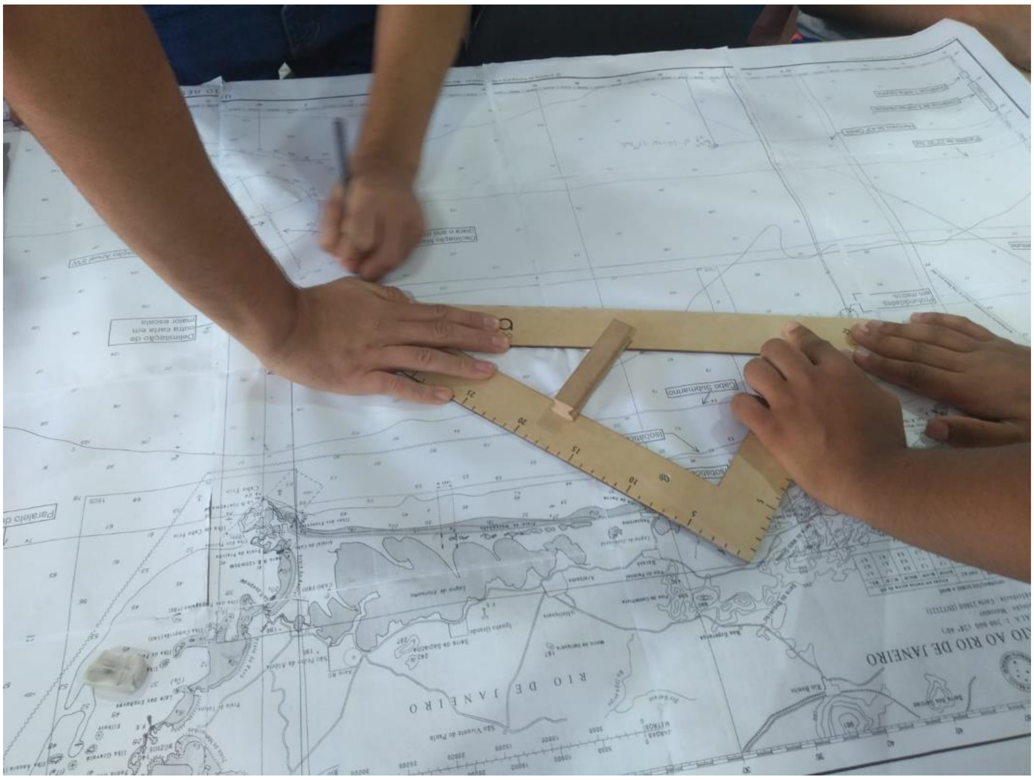
Durante a conversa, os alunos refletiram sobre a presença das tecnologias atuais que facilitam o processo de localização em alto mar, tais como GPS e sensoriamento remoto por satélites. Após isso, assistimos ao vídeo sobre as grandes navegações, onde os alunos puderam compreender um pouco sobre o seu processo histórico.

No dia seguinte, iniciamos a aula retomando as atividades do dia anterior, conversamos novamente sobre os instrumentos usados na navegação e como alguns alunos gostavam de pescaria, afirmaram que já haviam ouvido falar da carta náutica. Neste momento, foi apresentada a carta náutica para a turma, falando sua função e seus principais elementos.

Posterior a isso, os alunos assistiram aos vídeos ‘Aprendendo a navegar – carta náutica sem mistério 1’ e ‘Aprendendo a navegar – carta náutica sem mistério 2’ que mostrou como se localizar e medir distâncias usando a carta náutica. Junto a isso, foi solicitado que os alunos fizessem anotações sobre as informações dos vídeos, pois seriam utilizadas na próxima aula.

Na aula seguinte, como essa atividade era mais complexa, os alunos foram convidados a formarem quartetos para responder ao desafio de localizarem uma embarcação na carta náutica a partir de coordenadas fornecidas no material do aluno. Durante o processo, foi necessário o auxílio da professora e também o uso de réguas de kit geométrico para o professor, pois os alunos tinham dificuldade em utilizar as réguas convencionais.

Figura 3 – Traçado de coordenadas na carta náutica



Fonte: Dados da pesquisa.

Em seguida, os alunos foram desafiados a plotarem outras duas coordenadas de embarcações em suas cartas náuticas. Então, precisariam calcular as distâncias entre essas três embarcações utilizando as milhas náuticas. Para isso, os alunos desenharam triângulos, método conhecido como Triangulação, e relembraram alguns conceitos de submúltimos do grau.

No dia seguinte, foram retomadas as atividades feitas no dia anterior e também conversamos sobre algumas dificuldades encontradas pelos alunos na execussão das tarefas. Logo após, foram devolvidas as cartas náuticas para os grupos da aula anterior e desafiamos os alunos a conferirem, por meio da Trigonometria, se a distância entre suas embarcações estavam corretas.

Os grupos imediatamente começaram a medir os ângulos e lados do triângulo desenhado na carta náutica. Alguns alunos apresentaram dúvidas sobre como manusear o transferidor, sendo necessário auxiliá-los. Ao final de seus cálculos, solicitei que apresentassem uma conclusão sobre o resultado obtido.

Cabe ressaltar que nessa etapa da SA, tivemos que realizar algumas adaptações com a carta náutica, criamos um arquivo com 16 páginas que podem ser impressas em folha sulfite e coladas, não indicamos o uso de uma carta náutica menor, pois dificulta o processo de localização das coordenadas para latitude e longitude.

Em 07/11/23 iniciamos a aplicação da terceira etapa da SA. Na primeira aula realizamos o feedback, os alunos comentaram sobre a presença da Trigonometria nas rampas de acesso para cadeirantes e nas rampas para barcos. Neste momento, a turma foi questionada sobre como eles achavam que os barcos eram construídos e responderal que eram construídos de madeira e fora da água. Então, foram questionados sobre como os barcos eram colocados no mar e um dos alunos respondeu que eram lançados por uma espécie de cilindro.

Após isso, os alunos assistiram ao vídeo que mostrava sobre o processo de lançamento dos navios ao mar proposto na SA. Durante o vídeo, a turma comentou sobre como faziam para colocar o jetski no rio por meio de um declive. Em seguida realizamos a leitura coletiva dos textos sobre a presença das rampas no antigo egito, em especial na construção da pirâmide de Queóps e a rampa para barcos em Mirgissa. Por fim, realizamos a leitura da normativa para a construção de rampas ideais.

Na segunda aula, fizemos uma retomada das leituras da aula anterior e conversamos sobre as inclinações ideais para a construção de uma rampa para barcos segundo a normativa. Diante disso, os alunos foram desafiados a calcularem as medidas de altura e comprimento de rampas para as embarcações indicadas no material do aluno. Sendo necessário reforçar que deveriam respeitar a normativa e também que na rampa deveria caber exatamente o comprimento da embarcação escolhida.

Durante a resolução da atividade foi fundamental o uso da calculadora ou de uma tábua trigonométrica para possibilitar acesso a valores de seno, cosseno e tangente de ângulos.

Em 21/11/23 iniciamos a aplicação da última etapa da SA pelo feedback e retomando a importância dos cálculos de Eratóstenes. Em seguida, foi abordado o método de paralaxe para calcular as medidas inacessíveis e seu uso na época das grandes navegações por meio de vídeo ‘Paralaxe: primeira ferramenta para medir distâncias’ e texto disponível no material do aluno.

Também foi realizado o experimento para visualização de posições aparentes de diferentes objetos presentes na sala de aula. Logo após, fizemos a leitura coletiva do texto que demonstrava o cálculo de Aristarco de Samos sobre a distância Terra-Lua por paralaxe. Nesse momento, percebemos que alguns alunos apresentavam algumas dificuldades na compreensão das figuras presentes no texto, então foi necessário retomar alguns conceitos importantes, como a formação do ângulo reto entre uma reta tangente à circunferência e seu raio.

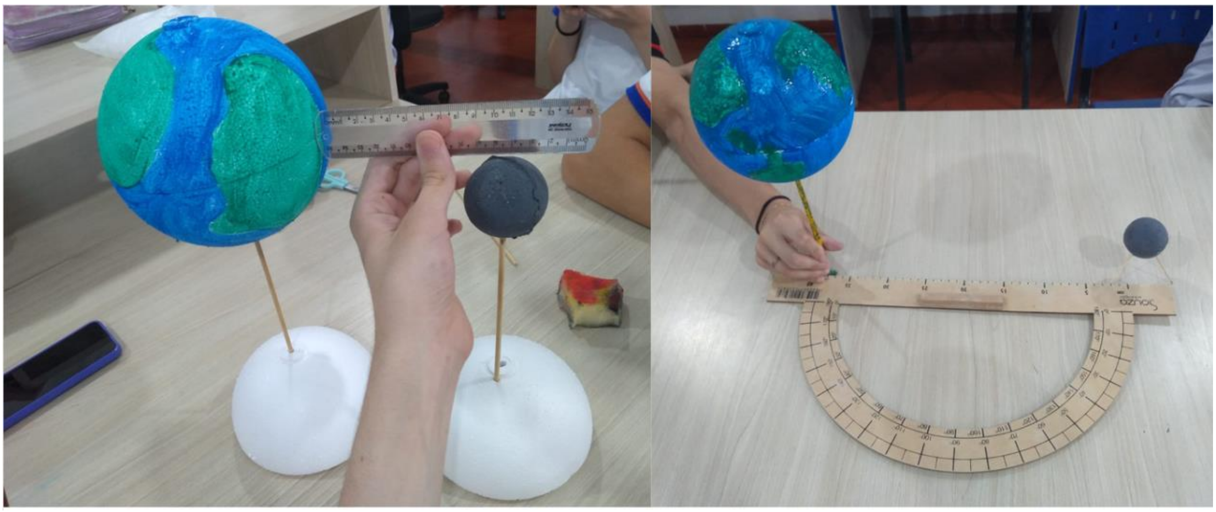
Na segunda aula, após a retomada das atividades da aula anterior, foi proposto o primeiro desafio aos alunos de calcular a distância Terra-Lua que foi realizado em grupos de quatro integrantes.

No dia seguinte, o colégio estava participando de um evento de iniciação científica em uma instituição superior, então ficamos responsáveis pela turma de 2º ano por três aulas seguidas. Iniciamos a aula retomando a atividade anterior e relembrando os cálculos feitos por Aristarco. Em seguida, os alunos assistiram ao segundo vídeo proposto pela SA, do qual tratava de uma perspectiva da paralaxe por semelhança de triângulos e utilizava o diâmetro da Lua para calcular a distância Terra-Lua.

Como o conteúdo de semelhança de triângulos já havia sido trabalhado anteriormente nas aulas de Matemática, não foi necessário intervir com explicações complementares. Após isso, pedimos aos alunos para que recordassem algumas informações importantes que haviam sido apresentadas no vídeo e fomos anotando-as no quadro, dentre elas as que mais se destacaram foram a distância Terra-Lua e o diâmetro da Lua.

Então foi proposto um novo desafio aos grupos da aula anterior, representar em escala real a distância Terra-Lua utilizando bolas de isopor. Neste momento os alunos foram levados para o laboratório de robótica por dispor de maior espaço. Em posse dos materiais, cada grupo começou a customizar seu planeta Terra e sua Lua, de modo que alguns alunos começaram a tomar como base o mapa mundi para desenhar os continentes da Terra.

Figura 4 – Desenvolvimento da escala Terra-Lua



Fonte: Dados da pesquisa.

Em seguida, os grupos começaram a criar suas escalas, onde foi necessário interferir em alguns momentos para retomar conceitos como escala de mapas, conversão de medidas para quilômetros, metros e centímetros. Após criadas as escalas, os grupos passaram a representá-las utilizando réguas ou até mesmo o corpo humano finalizando as atividades da SA.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o objetivo de despertar o interesse dos alunos pelo conteúdo de Trigonometria, foram adotadas várias estratégias na elaboração desta sequência de atividades, abordando diferentes enfoques para motivá-los a aprender e buscar conhecimento. Uma das abordagens utilizadas foi relacionar o conteúdo de Trigonometria com os referenciais da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e das Múltiplas Representações (MR), combinando-as com situações práticas. Essa abordagem permitiu que os conhecimentos acumulados pela humanidade ao longo dos anos fossem utilizados como recursos pedagógicos, enriquecendo o aprendizado.

Além disso, a contextualização proporcionada pelas disciplinas de História, Geografia e Astronomia auxiliou na compreensão do conteúdo e estimulou a interdisciplinaridade, auxiliando tanto o professor em seu processo pedagógico quanto incentivando o aluno a buscar mais conhecimento. Acreditamos que a combinação dessas abordagens contribuiu significativamente para o desenvolvimento da aprendizagem em Matemática dos alunos do Ensino Médio.

Portanto, espera-se que este material sirva como um guia para o aprimoramento do ensino de Matemática, estimulando o interesse dos alunos e tornando a aprendizagem mais envolvente.

REFERÊNCIAS

AINSWORTH, Shaaron. The functions of multiple representations. **Computers & education**, v. 33, n. 2-3, p. 131-152, 1999.

AINSWORTH, Shaaron. DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. **Learning and instruction**, v. 16, n. 3, p. 183-198, 2006.

AINSWORTH, Shaaron. **The multiple representations principle in multimedia learning**. In: MAYER, Richard. The Cambridge handbook of multimedia learning. 2ª edição. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. p.464-486.

APRENDENDO a Navegar – Carta náutica se mistério 1. [S. l.], 1 de jun. 2014. 1 vídeo (10min30s). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=JzTEWhJR36U&t=370s. Acesso em: 21 de mar. 2023.

ÁVILA, Geraldo. A Geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 9-13, 1982.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

COMO Aristarcos mediu a distância entre a Terra e a Lua?. [S. l.], 23 de abr. 2014. 1 vídeo (6min35s). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=cyjzdpAbPm4. Acesso em: 03 de mar. 2023.

COMO os navios são lançados ao mar?. [S. l.], 22 de jul. 2002. 1 vídeo (1min5s). Disponível em: https://youtube.com/shorts/77pUTq9KlOA?feature=share. Acesso em: 03 de mar. 2023.

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR. **Documento de Área – Ensino**. 2016. Disponível em: http://capes.gov.br/images/documentos/Documentos_de_area_2017/DOCUMENTO_AREA_ENSINO_24_MAIO.pdf Acesso em 23 jul. 2023.

COSTA, José Roberto. **Aristarco de Samos e a distância Terra-Sol**. Disponível em: https://www.zenite.nu/aristarco-de-samos-e-a-distancia-terra-sol. Acesso em: 23 de jul. 2023.

COSTA, José Roberto. **O método da paralaxe**. Disponível em: O método da paralaxe - Astronomia no Zênite (zenite.nu). Acesso em: 22 de jul. 2023.

COSTA, Sueli Irene Rodrigues; RODRIGUES, Claudina Izepe. **As aventuras do Geodetetive 1: A circunferência da Terra**. [S. l.]: Unicamp, 2012. Disponível em:

https://m3.ime.unicamp.br/arquivos/1102/geodetetive-1-guia.pdf. Acesso em: 20 de jul. 2023.

DUVAL, Raymond. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, v. 5, p. 35-65, 1993.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels**. 1ª ed. Bern: Peter Lang, 1995.

DUVAL, Raymond. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Aprendizagem em matemática. Campinas: Papirus Editora, 2003.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Santiago de Cali: Universidad del Valle, 2004.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, v. 6, n. 2, p. 91-112, 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. de Méricles T. Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

GOES, Ana Lara et al. Base Nacional Comum Curricular: uma perspectiva perante a Aprendizagem Significativa e Múltiplas Representações no ensino da Matemática. **Revista Espaço Pedagógico**, v. 30, p. e14832-e14832, 2023.

LABURÚ, Carlos Eduardo; FARIA, Renata Aparecida de. Coordenação e Multiplicidade Representacional em uma Atividade de Função do 1º Grau. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 7, n. 13, p. 61-86, 2018.

LABURÚ, Carlos Eduardo; SILVA, Osmar Henrique Moura da. Multimodos e múltiplas representações: fundamentos e perspectivas semióticas para a aprendizagem de conceitos científicos. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 16, n. 1, p. 7-33, 2011.

MENDES, Iran Abreu. **Ensino de matemática por atividades: uma aliança entre o construtivismo e a história**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2001.

MUCELIN, Neusa Idick Scherpinski. VENHA NAVEGAR POR OUTROS MARES!. In: LOPES, Alice Kazue Takahashi et al. **Matemática**: ensino médio. 2ª ed. Curitiba: SEED, 2007. p. 121-134.

OLIVEIRA, Thaís de. **Trigonometria: a mudança da prática docente mediante novos conhecimentos**. 2010. 177 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

TYTLER, Russell; PRAIN, Vaughan; PETERSON, Suzanne. Representational issues in students learning about evaporation. **Research in Science Education**, v. 37, n. 3, p. 313-331, 2007.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Referencial curricular do Paraná: princípios, direitos e orientações**. Curitiba, 2018.